

Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto x^* si dice

di accumulazione per A

se in ogni suo intorno cade almeno un punto di A diverso da x^* .

Questo equivale a dire che in ogni intorno di x^* cadono infiniti punti di A

NB: Si chiama **INTORNO** di x^* di raggio r , e si indica con $I(x^*, r)$,

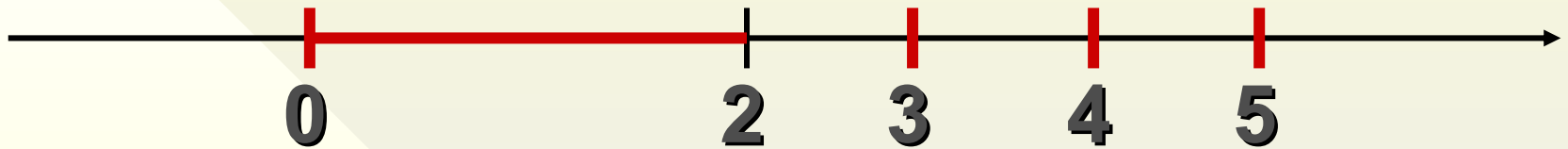
l'intervallo (x^*-r, x^*+r)



Un punto $x \in A$ che *non è di accumulazione per A* si dice
PUNTO ISOLATO

ESEMPIO

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\} \cup \{3, 4, 5\}$$



I **punti di accumulazione** per A
sono quelli appartenenti
all'intervallo **$[0, 2]$**

$\{3, 4, 5\}$ sono **punti isolati**

Sia $f : A \rightarrow R$

Se un punto x^* è di accumulazione per A , ha senso chiedersi *come si comporti la funzione nei punti di A "vicini" ad x^* ma diversi da x^* .*

E' questo comportamento che si studia quando si considera il

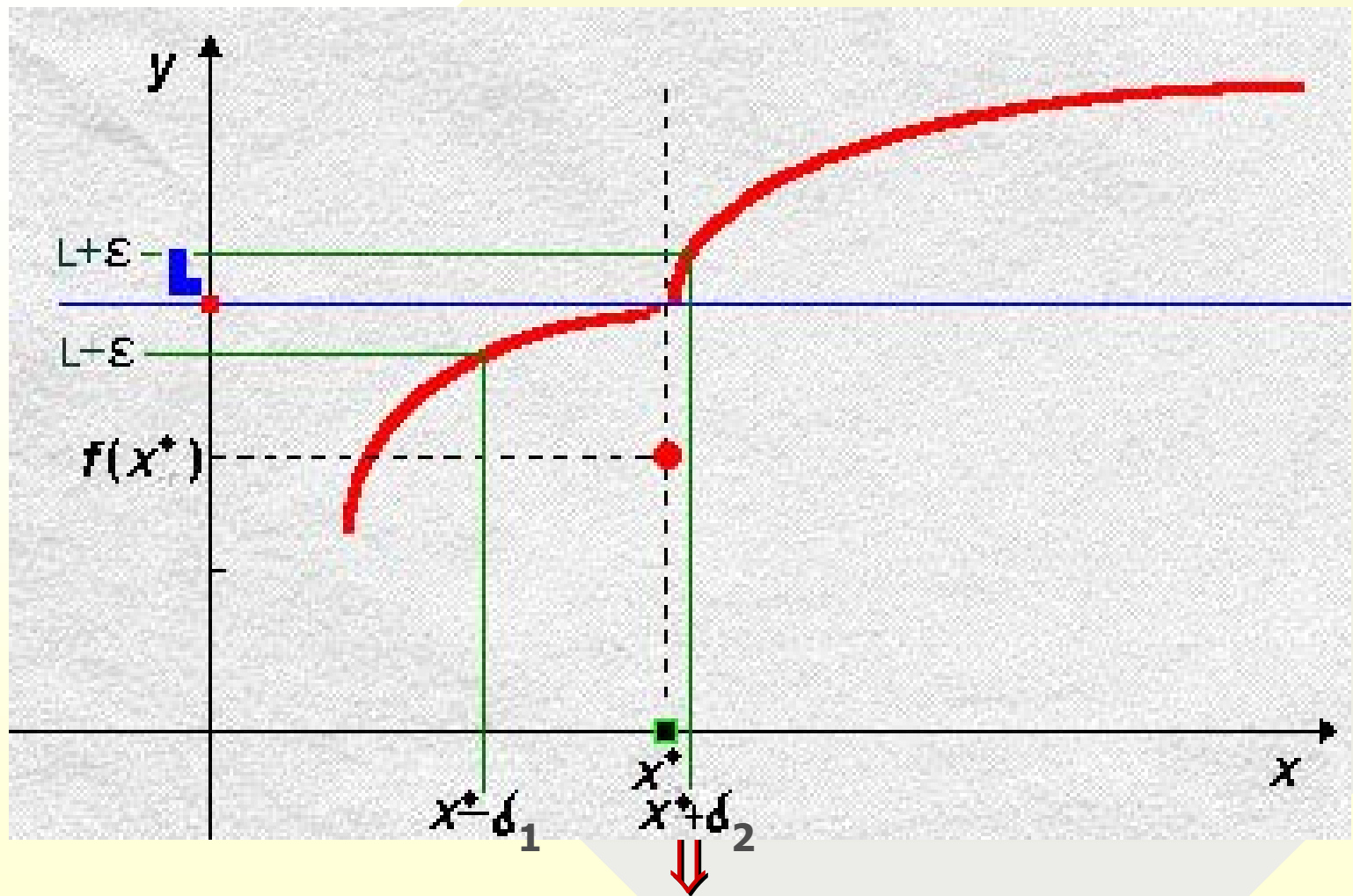
$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)$$

LIMITE FINITO PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x^* un punto d'accumulazione per A . **Diremo che**

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L$$

**se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: se $x \in A$ e $0 < |x - x^*| < \delta$
allora $|f(x) - L| < \varepsilon$**



**nei punti "vicini" ad x^* (ma diversi da x^*)
la funzione assume valori "vicini" ad L**

ESEMPIO

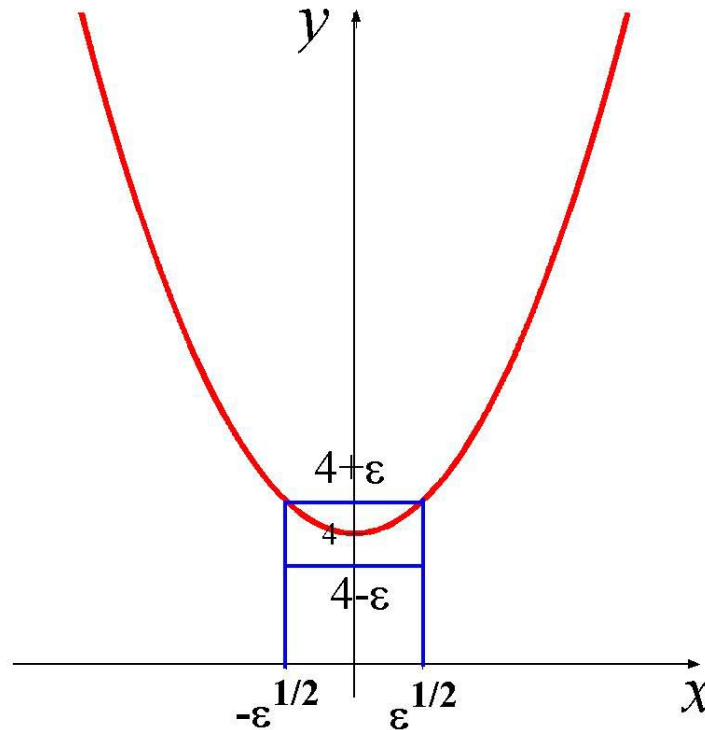
Verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 4 = 4$

Fissato $\varepsilon > 0$, per quali $x \in \mathbb{R}$

$$|x^2 + 4 - 4| < \varepsilon ?$$

$$|x^2 + 4 - 4| = |x^2| < \varepsilon \text{ per } -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$$

... continua



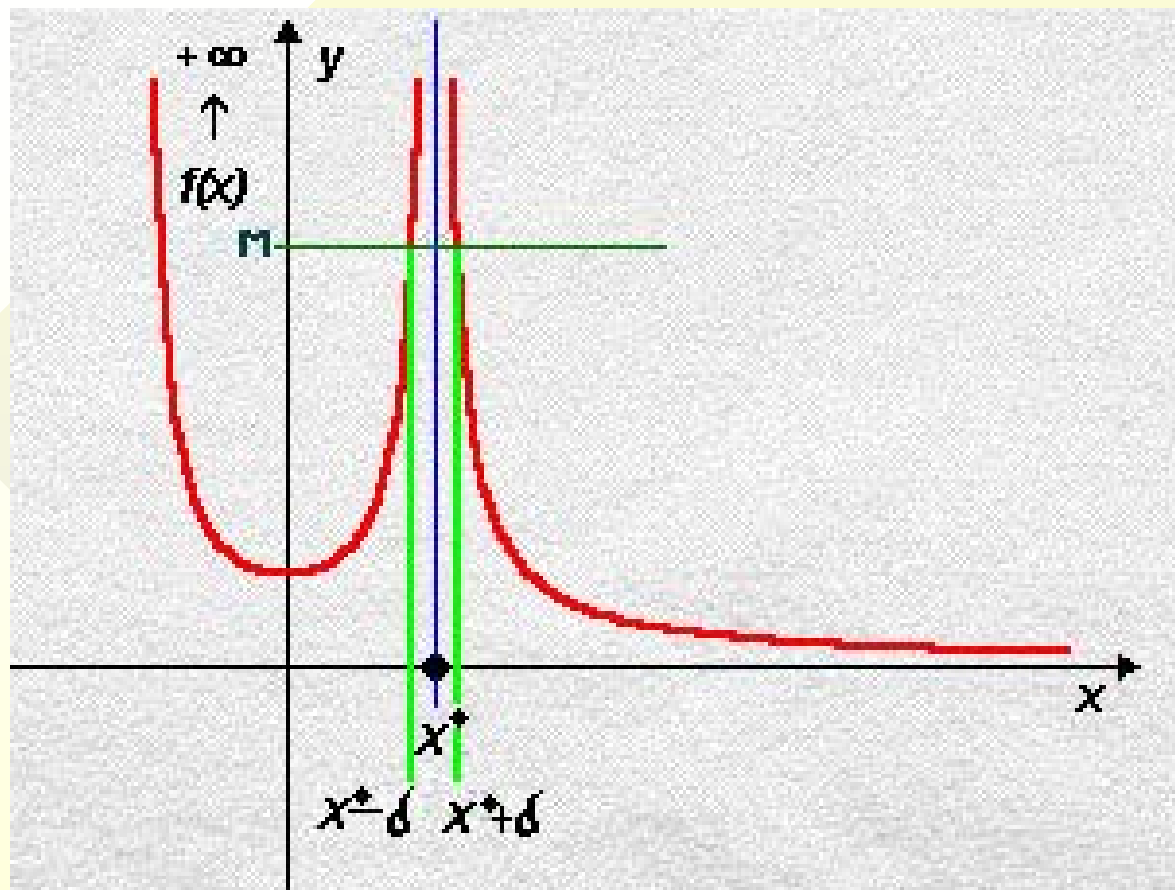
Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists$ un intorno di $x^* = 0$ di raggio $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ tale che per tutti i punti di A che cadono nell'intorno si ha $|(x^2 + 4) - 4| < \varepsilon$

LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x^* un punto d'accumulazione per A . **Diremo che**

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0 \exists \delta > 0$: se $x \in A$ e $0 < |x - x^*| < \delta$ allora $f(x) > M$



nei punti “vicini” ad x^* (ma diversi da x^*) la funzione assume valori “molto grandi”

ESEMPIO

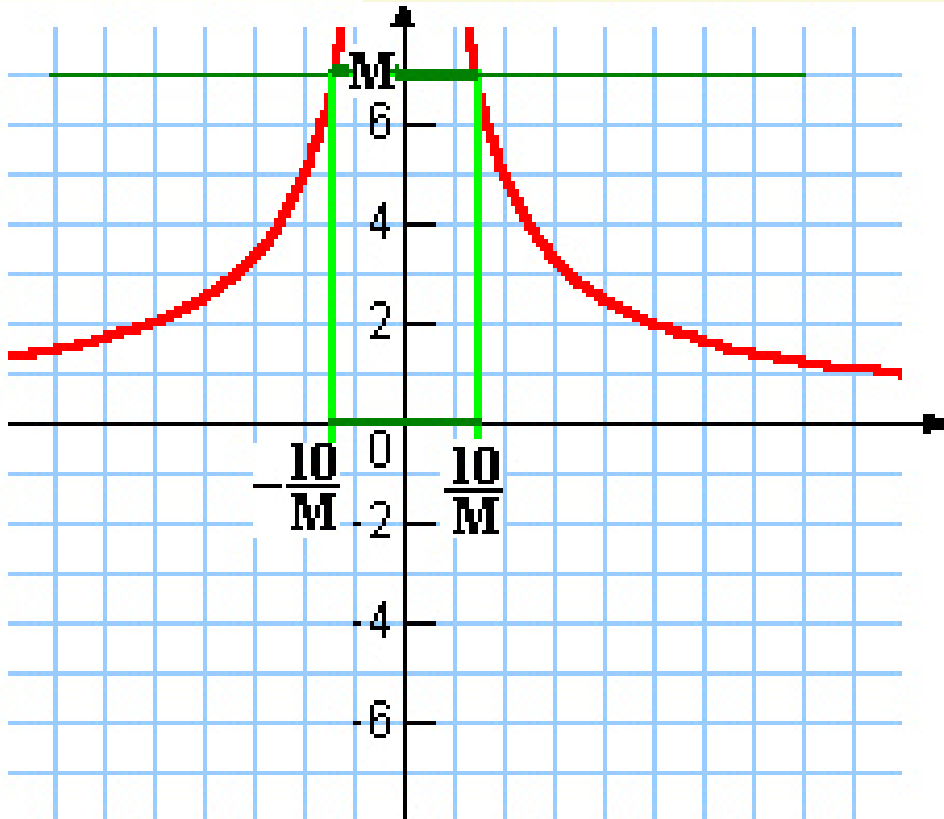
Verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10}{|x|} = +\infty$

Fissato $M > 0$, per quali $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{10}{|x|} > M ?$$

$$\frac{10}{|x|} > M \text{ per } |x| < \frac{10}{M}$$

... continua



Fissato $M > 0$,
 $\exists$ un intorno di
 $x^* = 0$ di raggio
 $\frac{10}{M}$ tale che per
 tutti i punti di A , ad
 esclusione di x^* , che
 cadono nell'intorno

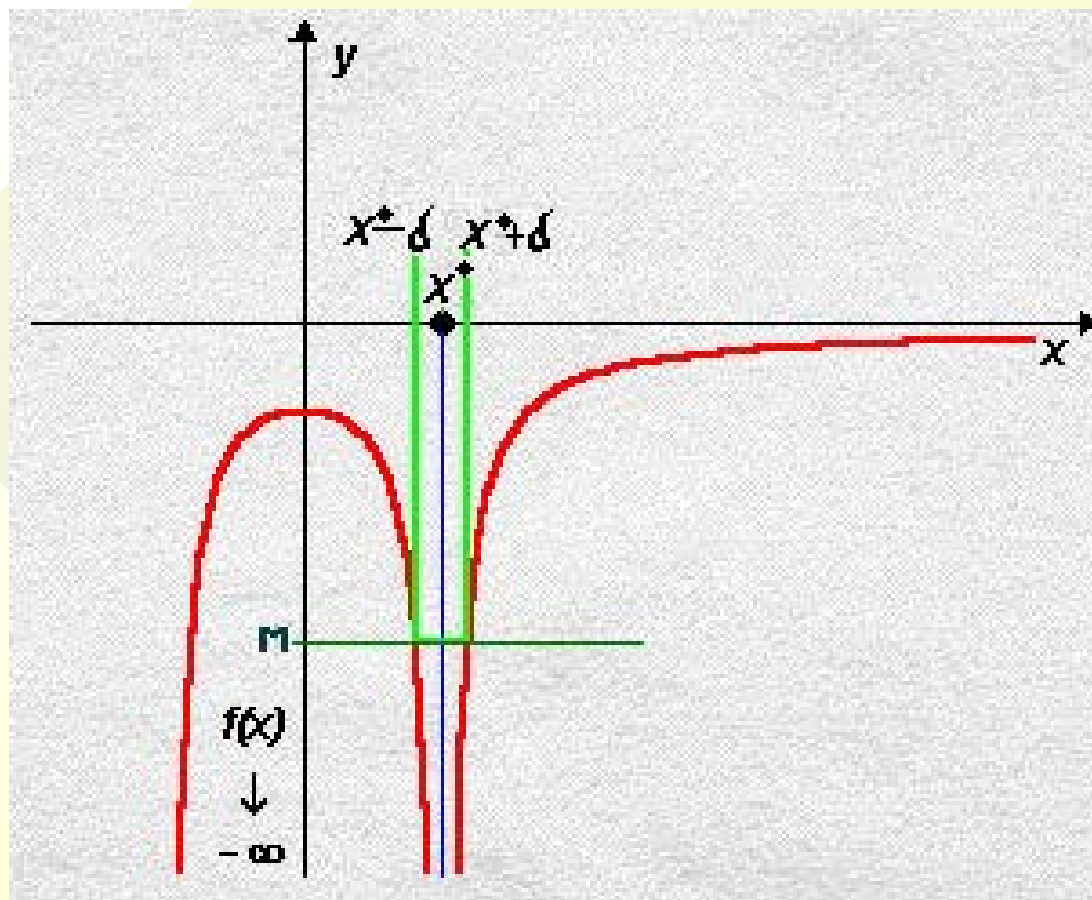
$$\text{si ha } \frac{10}{|x|} > M$$

LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x^* un punto d'accumulazione per A . **Diremo che**

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = -\infty$$

**se $\forall M < 0 \exists \delta > 0$: se $x \in A$ e $0 < |x - x^*| < \delta$
allora $f(x) < M$**



**nei punti “vicini” ad x^* (ma diversi da x^*)
la funzione assume valori “molto piccoli”**

ESEMPIO

Verificare che $\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{(x-1)^2} = -\infty$

Fissato $M < 0$, per quali $x \in \mathbb{R}$ $-\frac{1}{(x-1)^2} < M$?

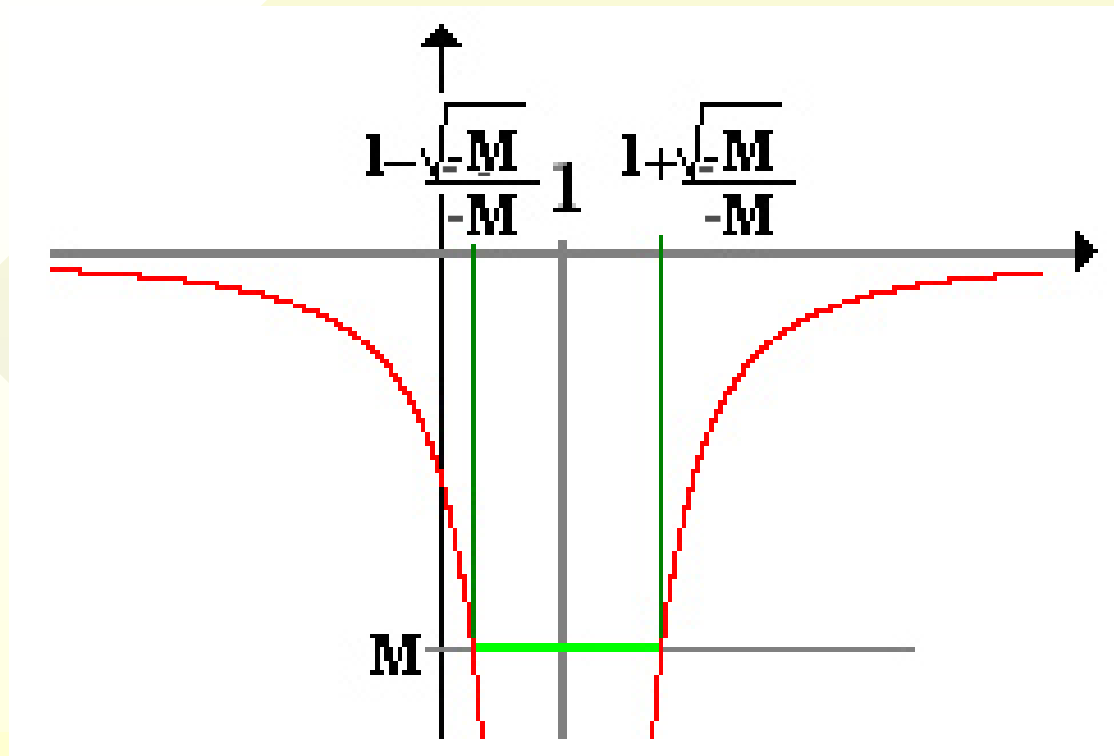
$$\text{Sia } M < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} < M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 < -\frac{1}{M} \Leftrightarrow Mx^2 - 2Mx + M + 1 > 0$$

Poichè $M < 0$ la dis. è soddisfatta per

$$1 - \frac{\sqrt{-M}}{-M} < x < 1 + \frac{\sqrt{-M}}{-M}$$

... continua



Fissato $M < 0$, $\exists$ un intorno di $x^* = 1$ di raggio $-\frac{\sqrt{-M}}{M}$

tale che per tutti i punti di A, ad esclusione di x^* ,

che cadono nell' intorno si ha $-\frac{1}{(x-1)^2} < M$

In questi ultimi due
casi la **retta $x=x^*$** è un
asintoto verticale per
la funzione f

NB: Si chiama **INTORNO destro** **(sinistro)** di x^* di raggio r , e si indica con

$$I^+(x^*, r) \quad (I^-(x^*, r))$$

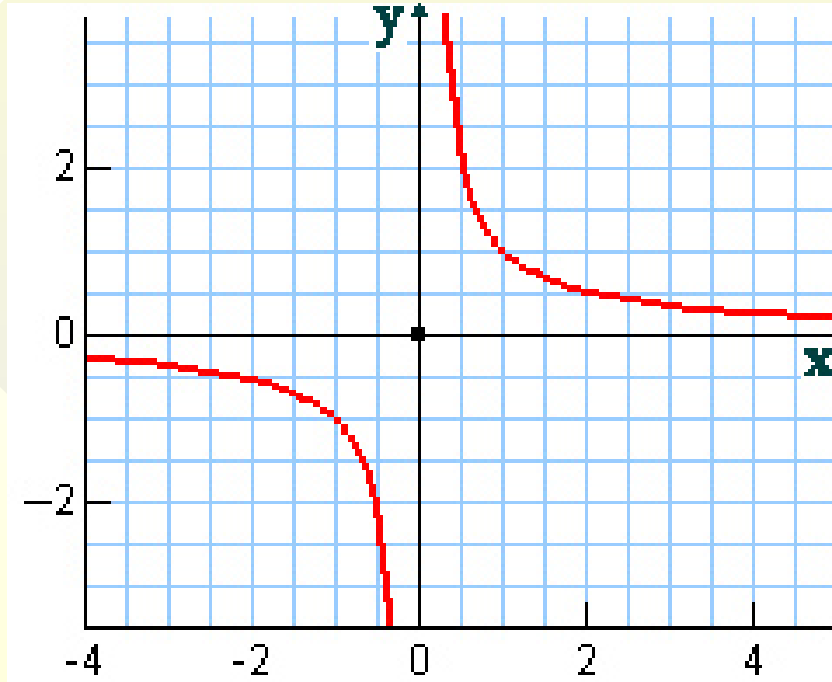
l'intervallo (x^*, x^*+r) $((x^*-r, x^*))$

Se le definizioni di limite date valgono quando al posto dell'intorno di x^* si consideri l'intorno destro o l'intorno sinistro, si parlerà rispettivamente di **limite destro** o di **limite sinistro** della funzione:

$$\lim_{x \rightarrow (x^*)^+} f(x) = \begin{cases} L \\ \pm \infty \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (x^*)^-} f(x) = \begin{cases} L \\ \pm \infty \end{cases}$$

ESEMPIO

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$



Si verifica facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

RISULTATO IMPORTANTE

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x^* un punto d'accumulazione per A .

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow (x^*)^+} f(x) = \begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} = \lim_{x \rightarrow (x^*)^-} f(x) = \begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con A illimitato
superiormente e
inferiormente

possiamo considerare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

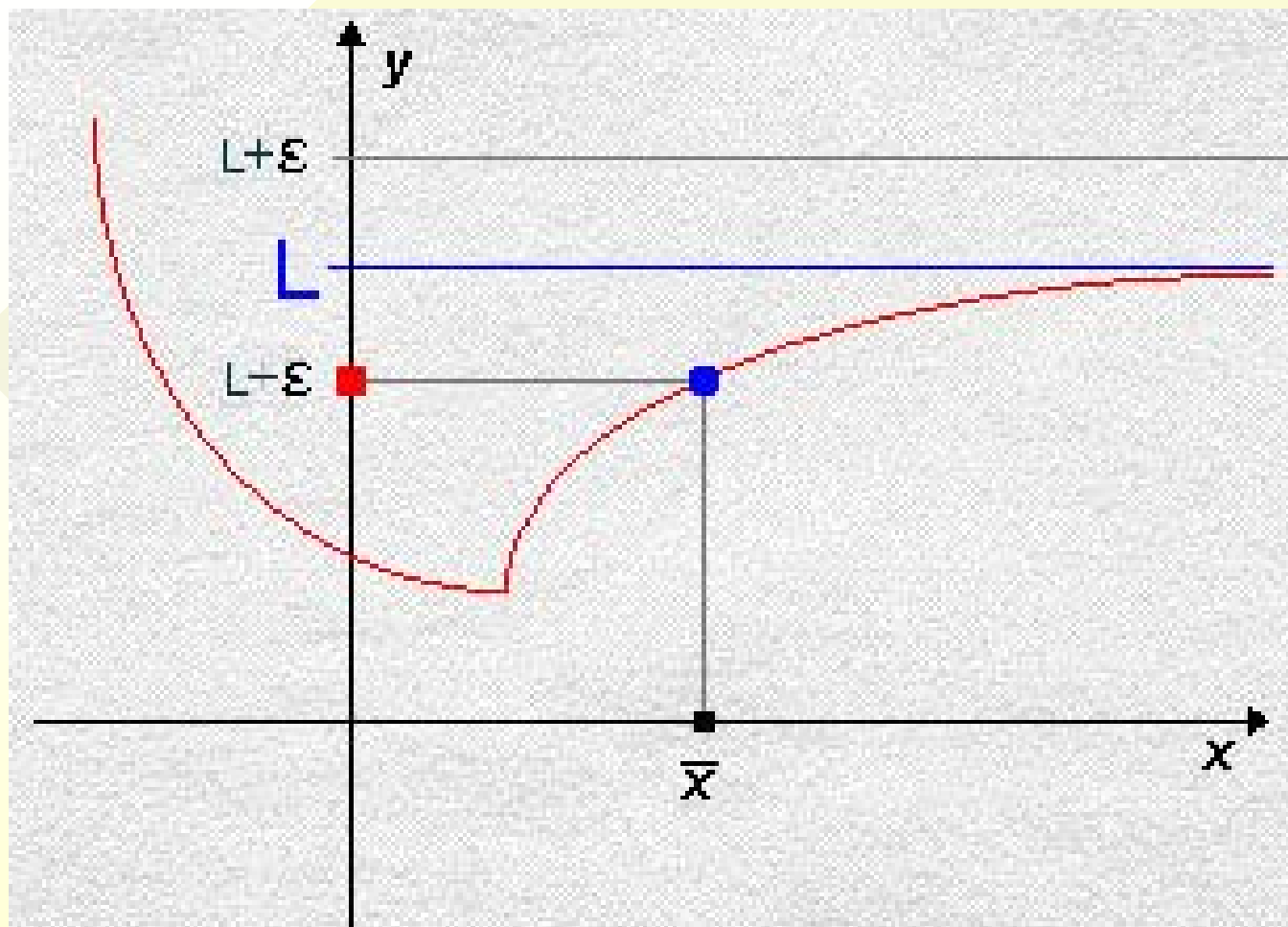
LIMITE FINITO PER x CHE TENDE AD INFINITO

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, con A illimitato superiormente. **Diremo che**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} :$

se $x \in A, x > \bar{x}$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$



In questo caso la **retta $y=L$** è un **asintoto orizzontale destro** per la funzione f

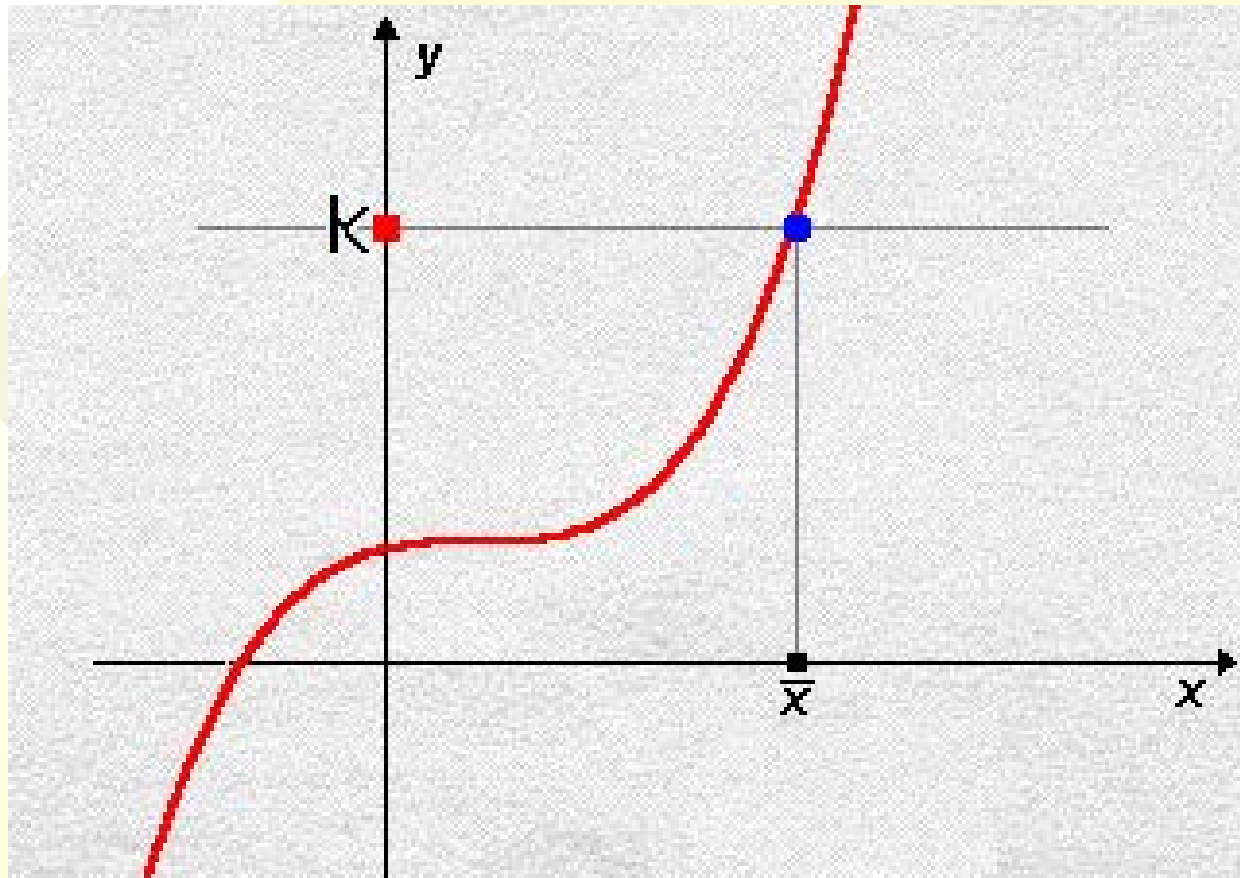
LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE AD INFINITO

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, con A illimitato superiormente. **Diremo che**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se $\forall k > 0 \exists \bar{x} :$

se $x \in A$, $x > \bar{x}$ si ha $f(x) > k$



Per “x grande” la funzione assume valori “molto grandi”

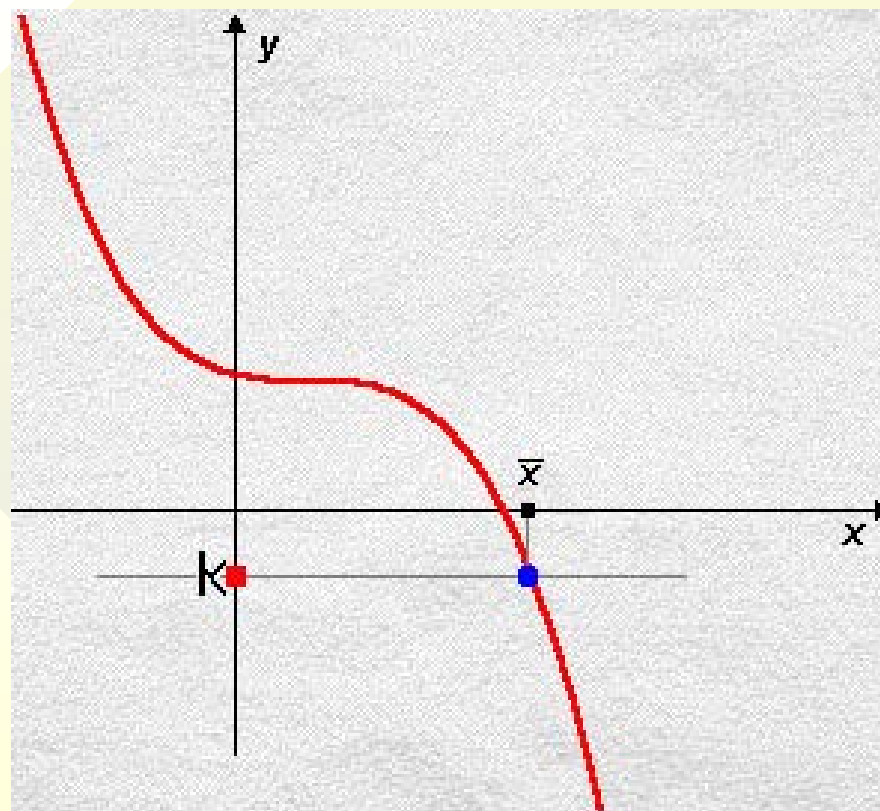
LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE AD INFINITO

Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ con A illimitato superiormente. **Diremo che**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se $\forall k < 0 \exists \bar{x} :$

se $x \in A, x > \bar{x}$ si ha $f(x) < k$



Per “x grandi” la funzione assume valori “molto piccoli”

Provi lo studente a dare la definizione di

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

TEOREMA (di unicità del limite)

Se una funzione $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ **è dotata di limite** in un punto d'accumulazione x^* (o è dotata di limite per $x \rightarrow \pm\infty$)

allora tale limite E' UNICO

Dimostrazione (per assurdo)

Per ipotesi,

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L$$

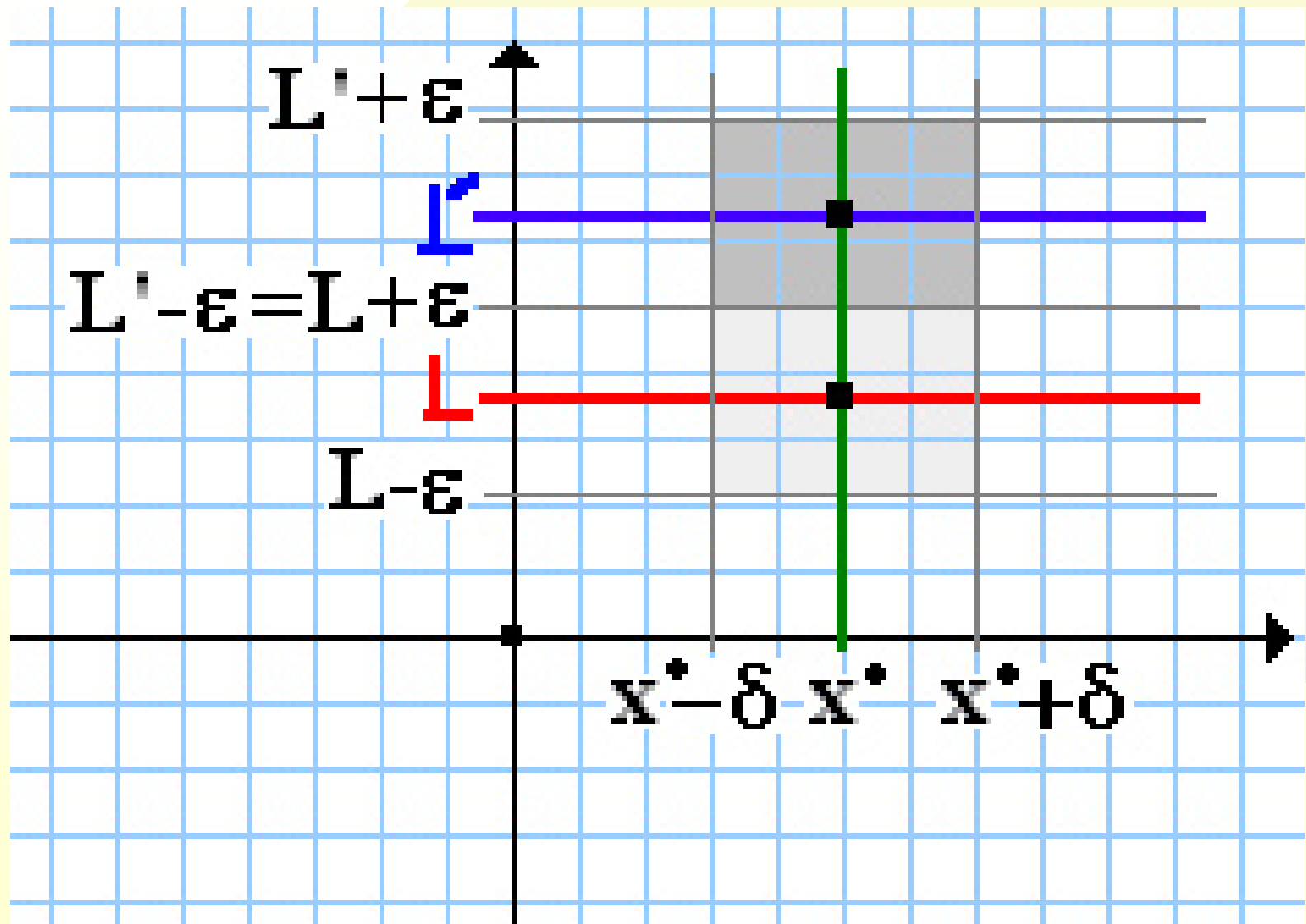
Per assurdo supponiamo che $\exists L'$ **tale che**

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L'. \text{ Prendiamo } \varepsilon = \frac{|L - L'|}{2}.$$

In corrispondenza di questo ε , $\exists$ un intorno $I(x^*, \delta)$: se $x \in I \cap A$ si ha $L' - \varepsilon < f(x) < L' + \varepsilon$.

Ma allora non potrà esistere alcun intorno $I'(x^*, \delta')$ di x^* tale che se $x \in I' \cap A$ allora $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. **In contraddizione con l'ipotesi che**

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L$$



TEOREMA (della permanenza del segno)

- Sia $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ e x^* di accumulazione per A .
- Sia inoltre $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L > 0 \quad (< 0)$



$\exists I(x^*, \delta) : \forall x \in I \cap A - \{x^*\}$
 si ha $f(x) > 0 \quad (< 0)$

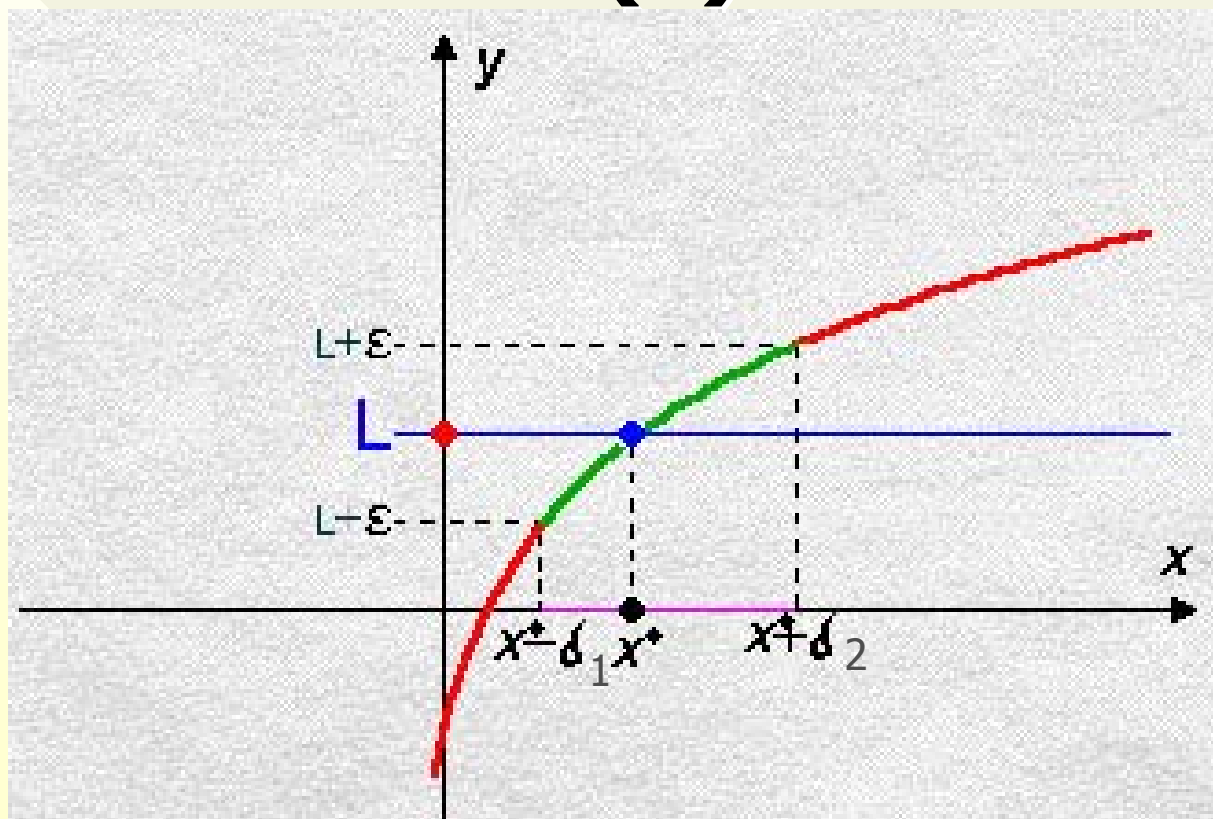
Dimostrazione

Fissato $\varepsilon < L \Rightarrow 0 < L - \varepsilon < L + \varepsilon$.

In corrispondenza dell' ε scelto, $\exists$

$\delta > 0$: se $x \in I \cap A - \{x^*\}$ allora

$$0 < L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$



TEOREMA DEL CONFRONTO

Corso di Matematica Generale - Facoltà di Economia - Università degli Studi di Macerata (Mammiana Michetti)

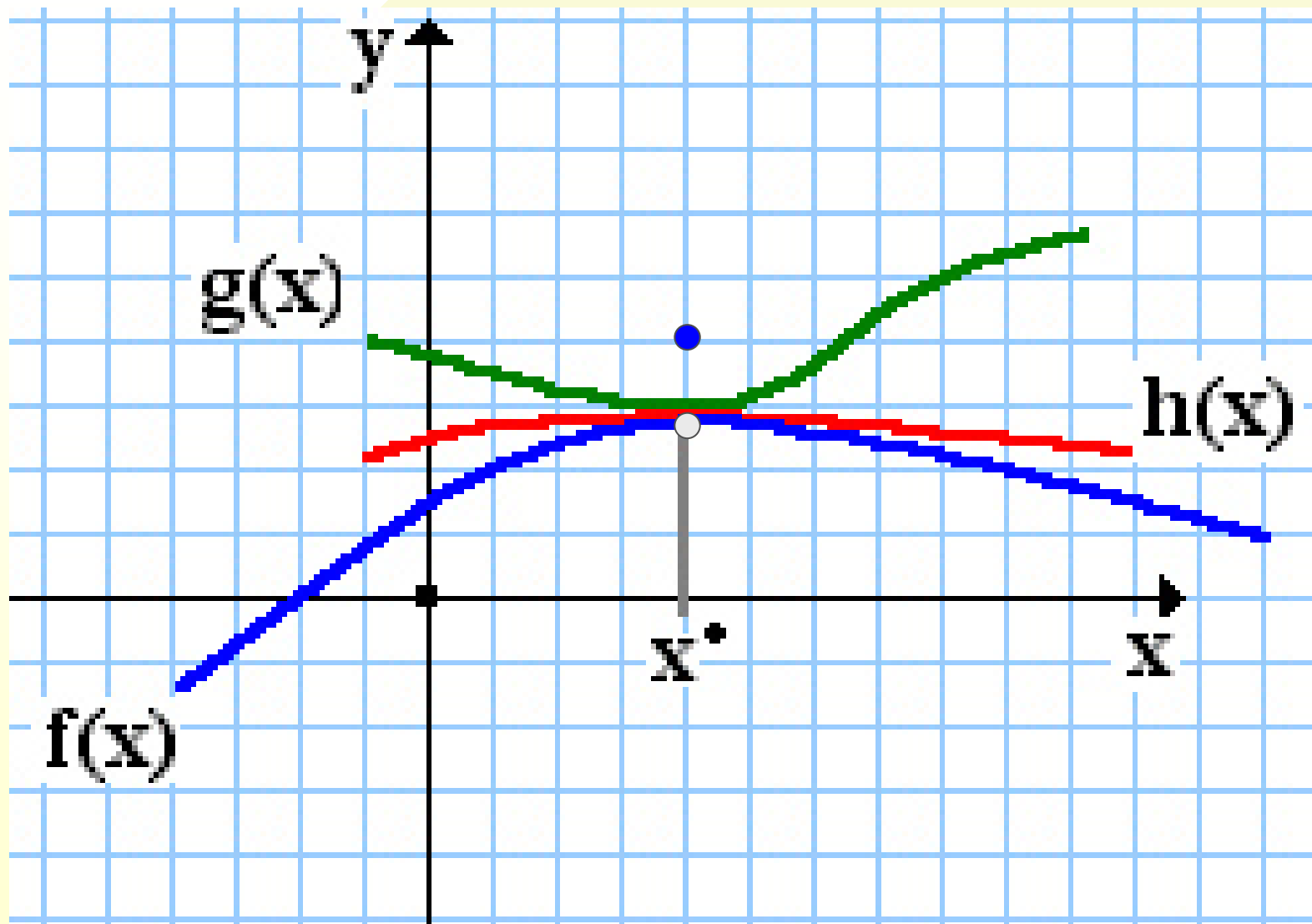
(dei due carabinieri)

- Siano $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ e x^* di accumulazione per A .
- Sia inoltre $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in un intorno di x^* ad esclusione di x^*

Se $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^*} g(x) = L$



$$\lim_{x \rightarrow x^*} h(x) = L$$



Proprietà dei limiti rispetto alle operazioni aritmetiche sulle funzioni

Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ e x^* di accumulazione per A , $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L'$ e $\lim_{x \rightarrow x^*} g(x) = L''$



$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} (f(x) \pm g(x)) = L' \pm L''$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} (f(x) \cdot g(x)) = L' \cdot L''$$

$$3) \quad \text{Se } L'' \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \left(\frac{L'}{L''} \right)$$

N.B. tali proprietà valgono anche nel caso di limite per x che tende a $\pm\infty$

In base a definizione si verifica facilmente che:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} c = c \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} x = x^* \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \sin x = \sin x^*$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \cos x = \cos x^*$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \log x = \log x^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

$$\text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow x^*} e^x = e^{x^*}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Utilizzando le proprietà viste si possono ricavare facilmente i limiti di altre funzioni, per esempio:

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} (\log x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} \log x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \log 2 + 3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} 5 \sin x = \lim_{x \rightarrow 1} 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin x = 5 \sin 1$$

In generale se $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} kf(x) = kL$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \cdot 3 = 9$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x}{2x^3 - x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} e^x}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} x^2} = \frac{e}{2 - 1} = e$$

Corso di Matematica Generale - Facoltà di Economia - Università degli Studi di Macerata (Mammana Michetti)

Proprietà dei limiti rispetto alle operazioni

aritmetiche sulle funzioni nel caso di limiti infiniti

$$1) \quad \pm \infty \pm L = \pm \infty$$

$$2) \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$3) \quad \pm \infty \cdot L = \begin{cases} \pm \infty & \text{se } L > 0 \\ \mp \infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

$$4) \quad (\pm \infty) \cdot (+\infty) = \pm \infty; \quad (\pm \infty) \cdot (-\infty) = \mp \infty$$

$$5) \quad \frac{1}{\pm \infty} = 0$$

$$6) \quad \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Sono **FORME INDETERMINATE**

$$+\infty - \infty$$

$$\infty$$

$$-$$

$$\infty$$

$$0$$

$$-$$

$$0$$

$$\infty$$

$$\cdot$$

$$0$$

Utilizzando le proprietà viste si possono ricavare molti altri limiti, per esempio:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot x \cdot x = (-\infty) \cdot (-\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ non esiste perché } \frac{1}{x} \begin{cases} > 0 \text{ per } x > 0 \\ < 0 \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

$$5) \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ?$$

E' una forma indeterminata del tipo 0/0

Si può vedere che per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

si ha $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ e quindi,

per il Teorema "dei due carabinieri"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**LIMITE
NOTEVOLE**

Per poter ampliare la classe delle funzioni per le quali si riesce a calcolare il limite, utilizzando limiti noti, è molto utile il

TEOREMA sul **limite di funzioni composte**

Sia $\lim_{t \rightarrow t^*} g(t) = x^*$ e $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = L$
 allora

$$\lim_{t \rightarrow t^*} f(g(t)) = L \Leftrightarrow$$

$$1) \quad g(t) \neq x^* \quad (\text{se } L = \pm\infty)$$

$$2) \quad \begin{cases} g(t) \neq x^* & o \\ L = f(x^*) \end{cases} \quad (\text{se } L \text{ è finito})$$

ESEMPIO

1) Calcolare

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin \left(\cos t - e^t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\cos t - e^t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \sin \left(\cos t - e^t + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

ESEMPIO

2) Calcolare

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sin 9(t - 2)}{t - 2}$$

$$\frac{\sin 9(t - 2)}{t - 2} = 9 \frac{\sin 9(t - 2)}{9(t - 2)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} 9(t - 2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} 9 \frac{\sin x}{x} = 9 \cdot 1 = 9$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sin 9(t - 2)}{t - 2} = 9$$

ESEMPIO

3) Utilizzando il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (e \text{ è un num. irrazionale})$$

compreso fra 2 e 3)

calcolare

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tgt} t} \right)^{\operatorname{tgt} t}$$

... continua

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} t = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)^{\operatorname{tg} x} = e$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} t = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)^{\operatorname{tg} x} = e$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tgt}} \right)^{\operatorname{tgt}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)^{g(x)} \quad ?$$

$$\log f(x)^{g(x)} = g(x) \log f(x) \Rightarrow$$

$$e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \log f(x)} \Rightarrow$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x^*} [g(x) \log f(x)]}$$

NB: se $g(x)\log f(x)$ dà origine ad una forma indeterminata $(0 \cdot \infty)$ quando $x \rightarrow x^*$, allora

$f(x)^{g(x)}$ è una forma ind. per $x \rightarrow x^*$

$$\begin{array}{l} g(x) \rightarrow 0 \\ f(x) \rightarrow 0 \end{array} \Rightarrow 0 \cdot \infty \Rightarrow 0^0 \quad \text{f.i.}$$

$$\begin{array}{l} g(x) \rightarrow 0 \\ f(x) \rightarrow +\infty \end{array} \Rightarrow 0 \cdot \infty \Rightarrow \infty^0 \quad \text{f.i.}$$

$$\begin{array}{l} g(x) \rightarrow \infty \\ f(x) \rightarrow 1 \end{array} \Rightarrow \infty \cdot 0 \Rightarrow 1^\infty \quad \text{f.i.}$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x \log x} = \\ & = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [\log x]^2} = +\infty \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x} \quad \text{f.i. } 1^{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \log(1 + \cos x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \log(1 + \cos x) \frac{1}{\cos x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \log\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x}}\right) \frac{1}{\cos x}}$$

$$= e$$