

FUNZIONE

Def.

Siano A e B due insiemi.

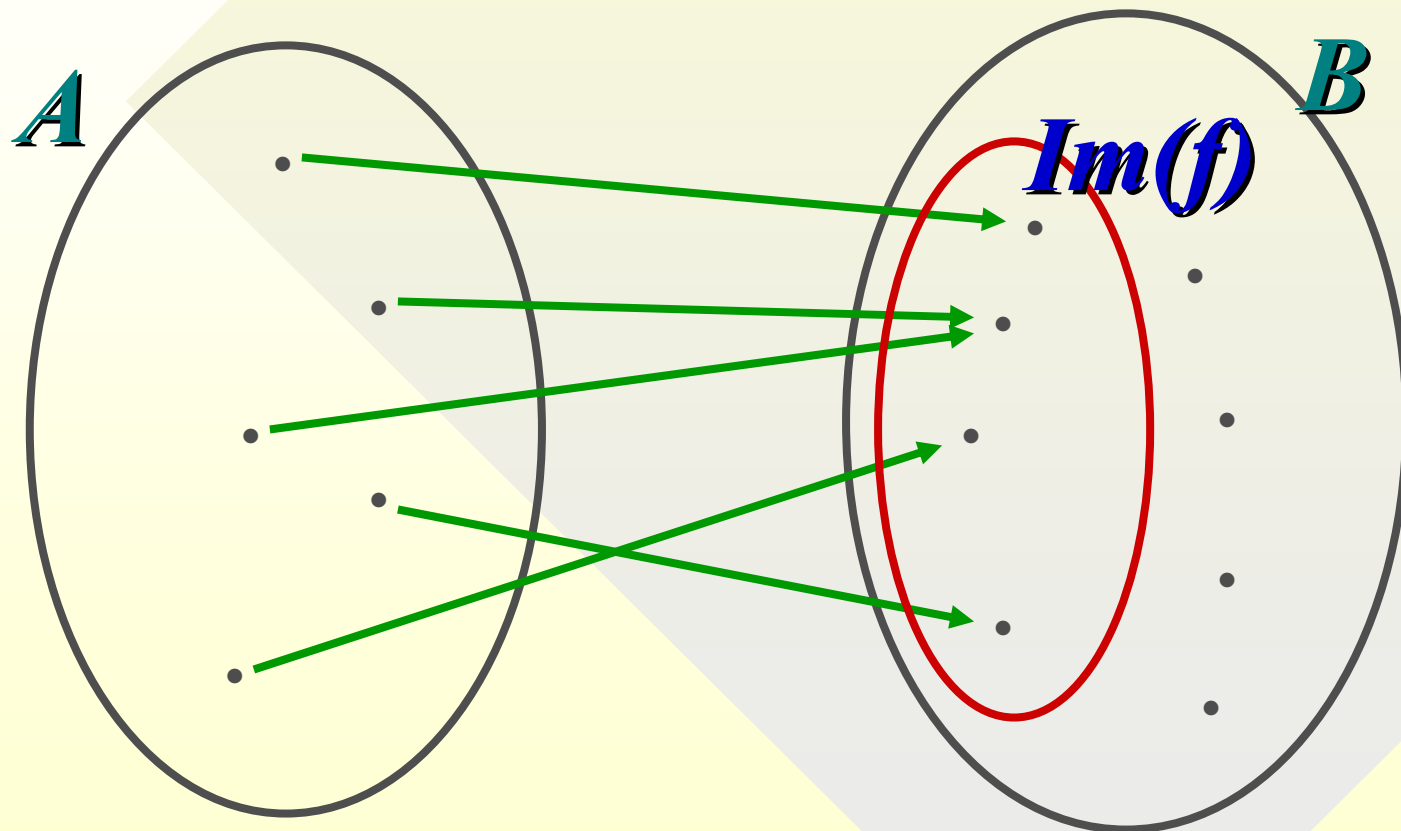
Una legge che *ad ogni elemento x di A* associa *uno, ed un solo, elemento y di B* si dice **FUNZIONE** f definita su A a valori in B , e si indica con

$$f:A \rightarrow B$$

- ◆ A si chiama **dominio** di f
- ◆ B si chiama **codominio** di f
- ◆ $y=f(x) \in B$ (variabile dipendente) si chiama **immagine di x mediante f**
- ◆ $x \in A$ (variabile indipendente) si chiama **controimmagine di y**

Data $f:A \rightarrow B$,

$$Im(f) = f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = y\}$$



NB: $f(A) \subseteq B$

Data $f:A\rightarrow B$,

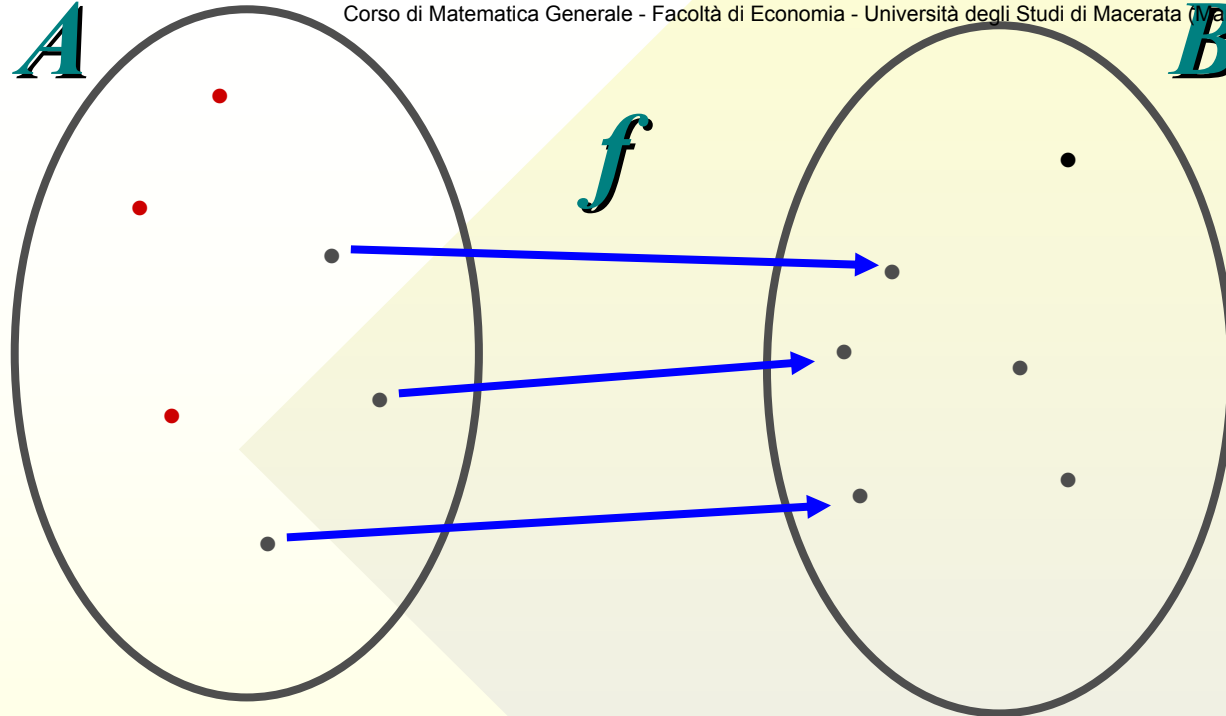
se $A'\subset A$, la funzione

$$f|_{A'}:A'\rightarrow B$$

si chiama

restrizione

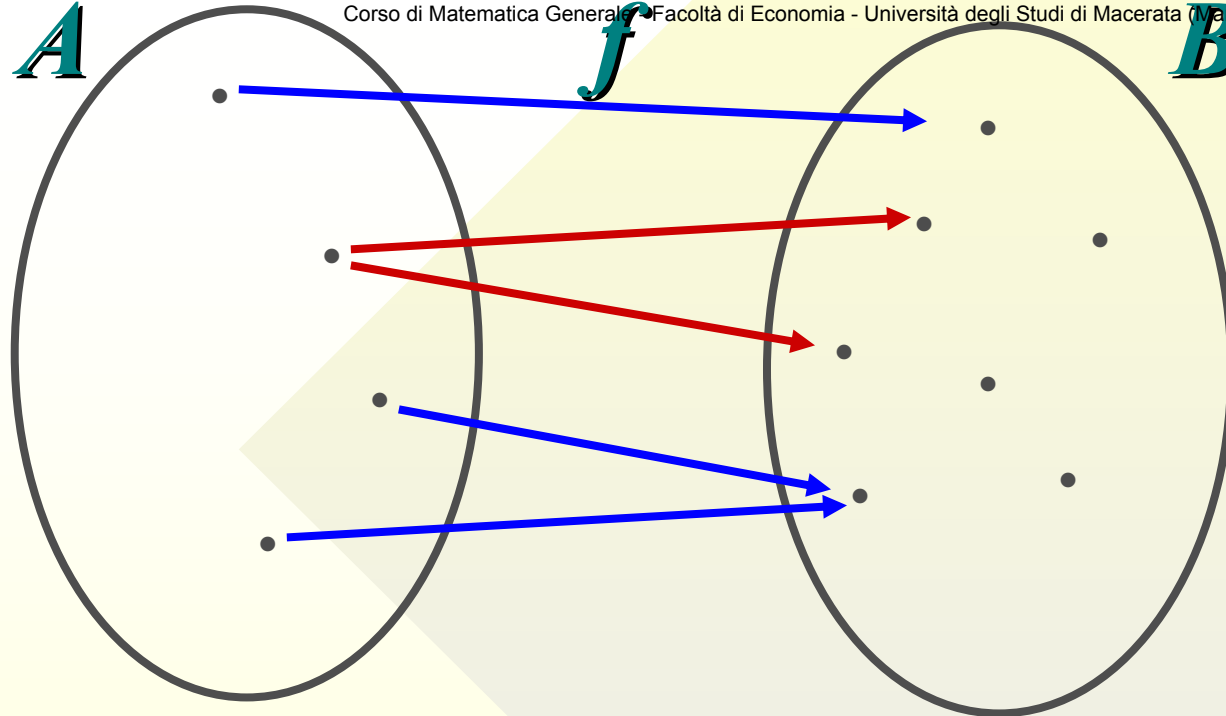
di f ad A'



La legge
qui
definita è
una
funzione
di A in B ?

NO

Ci sono elementi di A a
cui la funzione data non
associa alcun valore di B



La legge
qui
definita è
una
funzione
di A in B ?

NO

C'è un elemento di A al
quale vengono associati
due elementi di B

ESEMPIO

Consideriamo *un'impresa* che produce una determinata merce e supponiamo che in regime di pieno utilizzo possa produrre N unità di tale bene.

Per produrre tale merce l'impresa deve sostenere dei costi che possono dividersi in:

FISSI: indipendenti dalla quantità di merce prodotta (legati ad es. agli impianti esistenti)

VARIABILI: il cui ammontare dipende dal volume di produzione (ad es. per l'acquisto di materie prime)

... continua

Sia q = quantità di merce prodotta

C_f = costi fissi

$C_v(q)$ = costi variabili

q variabile indipendente che può variare da 0 ad N

$C(q)$ variabile dipendente
(il costo di produzione della merce dipende dalla quantità q di merce prodotta)

... continua

Se esiste una **legge** che permette di *stabilire in maniera univoca* come $C(q)$ dipenda da q , si avrà una **funzione**.

Si può supporre, ad es., che $C_v(q)$ sia proporzionale a q secondo la costante A , cioè

$$C_v(q) = A \cdot q \text{ e quindi}$$

$$C(q) = C_f + A \cdot q$$

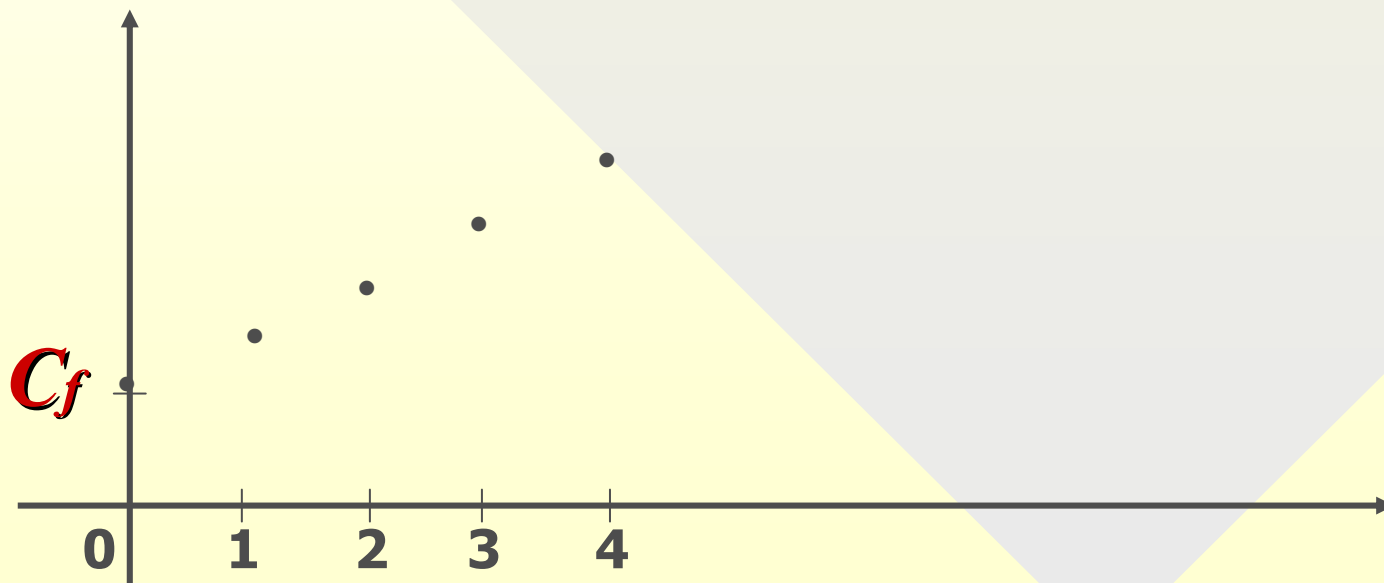
$$C: \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathcal{R}$$

definita da $C(q) = C_f + A \cdot q$

è una **FUNZIONE** (funzione dei costi)

q è la variabile indipendente

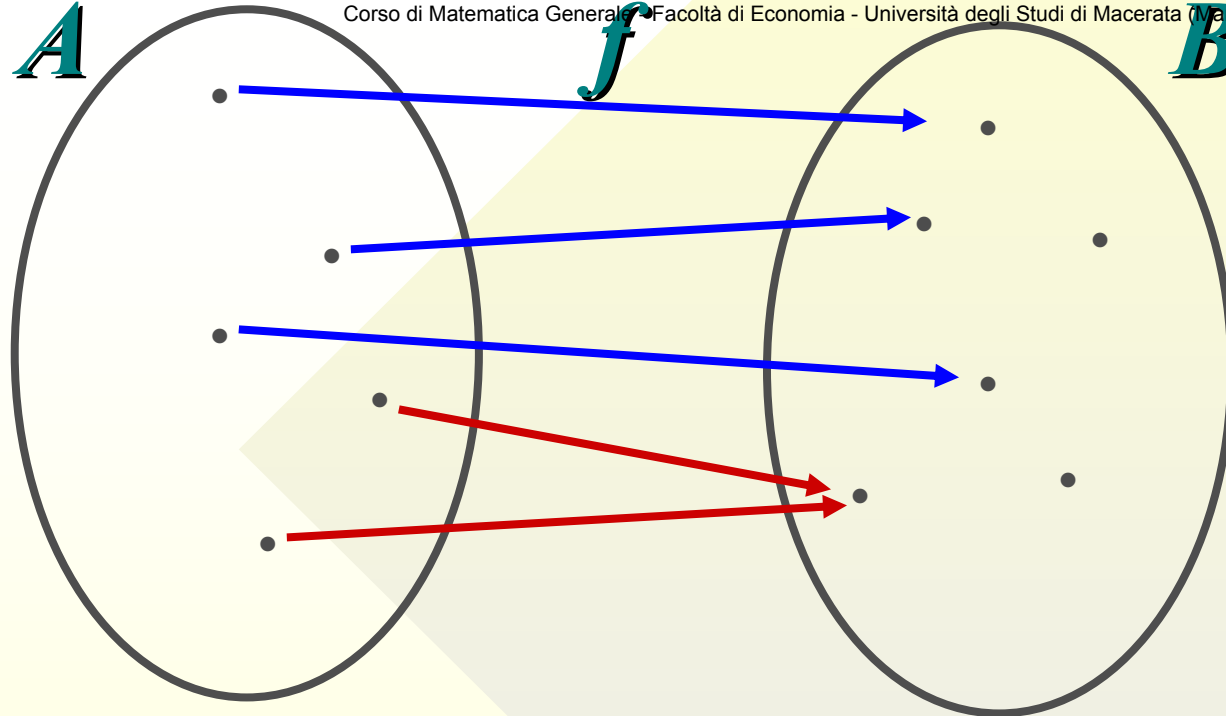
C è la variabile dipendente



Una funzione si dice **INIETTIVA**

se *ad elementi distinti del dominio associa elementi distinti del codominio*

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$$

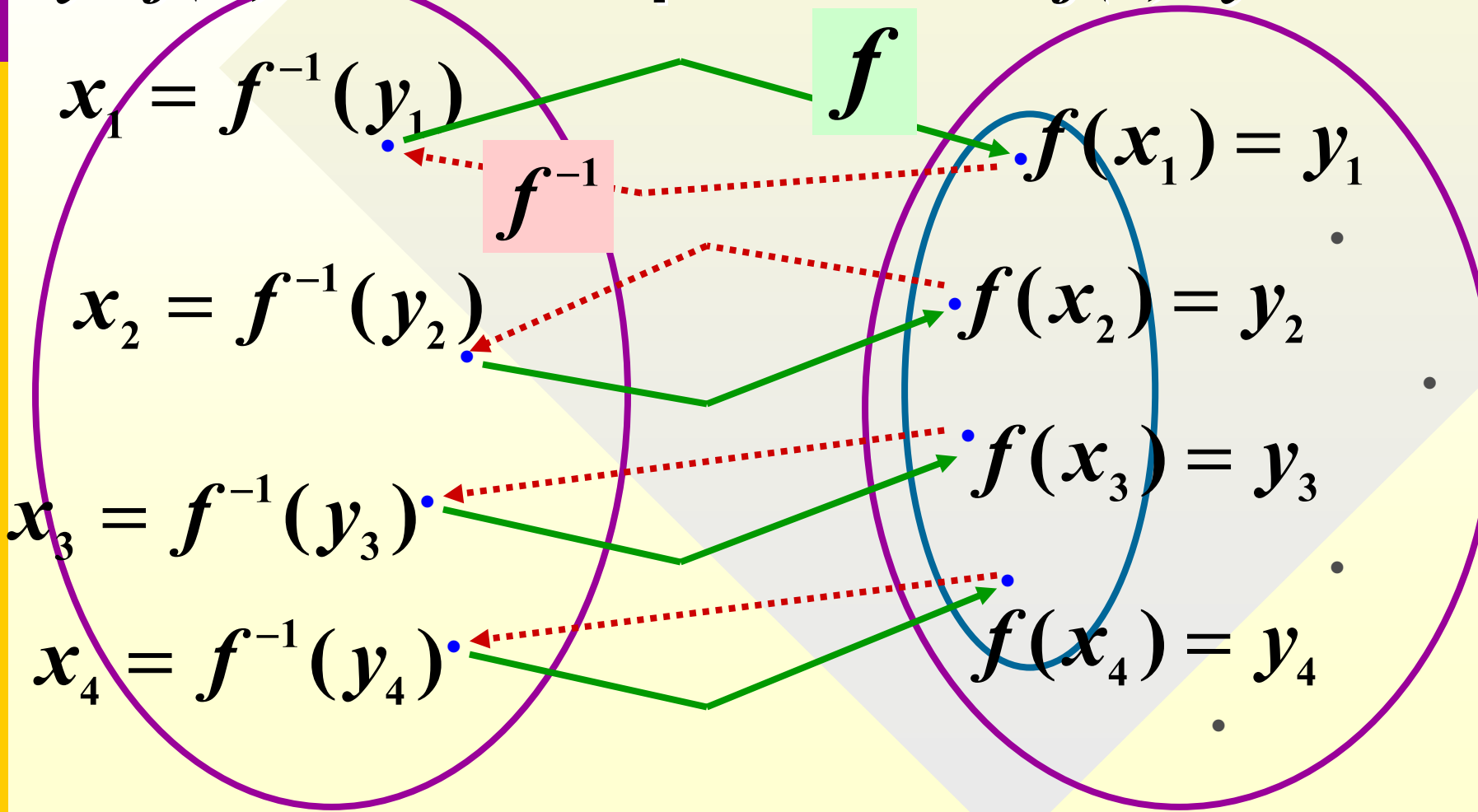


La
funzione
qui
definita è
iniettiva?

NO

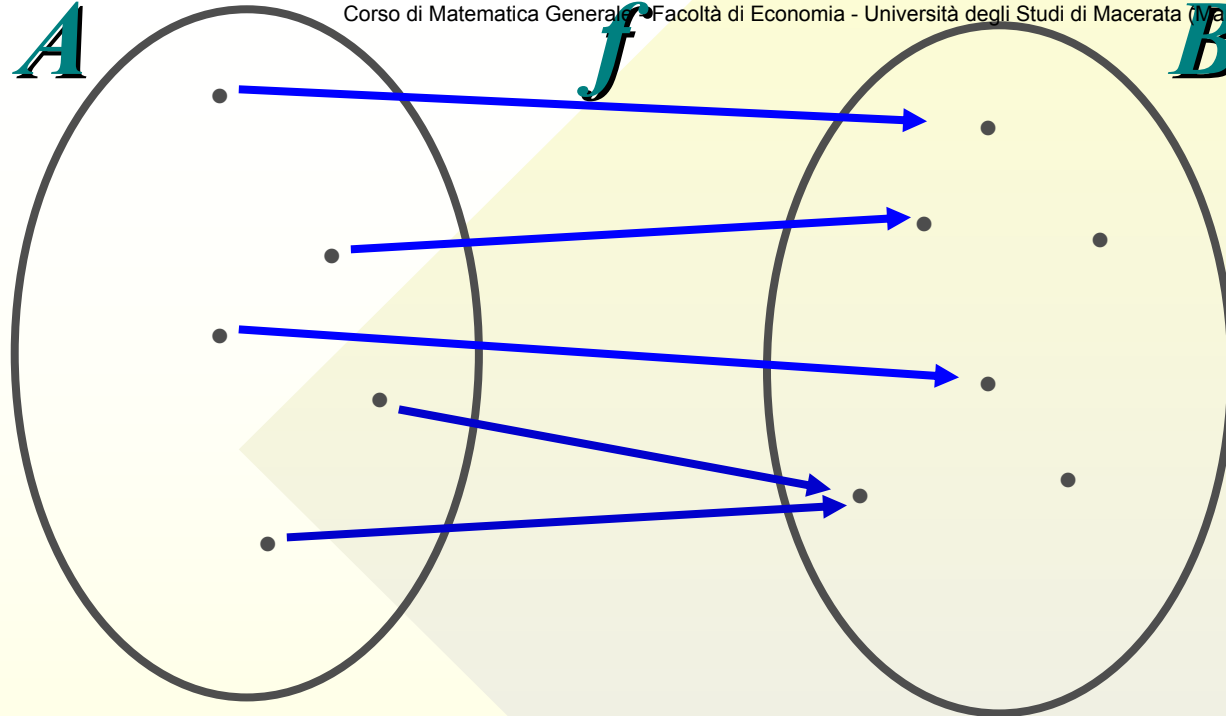
A due elementi distinti di
A la funzione associa lo
stesso elemento di **B**

Se $f:A \rightarrow B$ è **iniettiva** $\Rightarrow \exists f^{-1} : f(A) \rightarrow A$
 (**inversa di f**) che ad ogni elemento
 $y \in f(A)$ associa quell' $x \in A : f(x)=y$



Una funzione $f:A \rightarrow B$ si
dice **SURIETTIVA** se

$$\text{Im}(f) = B$$

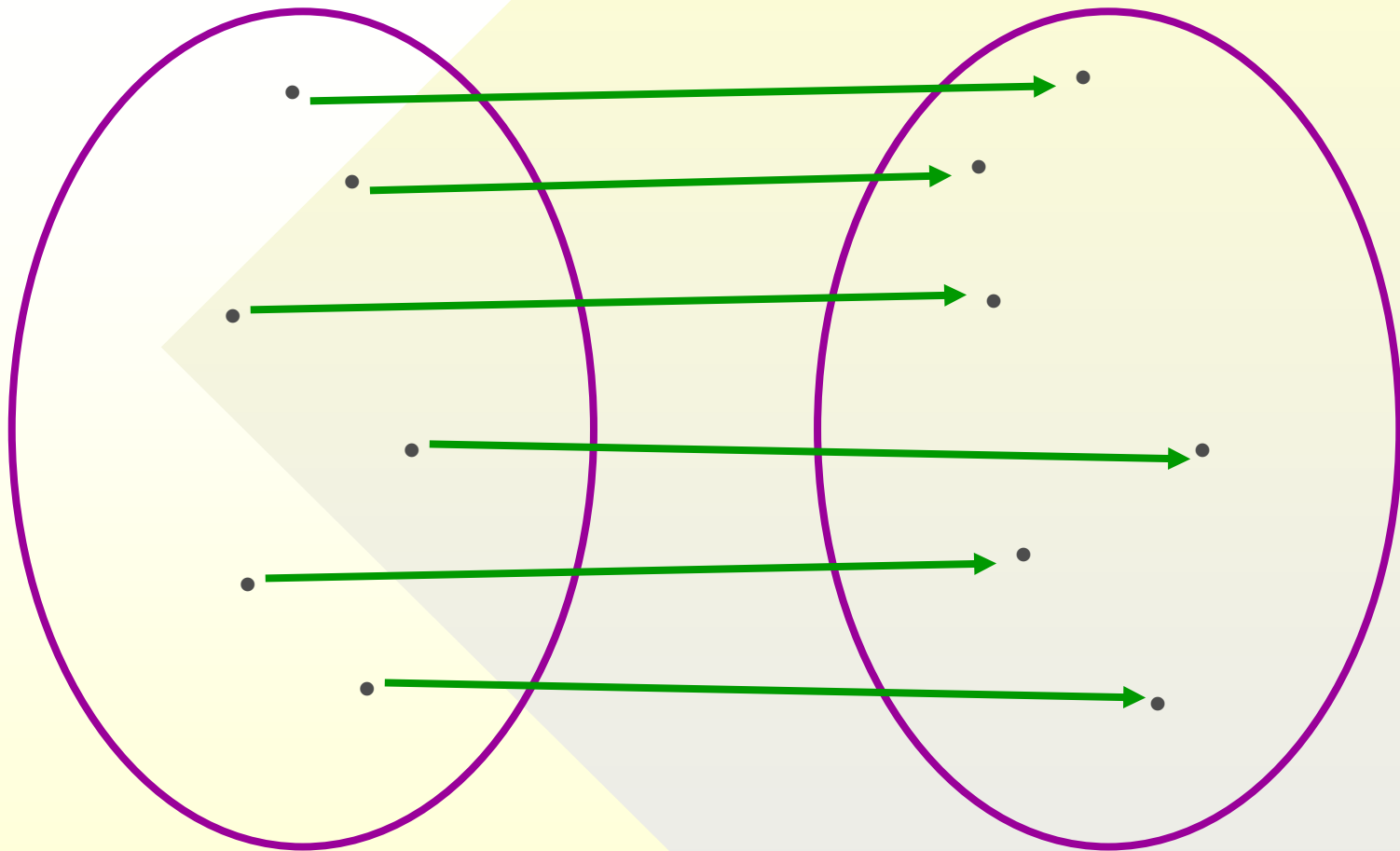


La
funzione
qui definita
è
suriettiva?

NO

Esistono elementi di B che $\notin \text{Im}(f)$

Una funzione $f:A \rightarrow B$ si
dice **BIIETTIVA** se è
sia iniettiva
che suriettiva



La legge sopra definita è biiettiva?

SI

$$f:A \rightarrow B$$

se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

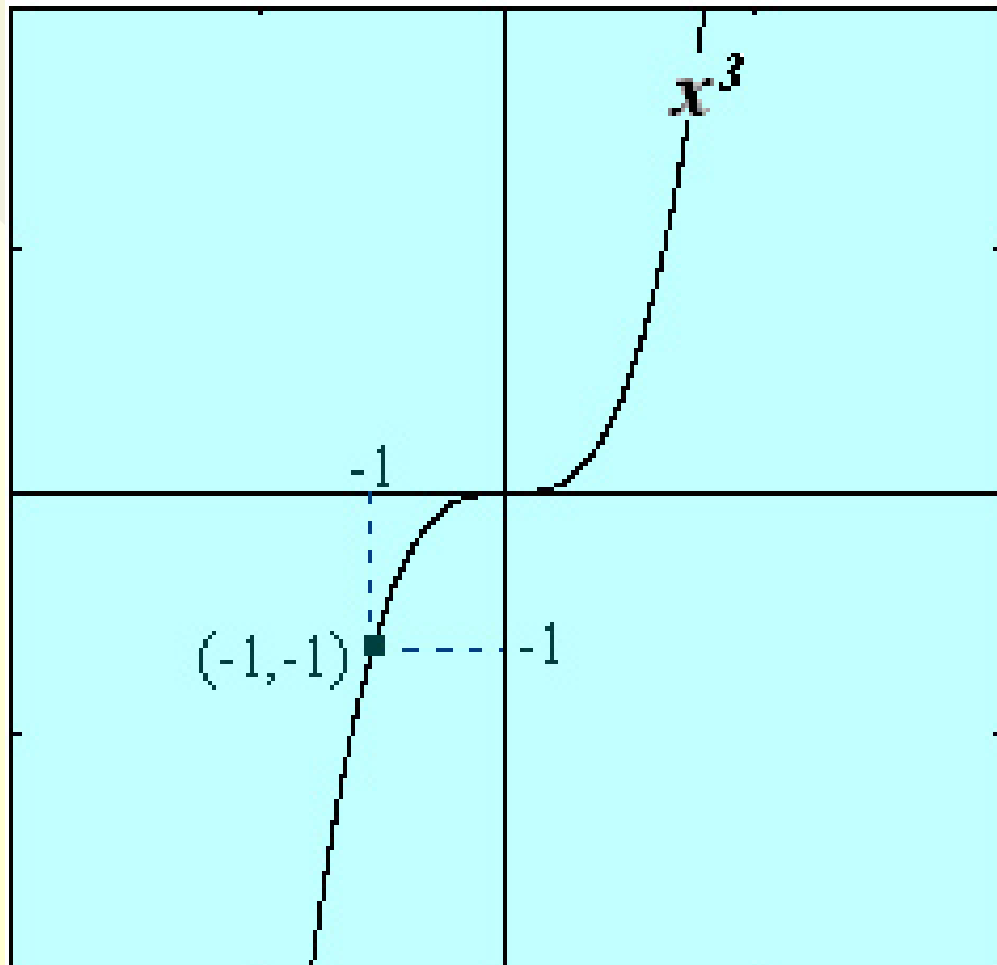
f è una funzione di variabile reale a valori reali

**D'ora in poi considereremo
funzioni di questo tipo**

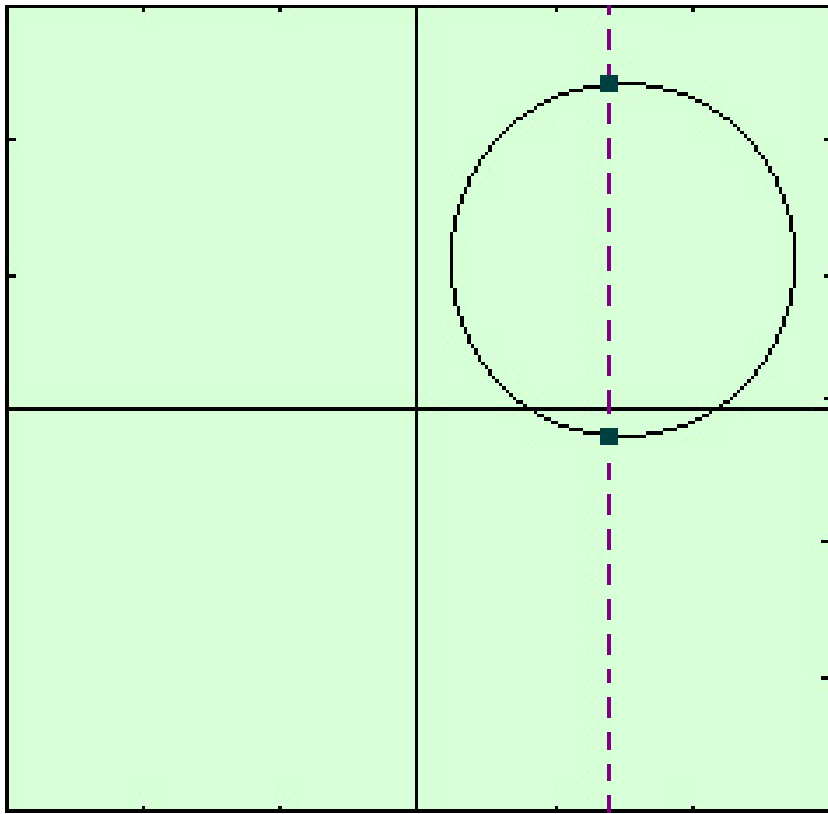
Data $f:A \rightarrow R$ si
definisce **grafico della**
funzione f ,
l'insieme $G(f) (\subset A \times R)$
delle coppie ordinate
 $(x, f(x))$ con $x \in A$

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$
il **GRAFICO DI f** è

$$G(f) = \{(x, x^3) : x \in \mathbb{R}\}$$



In generale il grafico di una funzione è una **CURVA PIANA**, ma non tutte le curve piane sono grafici di funzioni



Non è il grafico di una funzione, per essere tale ogni retta parallela all'asse delle y deve incontrarlo in un solo punto

A volte è assegnata la **legge** che **definisce la funzione** ma non è specificato il **dominio**

In questo caso si considera il **DOMINIO NATURALE** di f
*cioè il più grande insieme
sul quale la funzione ha
senso*

ESEMPIO

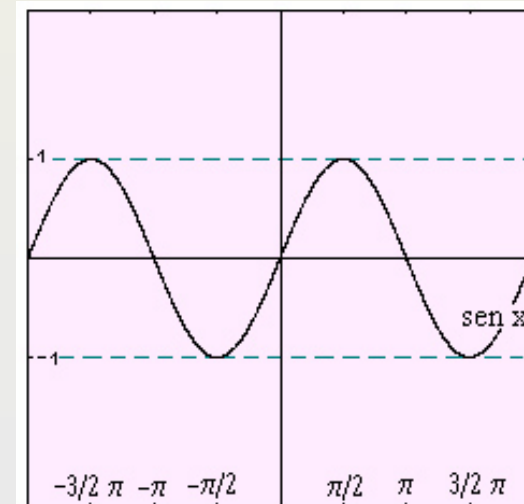
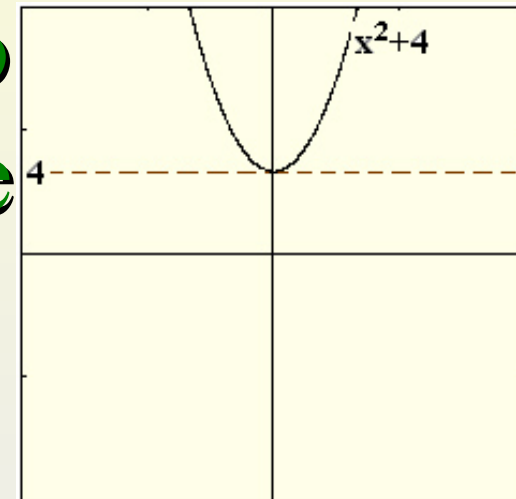
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \geq 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ o } x \geq 2\}$$

Una funzione $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ con A simmetrico rispetto all'origine, si dice:

- **PARI** se $f(x)=f(-x)$ (grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate)
- **DISPARI** se $f(-x)=-f(x)$ (grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi)



Una **funzione** si dice *limitata superiormente, limitata inferiormente o limitata* se l'**insieme** $f(A)$ è rispettivamente *limitato superiormente, limitato inferiormente o limitato*

Analogamente: $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$

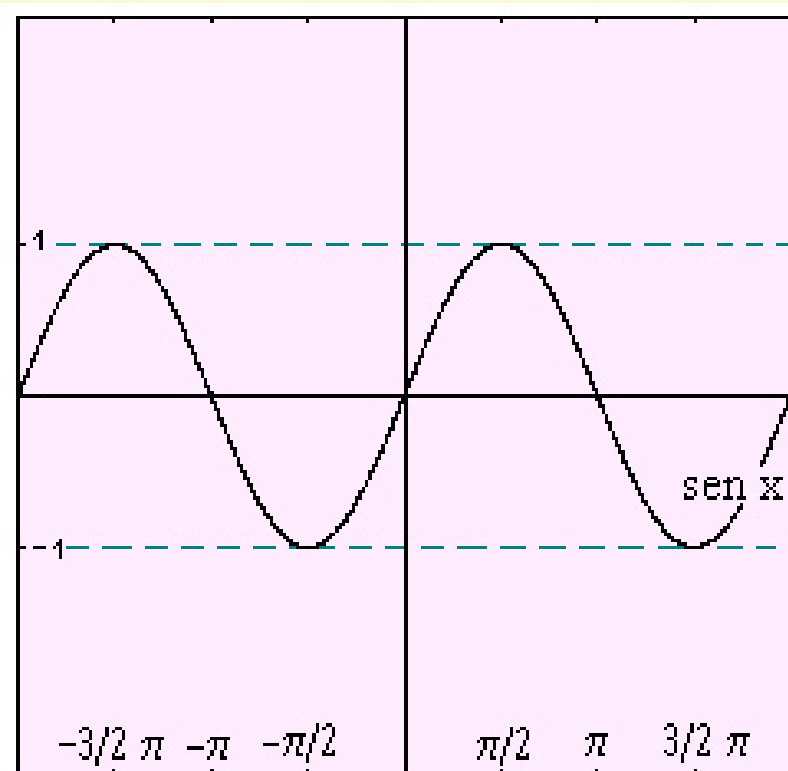
$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$$

f è dotata di massimo o minimo se $f(A)$ lo è e

$$\max_{x \in A} f(x) = \max f(A)$$

$$\min_{x \in A} f(x) = \min f(A)$$

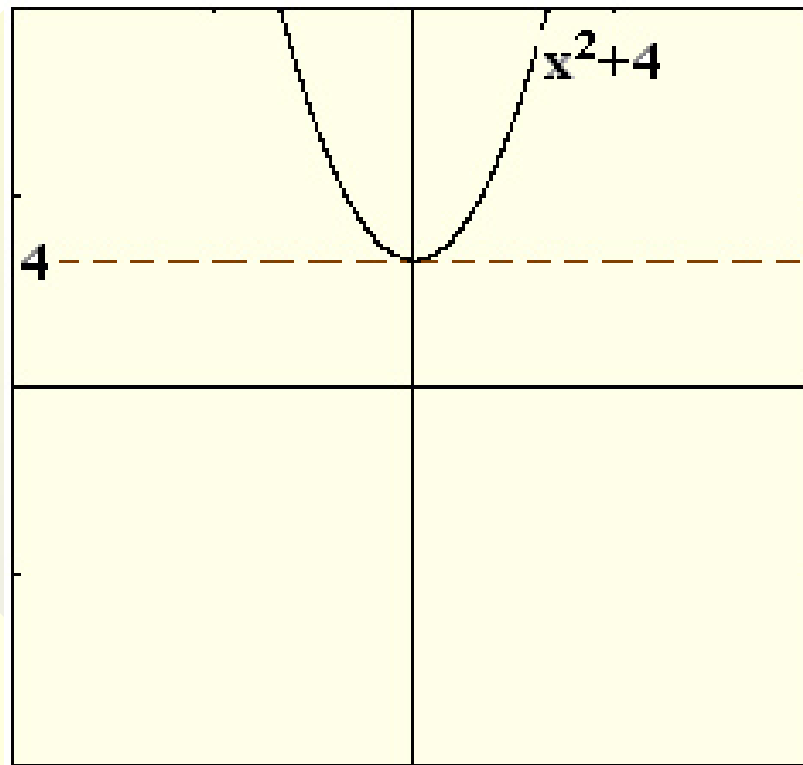
Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x$



$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ Insieme limitato con $\max = 1 (= \sup)$ e $\min = -1 (= \inf)$

$\Rightarrow f$ è una funzione limitata dotata di massimo $M=1$ e di minimo $m=-1$

Data $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + 4$



$f(\mathbb{R}) = [4, +\infty)$ Insieme superiormente illimitato dotato di **min=4**

$\Rightarrow f$ è una funzione **limitata inferiormente**, dotata di minimo **m=4** e **illimitata superiormente** con **sup(f)= $+\infty$**

Il massimo e il minimo di cui si è parlato si dicono anche **MASSIMO ASSOLUTO** e **MINIMO ASSOLUTO** e possono essere definiti come segue

Data $f : A \rightarrow R$ si dice che M (m) è il **MASSIMO ASSOLUTO** (**minimo assoluto**) della funzione f se

$$f(x) \leq M, \forall x \in A \text{ ed } \exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = M$$
$$(f(x) \geq m, \forall x \in A \text{ ed } \exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = m)$$

Oltre che di massimo e minimo assoluto per una funzione, si può parlare di **MASSIMO** e **MINIMO RELATIVO**

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che L (l)
è il **MASSIMO RELATIVO**
(**minimo relativo**) della funzione
f se

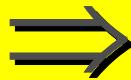
$$\exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = L(l) \text{ ed}$$

$$\exists I(\bar{x}, r) = \{x \in \mathbb{R} : \bar{x} - r < x < \bar{x} + r\}$$

$$t.c. f(x) \leq L(f(x) \geq l) \forall x \in I(\bar{x}, r) \cap A$$

NB:

**x' punto di
massimo (min)
assoluto**



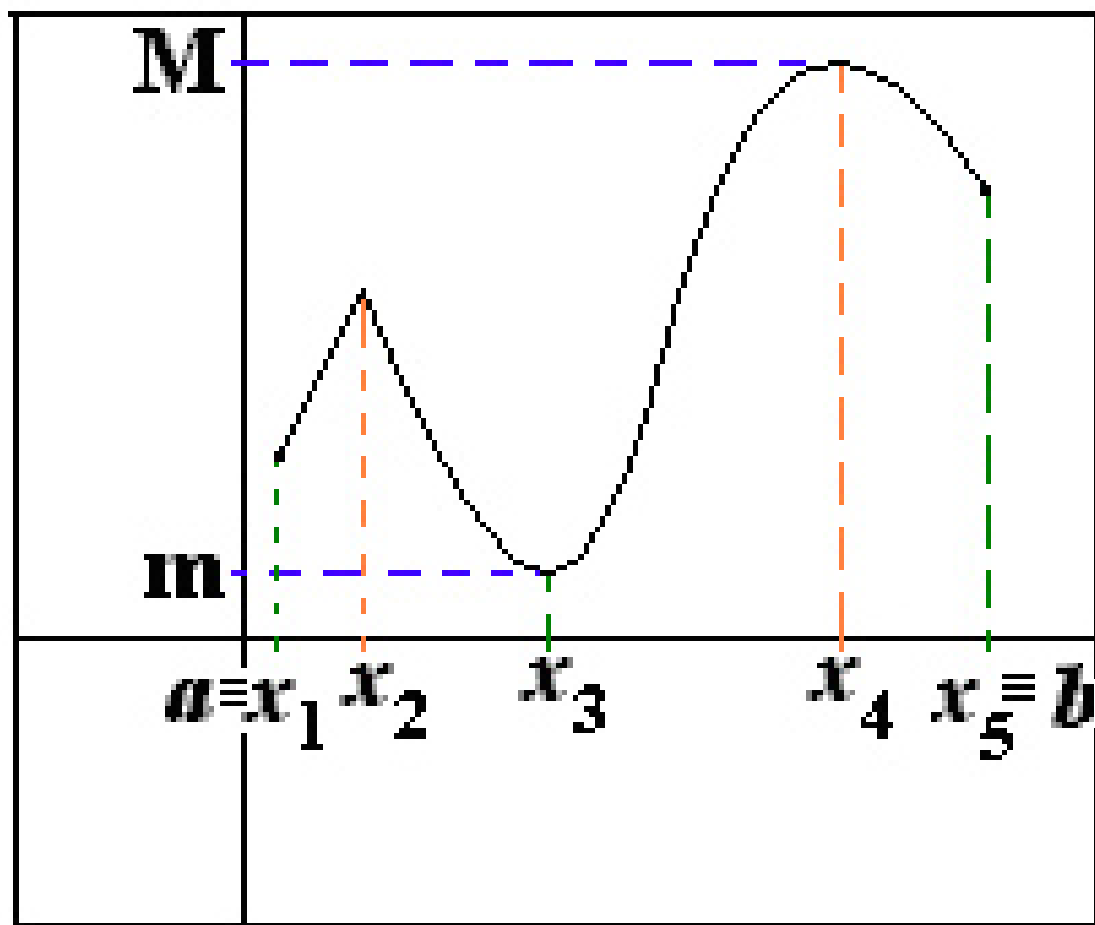
**x' punto di
massimo (min)
relativo**

**x' punto di
massimo (min)
assoluto**



**x' punto di
massimo (min)
relativo**

$$f : [a, b] \rightarrow R$$



$x_1 = \text{p.to min rel.}$

$x_2 = \text{p.to max rel.}$

$x_3 = \text{p.to min rel.}$

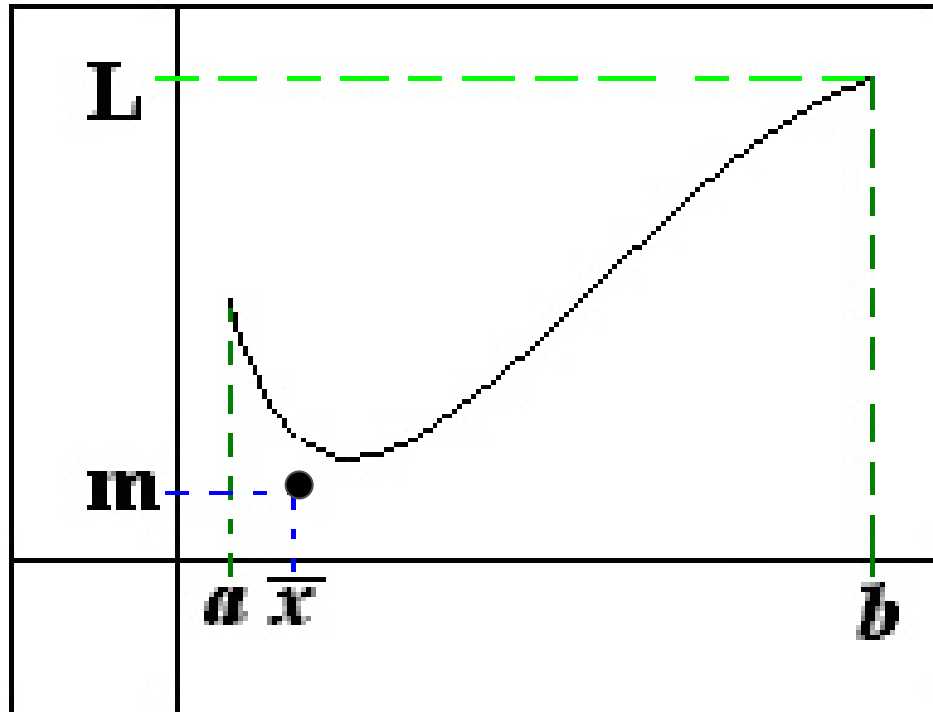
e assoluto

$x_4 = \text{p.to max rel.}$

e assoluto

$x_5 = \text{p.to min rel.}$

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\sup_{x \in (a, b)} f(x) = L, \quad \min_{x \in (a, b)} f(x) = m$$

$\bar{x}$ = p.to di min relativo ed assoluto

Data $f : A \rightarrow R$

se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$



$f(x)$ è crescente (decr.) in A

Se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ si ha

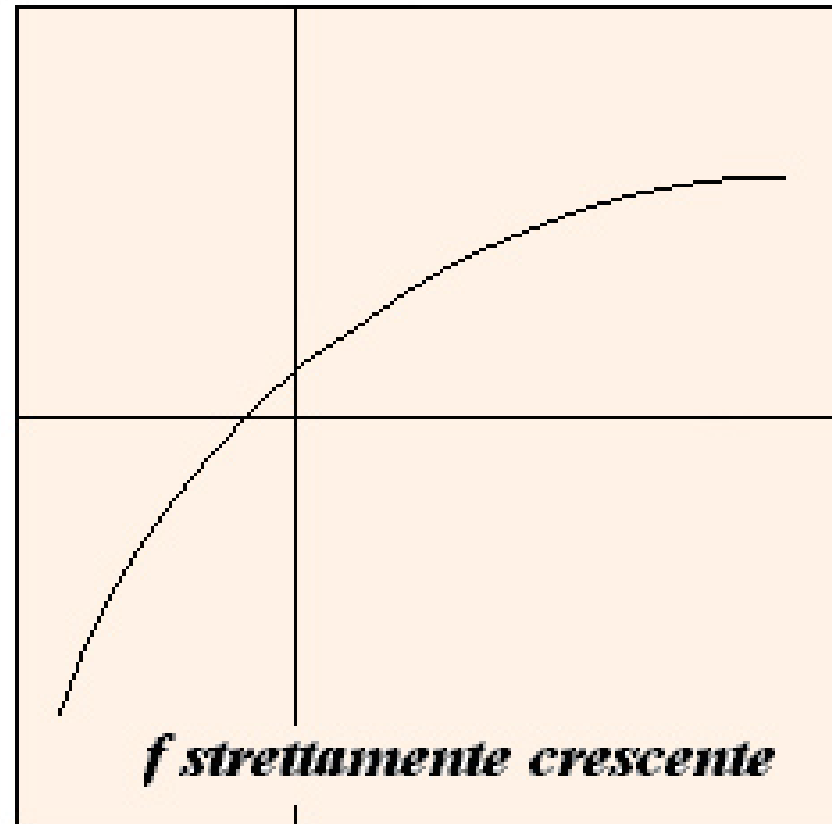
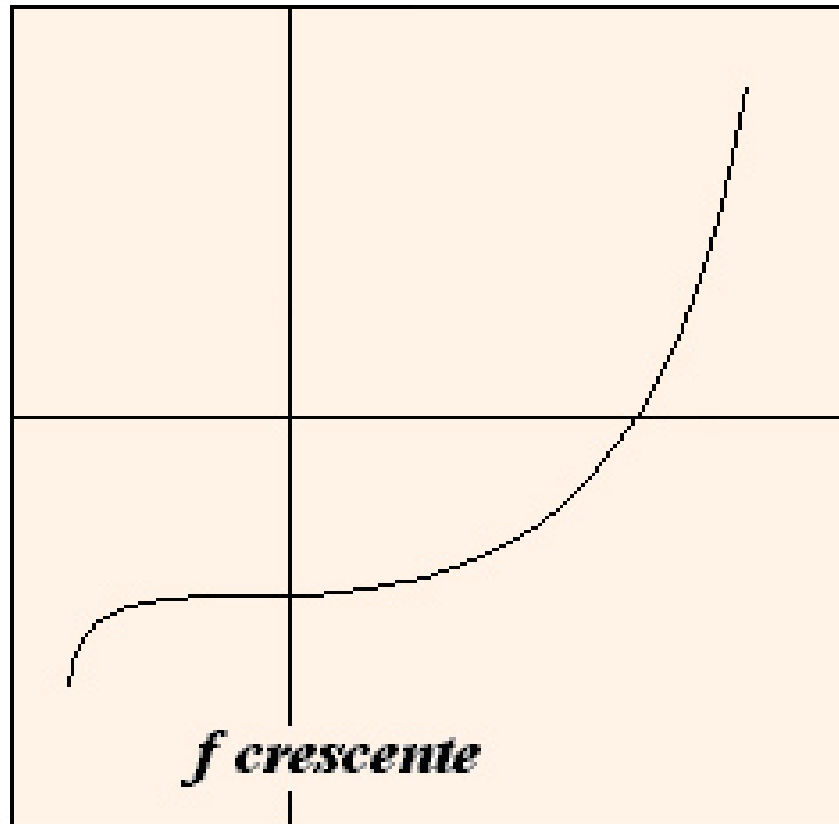
$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$



$f(x)$ è strettamente crescente
(strett. decr.) in A

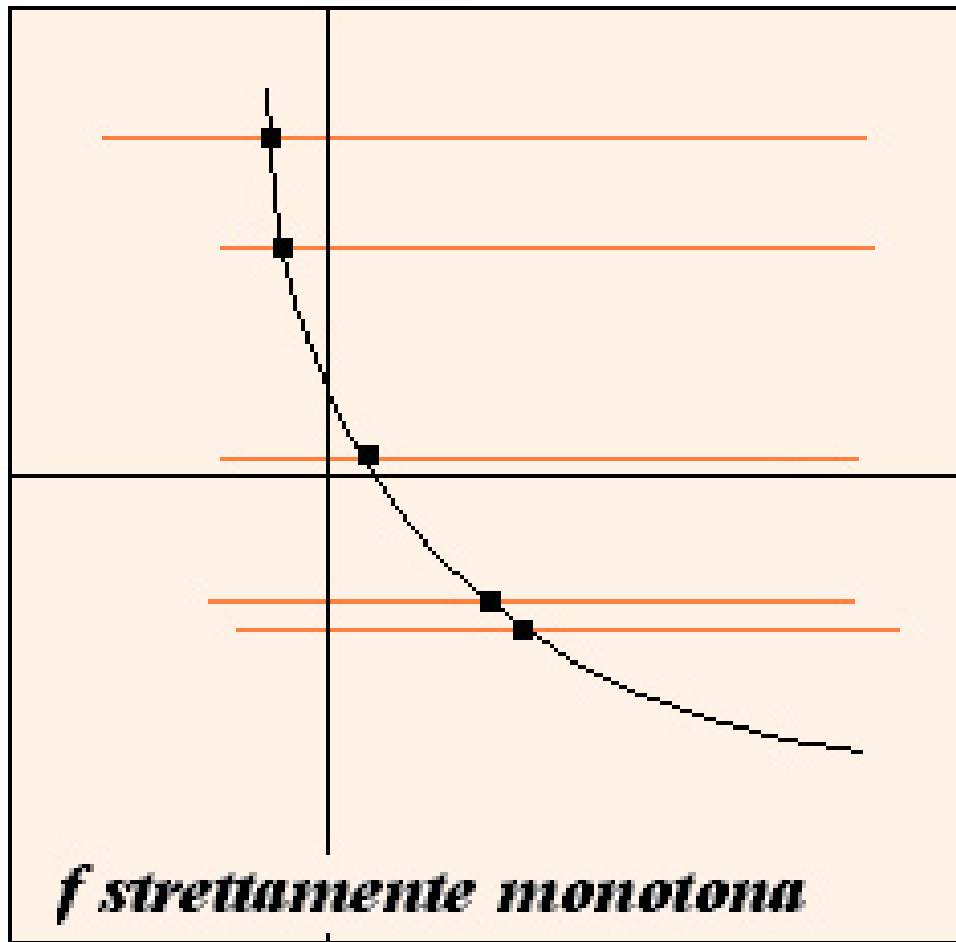
Le funzioni appena definite si dicono

MONOTONE



NB: Le funzioni **STRETTAMENTE MONOTONE**

sono invertibili



Ogni retta
parallela
all'asse
delle x
incontra la
funzione in
un solo
punto

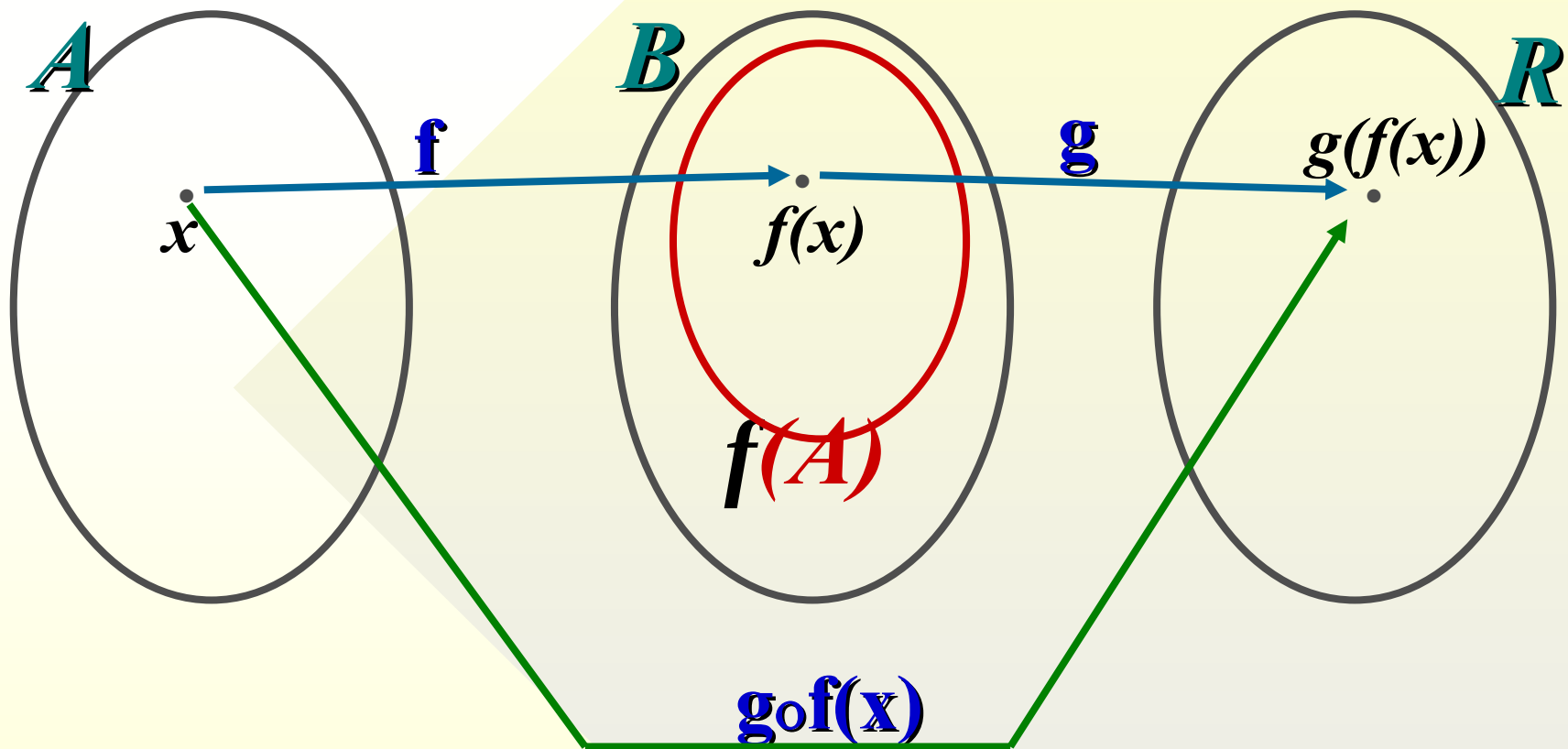
Sia $f:A \rightarrow R$ e $g:B \rightarrow R$

Se $f(A) \subseteq B$ ha senso considerare $\forall x \in A$ la
funzione $h:A \rightarrow R$

definita da

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

detta funzione composta mediante f e g



NB: se $\exists$ $g \circ f$ non è detto che $\exists$ $f \circ g$ poiché se $f(A) \subseteq B$, non è detto che $f(B) \subseteq A$

**Anche nel caso in cui esistono sia $g \circ f$ che $f \circ g$,
in generale $f \circ g \neq g \circ f$**

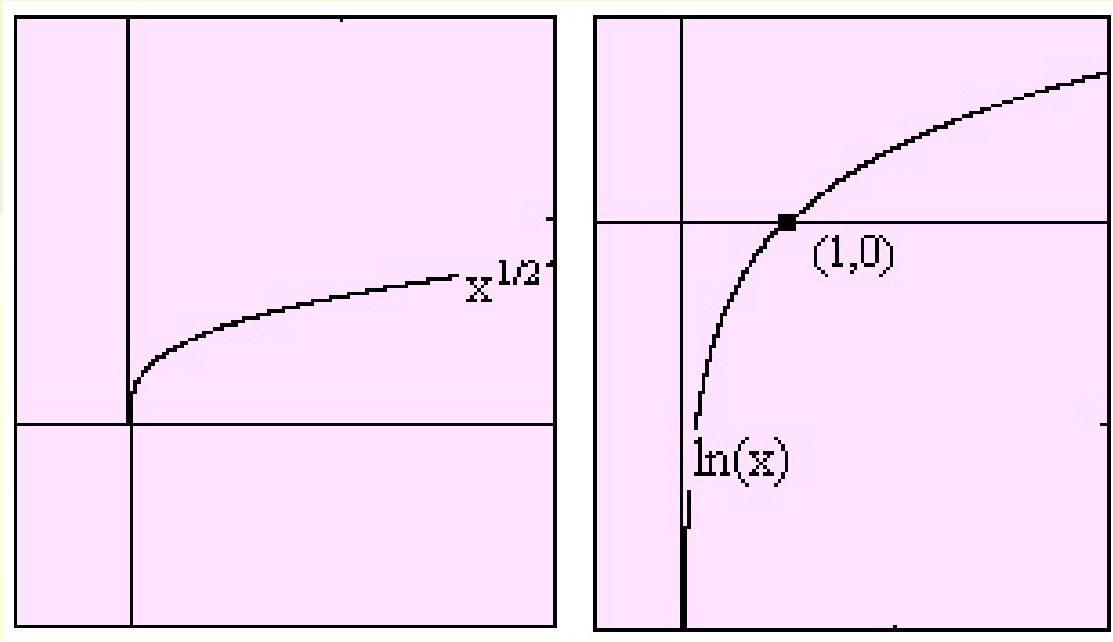
ESEMPIO

$$f : R^+ \rightarrow R$$

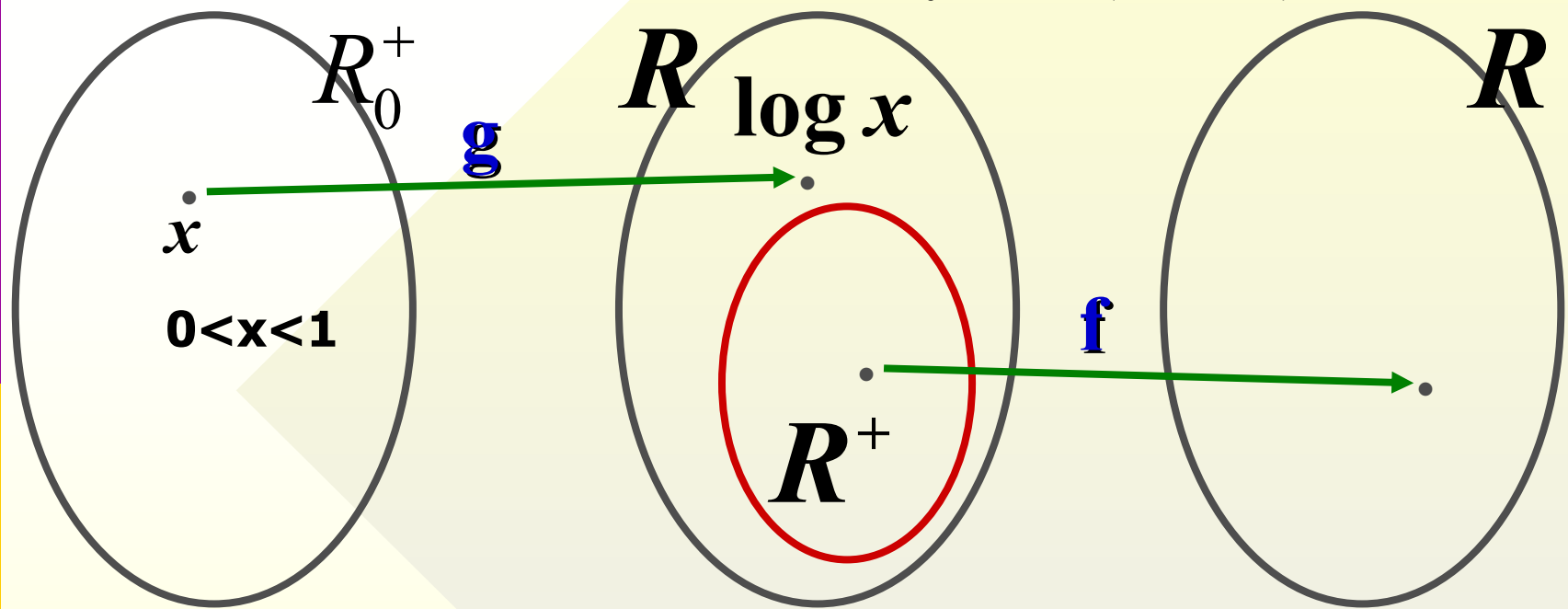
$$g : R_0^+ \rightarrow R$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \log x$$

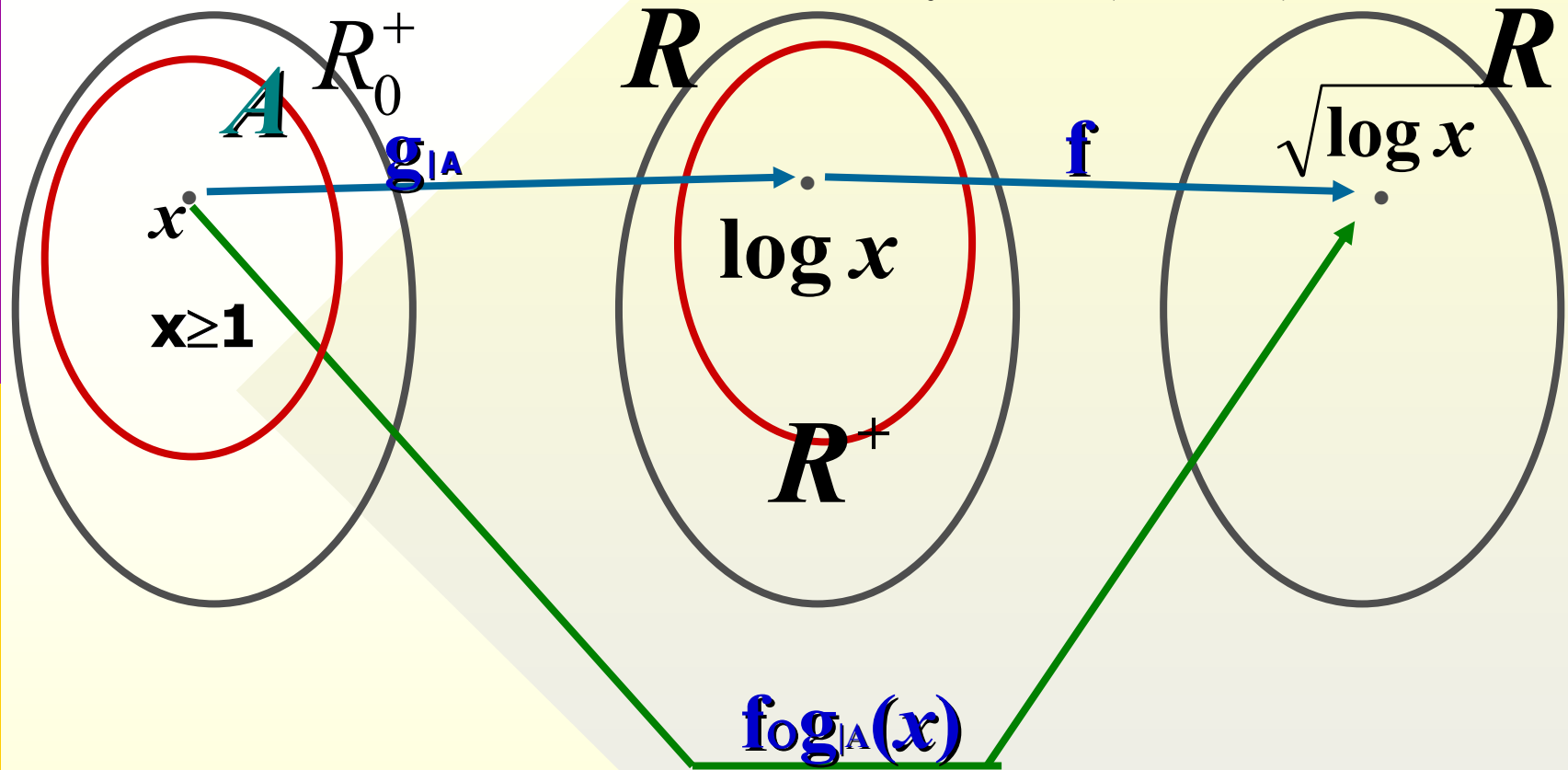


$$\exists f \circ g : R_0^+ \rightarrow R? \quad \text{NO} \quad g(R_0^+) = R \not\subset \text{dom } f$$



$$g(R_0^+) = R \not\subseteq R^+ = \text{dom} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists (f \circ g)(x) : R_0^+ \rightarrow R$$



$$g|_A(A) = R^+ \subseteq R^+ = d \operatorname{om} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists (f \circ g|_A)(x) : A \rightarrow R$$

$$\text{con } (f \circ g|_A)(x) = \sqrt{\log x}$$

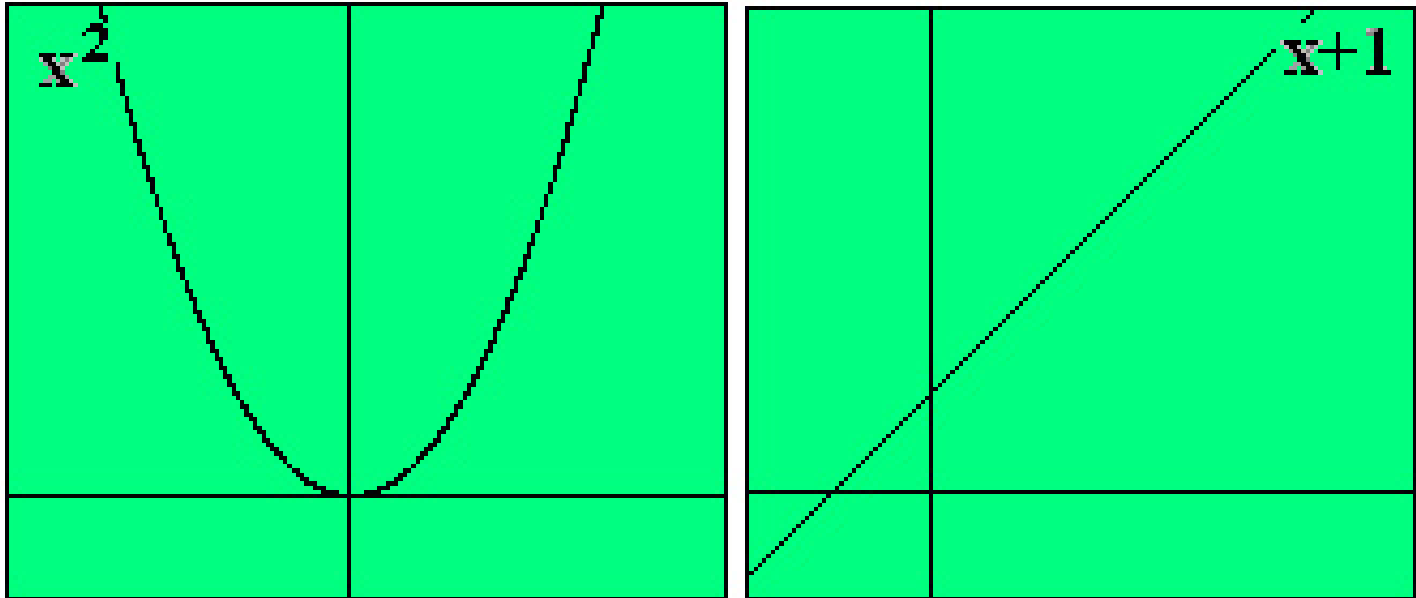
ESEMPIO

$$f : R \rightarrow R$$

$$g : R \rightarrow R$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x + 1$$



$$\exists f \circ g : R \rightarrow R? \quad \text{SI} \quad g(R) = R \subseteq R = \text{dom } f$$

$$\exists g \circ f : R \rightarrow R? \quad \text{SI} \quad f(R) = R^+ \subseteq R = \text{dom } g$$

però

$$f \circ g(x) = (x+1)^2$$

$$x \xrightarrow{g} x+1 \xrightarrow{f} (x+1)^2$$

$$g \circ f(x) = x^2 + 1$$

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2 + 1$$

conclusione

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Alla luce della **definizione di funzione COMPOSTA** avremo:

Se $f : A \rightarrow R$ è iniettiva, la funzione inversa

$f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ è tale che

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad e \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

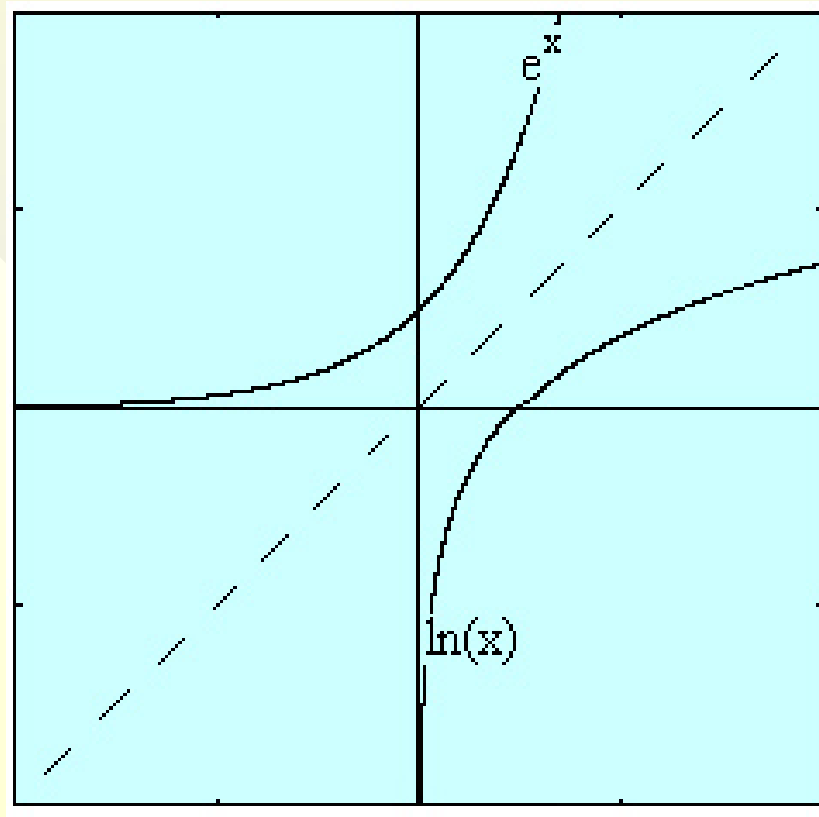
Osservazione

*Il grafico della funzione inversa di una funzione f è il **simmetrico** di quello di f **rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante***

ESEMPIO

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$$

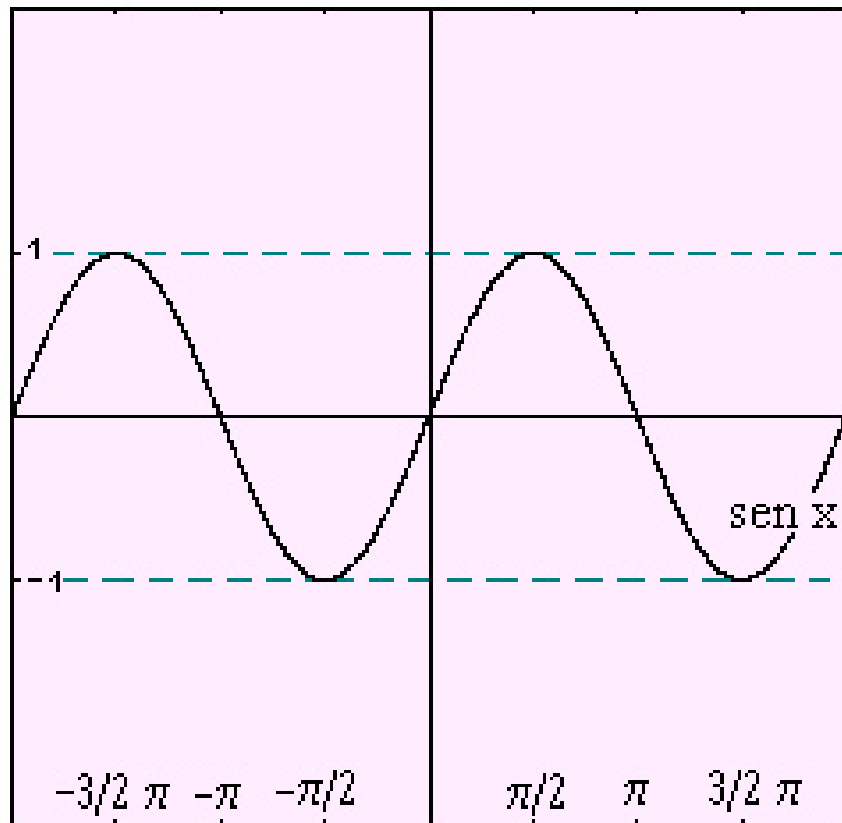
f è iniettiva $\Rightarrow \exists f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^{-1}(y) = \log y$



$$f(f^{-1}(y)) = e^{\log y} = y \quad f^{-1}(f(x)) = \log e^x = x$$

ESEMPIO

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$$

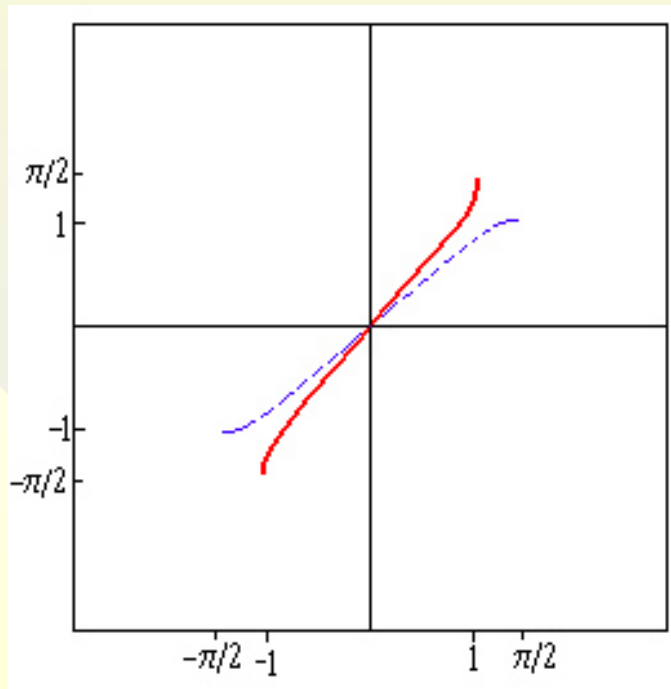


f non è iniettiva $\Rightarrow f$ non è invertibile

però

$$f|_I : I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow R \quad f|_I(x) = \sin x$$

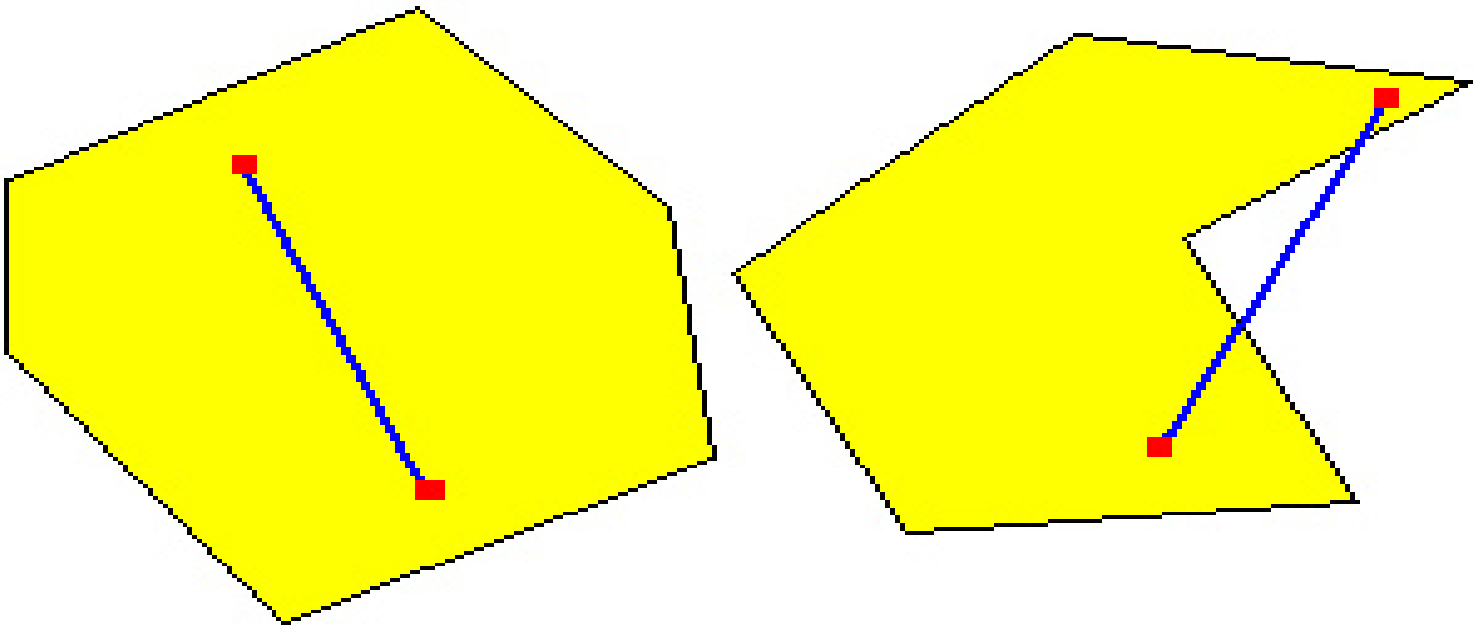
$f|_I$ è iniettiva $\Rightarrow \exists f|_I^{-1} : [-1, 1] \rightarrow R$ e $f|_I^{-1}(y) = \arcsin y$



$$f(f|_I^{-1}(y)) = \sin(\arcsin y) = y$$

$$f|_I^{-1}(f(x)) = \arcsin(\sin x) = x$$

Insiemi CONVESSI



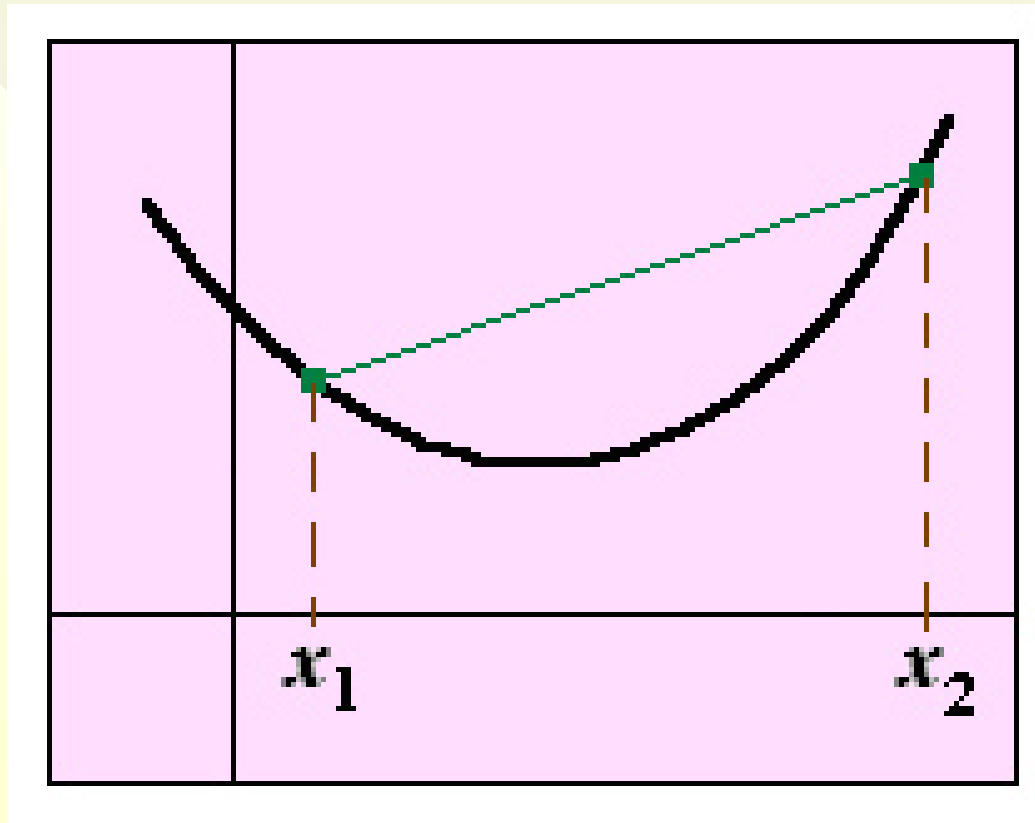
Def. Un insieme nel piano si dice *convesso* se il **segmento che unisce due punti qualsiasi dell'insieme appartiene all'insieme stesso**

Funzioni CONVESSE

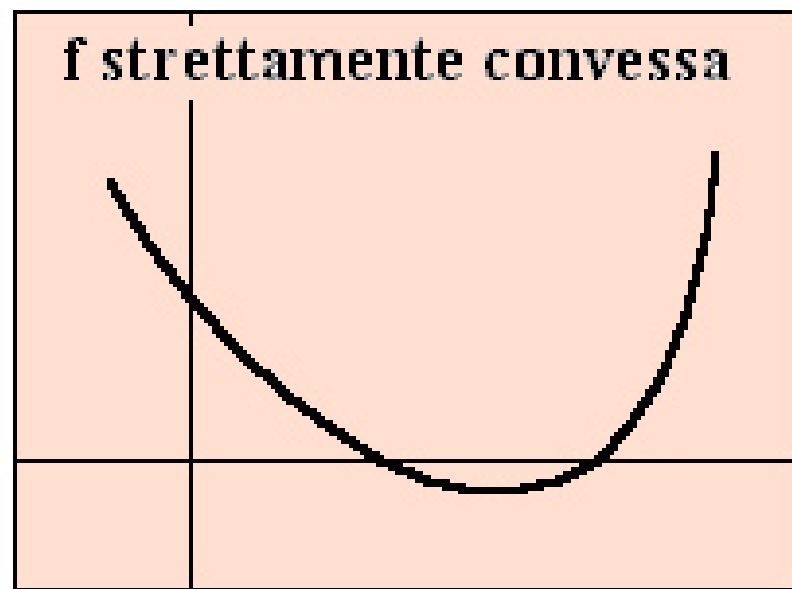
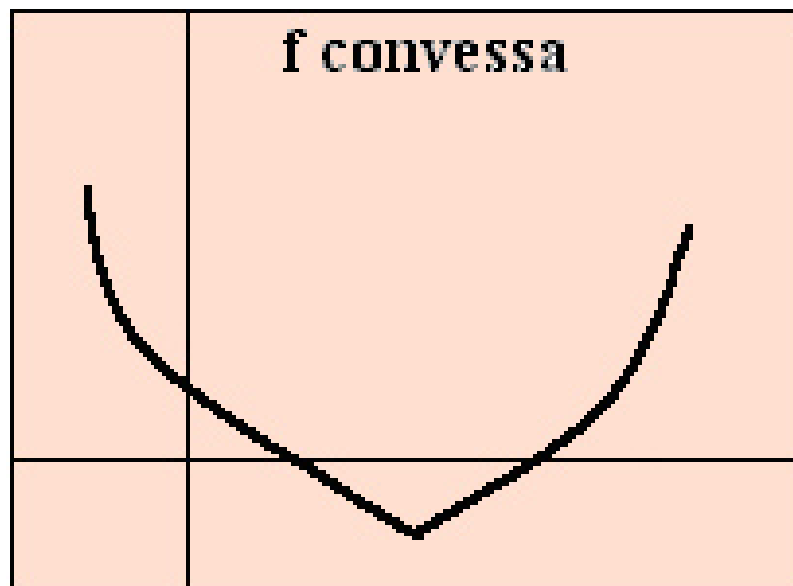
Si chiama **EPIGRAFICO** di una funzione l'insieme dei punti del piano che si trovano al di sopra del grafico stesso

Def. Una funzione f si dice *convessa* se il suo **EPIGRAFICO** è un insieme convesso

Ciò equivale a dire che **il segmento che unisce due punti qualsiasi del grafico di f *non si trova* al di sotto del grafico di f**



Se il grafico di una funzione convessa **non contiene** segmenti rettilinei la funzione si dice **strettamente convessa**, altrimenti **convessa**



f si dice **concava** (strett.) se $-f$ è convessa (strett.)