

I NUMERI REALI



0,1,2,3,4,5,6,7,.....

Sono numeri **NATURALI** ($\in \mathbf{N}$)

fin dai tempi più antichi risolsero il problema di **contare**

5 $\in \mathbf{N}$, **8** $\in \mathbf{N}$, **5 - 8** $\in \mathbf{N}$?

NO

Non esiste alcun numero naturale che
sommato ad 8 dia come risultato 5

$(\nexists n \in \mathbf{N} / n+8=5)$

LA SOTTRAZIONE

NON SEMPRE E'

POSSIBILE IN **N**

..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...

sono i numeri **INTERI** ($\in \mathbb{Z}$)

$$-7 \in \mathbb{Z},$$

$$2 \in \mathbb{Z},$$

$$-7 : 2 \in \mathbb{Z}?$$

NO

Non esiste alcun numero intero che moltiplicato per 2 dia come risultato -7

$$(\nexists z \in \mathbb{Z} / 2 \times z = -7)$$

LA DIVISIONE
NON SEMPRE
E' POSSIBILE IN **Z**

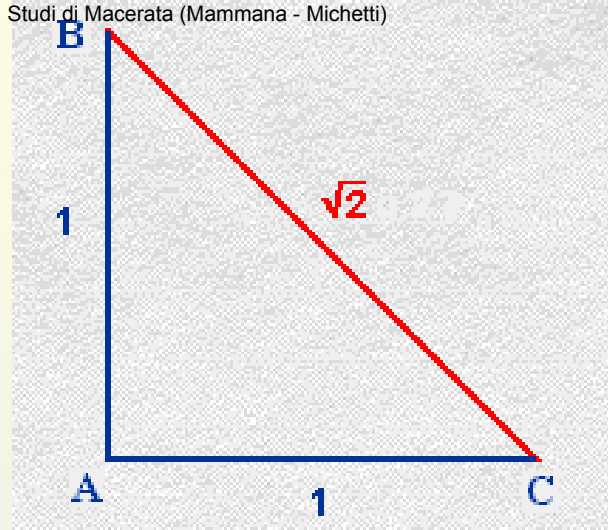
$$\{n/m:m,n\in\mathbb{Z} \ m\neq 0\}$$

sono i numeri **RAZIONALI** ($\in\mathbb{Q}$)

In $\mathbb{Q}$ è sempre possibile dividere un numero per un altro che sia diverso da zero tuttavia ...

**NON SI RISOLVE IL
PROBLEMA DI MISURARE
TUTTE LE GRANDEZZE**

Dato un quadrato di lato unitario, quanto è lunga la sua diagonale?



Non esiste alcun numero razionale che misuri esattamente BC ($\nexists q \in \mathbb{Q} / \text{mis}BC=q$).

Infatti, per il **Teorema di Pitagora**:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 = 1 + 1 = 2$$

ma

non esiste $q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$

TEOREMA: NON ESISTE ALCUN $r \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $r^2 = 2$

Dimostrazione:

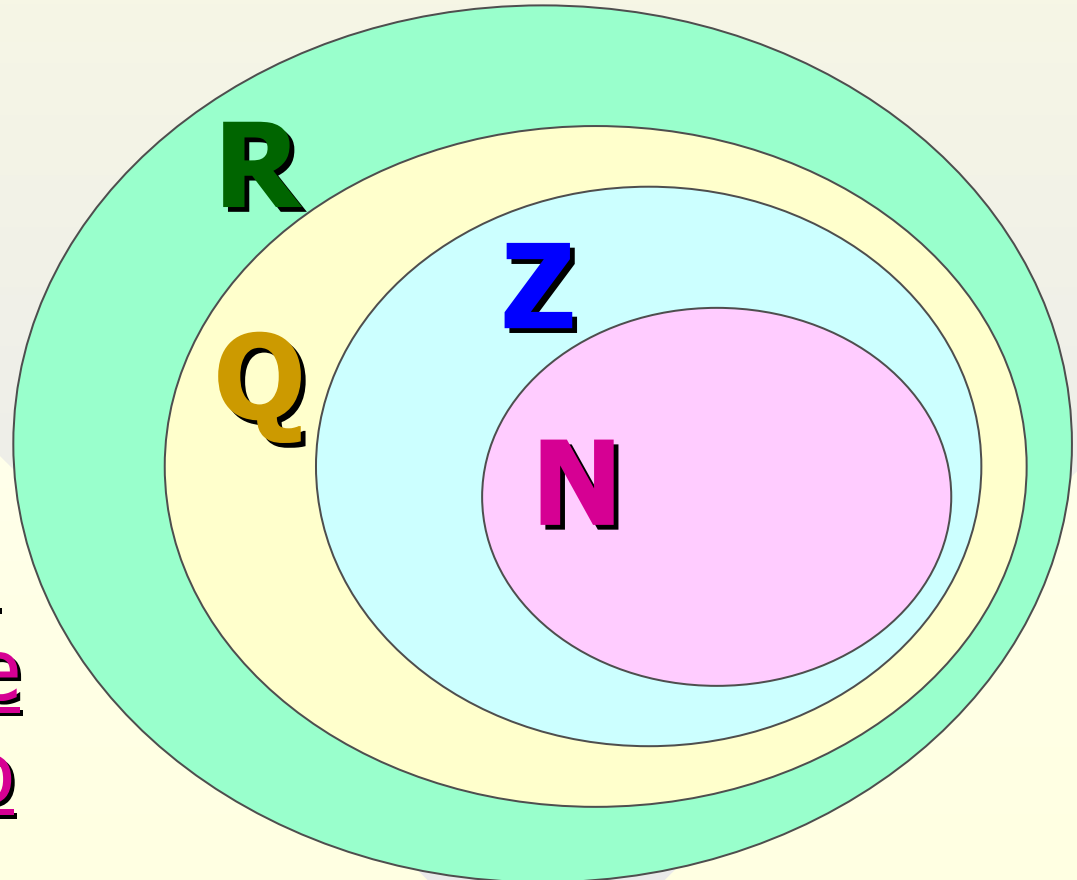
Supponiamo per assurdo che esista un numero razionale $r = m/n$, con m ed n primi tra loro, tale che $r^2 = m^2 / n^2 = 2$. Questo implica $m^2 = 2n^2$ (*), cioè m^2 pari e quindi m pari: $m = 2s$. Sostituendo in (*) si ottiene $(2s)^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2s^2$ e quindi anche n pari. Ciò è in contraddizione con la supposizione iniziale che m ed n siano primi tra loro.

Per risolvere problemi via via più complessi

è stato introdotto l'insieme R dei

NUMERI REALI

In R è
possibile, per
esempio,
calcolare la
radice quadrata
di un qualunque
numero positivo



E la radice quadrata di un numero negativo?

NON ESISTE IN $\mathbb{R}$

Per parlare di radice di un numero negativo, e risolvere problemi ancora più generali, si amplia $\mathbb{R}$ costruendo l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Tralasciamo $\mathbb{C}$ e diamo una **definizione assiomatica** dei numeri reali; gli altri insiemi numerici di cui abbiamo parlato potranno essere considerati, in virtù degli assiomi di $\mathbb{R}$, sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI $\mathbb{R}$

I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ su cui sono definite:

- **due applicazioni** che chiamiamo addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\times)$, che ad ogni coppia di numeri reali a, b fanno corrispondere rispettivamente un numero reale $a+b$ ed un numero reale $a \times b$,
 - **una relazione** tra le coppie di $\mathbb{R}$, detta ordinamento totale $(\leq)$,
- che godono delle seguenti proprietà:

(+)

- 1) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ si ha
 $a + b = b + a$ (proprietà commutativa).
- 2) Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ si ha
 $a + (b + c) = (a + b) + c$ (proprietà associativa).
- 3) Esiste un unico elemento $0 \in \mathbf{R}$ tale che
per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$.
- 4) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste un unico opposto
 $-a \in \mathbf{R}$ tale che $a + (-a) = 0$.

($\times$)

1) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ si ha
 $a \times b = b \times a$ (proprietà commutativa).

2) Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ si ha
 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (proprietà associativa).

3) Esiste un unico elemento $1 \in \mathbf{R}$ tale che
per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \times 1 = 1 \times a = a$.

4) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, esiste un unico
inverso $(1/a) \in \mathbf{R}$ tale che
 $(1/a) \times a = a \times (1/a) = 1$.

($\leq$)

- 1) Per ogni coppia $a, b \in \mathbf{R}$ si ha $a \leq b$ o $b \leq a$ (dicotomia).
- 2) Se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$ (proprietà transitiva).
- 3) Se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$ (proprietà antisimmetrica).
- 4) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, risulta $a \leq a$ (proprietà riflessiva).

(+), ($\times$), ($\leq$)

1) Se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$
per ogni $c \in \mathbf{R}$.

2) Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora $0 \leq a \times b$.

3) Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ si ha
 $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Gli assiomi del campo reale spiegano le regole che normalmente impieghiamo operando con i numeri, per esempio:

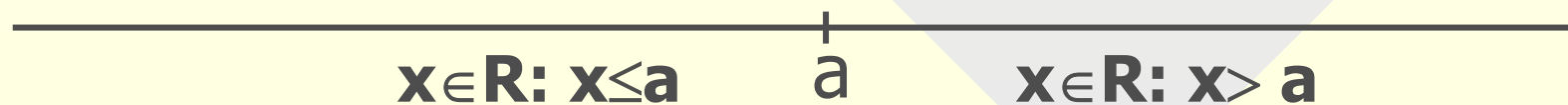
- $a \times 0 = 0$ poiché $a \times 0 = a \times (0+0) = a \times 0 + a \times 0 \Leftrightarrow a \times 0 = 0$
- $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $b = 0$ poiché se $a \neq 0 \Rightarrow b = (1/a) \times (a \times b) = 0$ dato che $a \times b = 0$ (e viceversa se $b \neq 0$)
- $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$ poiché $a \geq 0 \Rightarrow a + (-a) \geq 0 + (-a) \Rightarrow -a \leq 0$
- $a \leq b$ e $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$ poiché $c < 0 \Rightarrow -c > 0$ e $a \leq b \Rightarrow 0 \leq b-a \Rightarrow 0 \leq (b-a) \times (-c) \Rightarrow +ac - bc \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

Inoltre in $\mathbf{R}$ (e solo in $\mathbf{R}$) è soddisfatta una **ulteriore proprietà**: l'**assioma di continuità** (o di Dedekind).

SEZIONE DI $\mathbf{R}$ (def)

Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{R}$ tali che $A \cup B = \mathbf{R}$ e $A \cap B = \emptyset$ e $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a < b$.

Si dirà allora che (A, B) è una **sezione in $\mathbf{R}$** .



Assioma di continuità

Per ogni sezione (A,B) in $\mathbb{R}$
esiste un unico numero reale L
tale che $a \leq L \leq b$,

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B.$$

Principali conseguenze dell'assioma di continuità :

- $\forall a > 0$ e $\forall n \in \mathbf{N} \exists! y > 0 : y^n = a$
(esistenza ed unicità della radice n.ma di un numero reale positivo)
- $\forall a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, $\exists r \in \mathbf{Q} : a < r < b$ (densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$)
- Ogni insieme limitato di numeri reali è dotato di estremo superiore e di estremo inferiore finito.

La "continuità" dei numeri reali fa sì che

l'insieme $\mathbb{R}$ possa essere messo in corrispondenza biunivoca con un altro insieme "continuo":

la retta

numero reale $\leftrightarrow$ punto sulla retta

Gli insiemi numerici:

alcune definizioni

- Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, diremo che un numero reale M è un **maggiorante** di A se $a \leq M, \forall a \in A$.
- Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, diremo che un numero reale m è un **minorante** di A se $a \geq m, \forall a \in A$.

- Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dirà **limitato superiormente** se ammette un maggiorante.
- Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dirà **limitato inferiormente** se ammette un minorante.
- Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dirà **limitato** se esso è limitato superiormente ed inferiormente.

- Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato, si dirà che esso è dotato di **massimo** M e di **minimo** m , se esistono due numeri reali $M, m \in A$, tali che $m \leq a \leq M, \forall a \in A$.

N.B. Se M è il massimo di A , allora $M \in A$ ed è il minimo dei maggioranti; se m è il minimo di A , allora $m \in A$ ed è il massimo dei minoranti

- Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente si dirà **estremo superiore** di A ($\sup A$) il minimo dei maggioranti di A . Se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente si dirà **estremo inferiore** ($\inf A$) di A il massimo dei minoranti di A .

OSSERVAZIONE

m **minimo** di $A \Rightarrow m \inf A$

m **minimo** di $A \not\Leftarrow m \inf A$

ESEMPIO

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 7\}$$

Questo insieme è **limitato** in quanto dotato di maggioranti e di minoranti.

$$M(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 7\}$$

$$m(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$$

$\min M(A) = 7$ e $7 \in A \Rightarrow$ **7 è il massimo di A.**

$\max m(A) = 2$, $2 \notin A$, $\Rightarrow$ **2 non è minimo di A ma è solamente estremo inferiore di A.**

- **Insieme illimitato**: se $A \subset \mathbb{R}$ non è limitato superiormente si porrà $\sup A = +\infty$; se $A \subset \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente si porrà $\inf A = -\infty$.