

SERIE

Data la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che significato possiamo dare alla

“somma di infiniti termini”

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ ovvero } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ?$$

Di primo acchitto si potrebbe pensare che ad una “somma di infiniti termini” non si possa associare come “risultato” un valore finito ma ...

Consideriamo il numero periodico $\frac{1}{3} = 0,333\dots$
non può forse pensarsi scritto come

$$\frac{1}{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots \quad ?$$

Data la **successione** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ chiamiamo
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **serie associata**
alla **successione** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Chiamiamo inoltre **successione delle somme parziali** la **successione** $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

definita da:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

...

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n$$

Diremo che la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è
**convergente, divergente o
indeterminata**

se la **successione** $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è
rispettivamente **convergente,
divergente o indeterminata.**

Nel caso in cui $s_n \rightarrow S$,
S si dirà SOMMA DELLA SERIE

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ **SERIE GEOMETRICA** di ragione q

Per $q \neq 1$ $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Per $q = 1$ $s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ (n volte)

$\Rightarrow$ per $q = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge

Per $|q| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la serie **CONVERGE** ed ha somma $S = \frac{1}{1 - q}$

Per $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = +\infty \Rightarrow$ la serie **DIVERGE**

Per $q \leq -1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} \nexists \Rightarrow$ la serie è **INDETERMINATA**

Data la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

se la serie **converge** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

NB: questa condizione è **solo necessaria** ma non è sufficiente per la **convergenza** di una serie

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **SERIE ARMONICA**

Si può dimostrare che **questa serie diverge** eppure **il suo termine generale** $a_n = \frac{1}{n}$ **tende a zero.**

Si chiama **serie armonica generalizzata** la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

*** se $\alpha > 1$, converge**

*** se $\alpha \leq 1$, diverge**

NB: La **condizione necessaria** non permette di concludere sulla convergenza della serie ma **permette di escludere la convergenza** quando il termine generale non tende a zero

Esempio 3

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n-1}$ **NON CONVERGE**

in quanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n-1} = 1 \neq 0$

Criteri di convergenza per le **SERIE A TERMINI POSITIVI**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n \geq 0$ si chiama **serie a termini positivi**

Le **serie a termini positivi** sono **convergenti o divergenti**, non possono essere indeterminate.

Infatti: $S_n = S_{n-1} + a_n$ con $a_n \geq 0$

è una **successione monotona crescente** e pertanto dotata di limite finito o infinito

CRITERIO DEL CONFRONTO

Date due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con

a_n e $b_n \geq 0$ e $a_n \leq b_n$ allora:

1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Dimostrazione

$$1) \quad \delta_n \rightarrow \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{e} \quad s_n \rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \quad s_n \leq \delta_n$$

δ_n **converge** $\Rightarrow \delta_n$ **limitata**



$$s_n \leq \delta_n \leq M$$

s_n **monotona crescente**



s_n **converge**

2) Supponiamo per assurdo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente}$$



Poiché $a_n \leq b_n$, per 1)



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge contro le ipotesi}$$

Esempio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$$

Serie a termini positivi per la quale è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza: $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} = 0$

POTREBBE CONVERGERE

$$0 < \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Esempio 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{1}{n}$$

$$0 < \text{sen} \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \Rightarrow$$

nulla ci dice il criterio del confronto per $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{1}{n}$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Date due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$

1) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

le due serie hanno lo stesso carattere

2) Se $\sum_n b_n$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge

3) Se $\sum_n b_n$ diverge e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

Dimostrazione

$$1) \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ def. } l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{scelto } \varepsilon: l - \varepsilon > 0 \Rightarrow (l - \varepsilon)b_n < a_n < (l + \varepsilon)b_n$$

Applicando il criterio del confronto $\Rightarrow$ tesi

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ def. } -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < +\varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n$$

Applicando il criterio del confronto $\Rightarrow$ tesi

$$3) \quad \forall k > 0 \text{ def. } \frac{a_n}{b_n} > k \Rightarrow a_n > kb_n$$

Applicando il criterio del confronto $\Rightarrow$ tesi

Esempio 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \text{ e } \sum_n \frac{1}{n}$$

hanno lo stesso carattere



$$\sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

CRITERIO DELLA RADICE

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

$L \left\{ \begin{array}{l} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ = 1 \Rightarrow \text{nulla si può dire a priori} \end{array} \right.$

Esempio 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n}{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ **la serie converge**

CRITERIO DEL RAPPORTO

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

$L \left\{ \begin{array}{l} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \\ = 1 \Rightarrow \text{nulla si può dire a priori} \end{array} \right.$

Esempio 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! e^n}{e^{n+1} n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot e^n}{e \cdot e^n \cdot n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e} = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

Esempio 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ **la serie converge**

Questa serie si chiama **serie esponenziale** e la sua **somma** è

$$S = e^x$$

Criteri di convergenza per le **SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI**

CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **converge** $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**

NB : Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **diverge**, nulla si può dire

a priori per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Esempio 10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

**Ma la serie data, come vedremo
successivamente, è una serie
convergente.**

Esempio 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x < 0$

Questa serie ha i **termini di segno alterno**.

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$

converge ad $e^{|x|}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge**

Criteri di convergenza per le **SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO**

CRITERIO DEI LEIBNIZ

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ con $u_n \geq 0$

1) Se $u_{n+1} \leq u_n$ definitivamente

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$\Rightarrow$ la serie converge

Esempio 12 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

1) $\frac{1}{\log(n+1)} \leq \frac{1}{\log n}$ perchè $\log(n+1) > \log n$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$

$\Rightarrow$ **la serie converge**

Vediamo se la serie è assolutamente convergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\log n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = +\infty$$

Poichè $\sum \frac{1}{n}$ **diverge** $\Rightarrow \sum \frac{1}{\log n}$ **diverge**

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ **è convergente**

ma non assolutamente convergente