

Massimi e Minimi **vincolati**

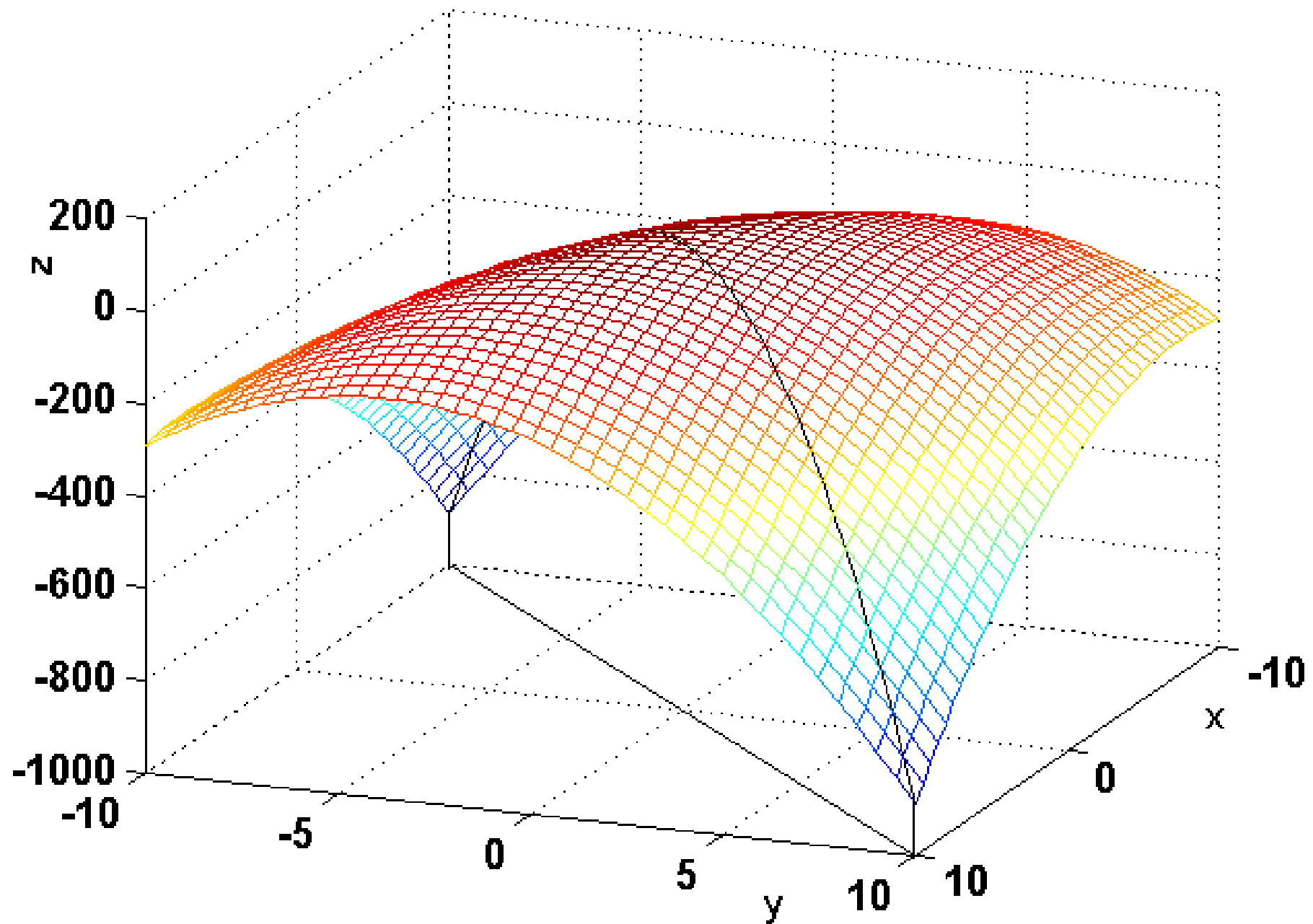
Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \underline{x}_0 \in A$

Si può avere la **necessità** di
determinare i **MAX** e i **MIN** relativi di
 f **NON SU TUTTO A** ma su una
porzione di A , individuata da
un'equazione $g(x,y)=0$
detta **equazione del VINCOLO**



problema di **MASSIMI** e **MINIMI**
VINCOLATI

Problema di max di $f(x,y)$ con vincolo $y-x=0$



Definizione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = 0$$

equazione del vincolo con g definita su A

Sia $H = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$

Il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in H$ si dirà di
MASSIMO (MINIMO) VINCOLATO
 per f se

$$\exists I(P_0, r) :$$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I(P_0, r) \cap H$$

$$(f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I(P_0, r) \cap H)$$

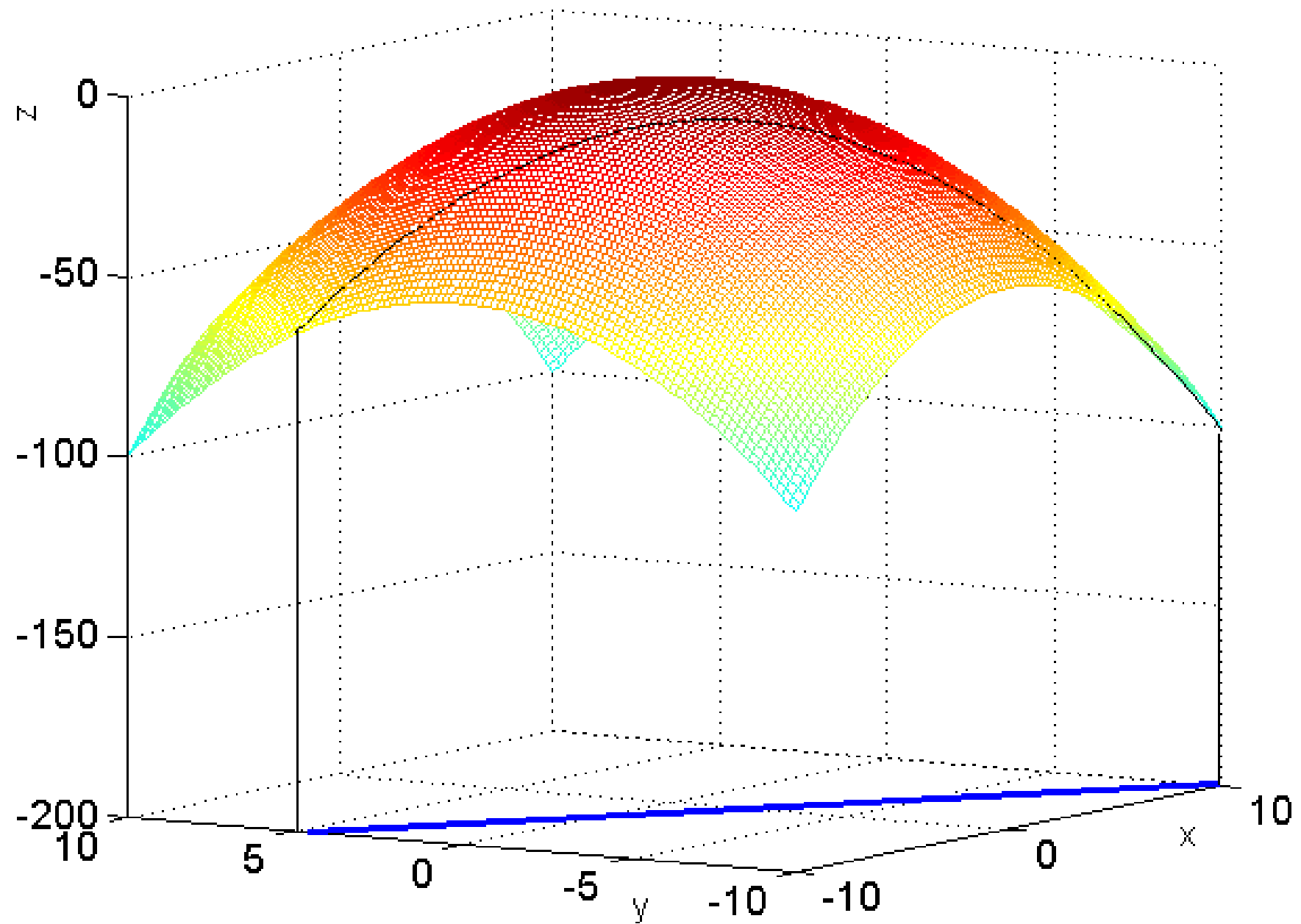
In generale i punti di *massimo e di minimo vincolati* **NON COINCIDONO** con i massimi e minimi liberi

O meglio:

se P_0 soddisfa l'equazione del vincolo,

- P_0 p.to di max o min libero $\Rightarrow P_0$ p.to di max o min vincolato
- P_0 p.to di max o min libero $\nRightarrow P_0$ p.to di max o min vincolato

$f(x,y)$ con vincolo $y=-x-5$



Definizione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = 0$$

equazione del vincolo con g definita su A

Sia $H = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$

Il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ si dirà **MAX**
(MIN) **assoluto vincolato** per f se

$$\begin{aligned} f(x, y) &\leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in H \\ (f(x, y) &\geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in H) \end{aligned}$$

Come si determinano
i massimi e i minimi relativi vincolati?

I **CASO** Siano f e g di classe $C^2(A)$

Supponiamo inoltre che si possa risolvere l'equazione $g(x, y) = 0$ ad es. rispetto ad y

$$\Rightarrow y = y(x)$$

$\Rightarrow$ per trovare i MAX e MIN vincolati di f
si può **CONSIDERARE LA FUNZIONE $f(x, y)$**
IN CORRISPONDENZA DEL VINCOLO $y = y(x)$

$$\Rightarrow F(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Il problema è ricondotto alla determinazione dei max e min per funzioni di una sola variabile

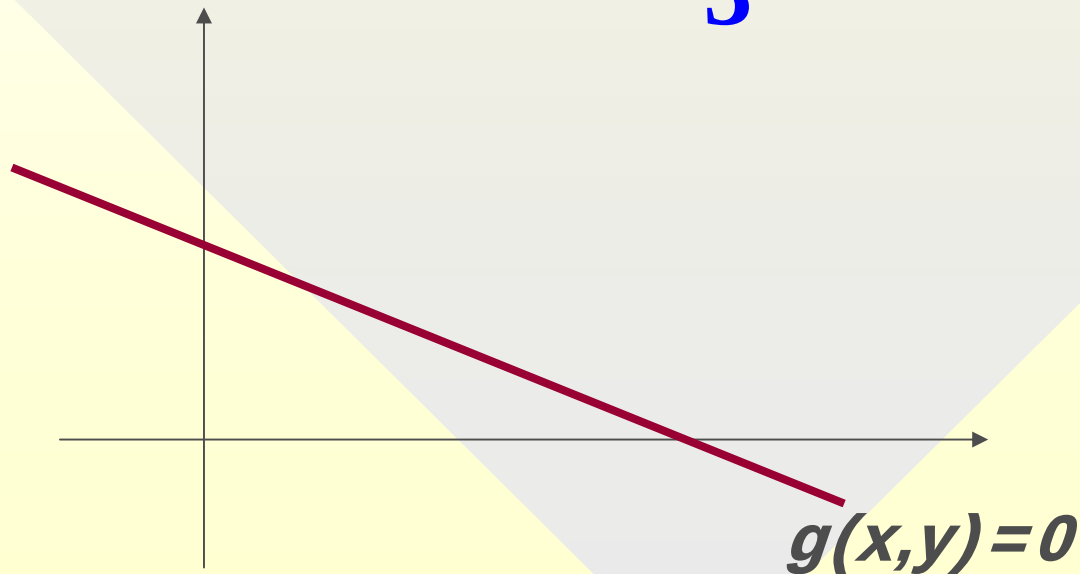
Esempio: **massimi e minimi vincolati di**

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = 2x + 3y - 5 = 0 \quad (\text{eq. del VINCOLO})$$

Esplicitando l'equazione del vincolo

rispetto ad $y \Rightarrow y(x) = \frac{5 - 2x}{3}$



Si può considerare $f(x,y)$ in corrispondenza del vincolo

$$f(x, y(x)) = x \cdot \frac{5-2x}{3} = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = F(x)$$

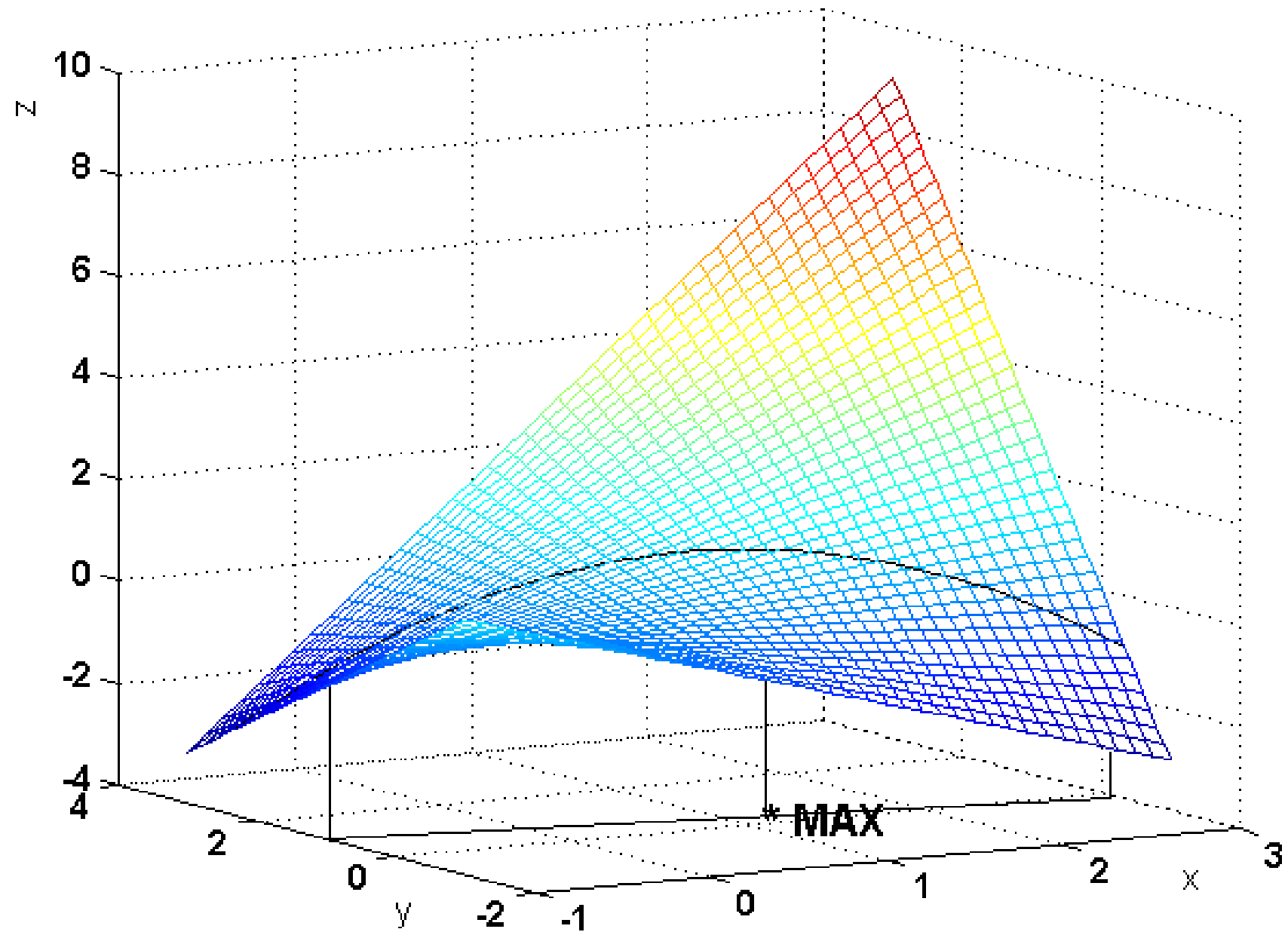
$$F'(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow F'(x) = 0 \text{ per } x = \frac{5}{4}$$

$$F''(x) = -\frac{4}{3} < 0 \quad \forall x \Rightarrow \bar{x} = \frac{5}{4} \text{ p.to di MAX REL per } F(x)$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, y(\bar{x})) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6} \right)$$

punto di MAX RELATIVO VINCOLATO per $f(x, y)$

Max di $f(x,y)=xy$ con $2x+3y-5=0$



Metodo dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

Questo metodo può essere molto utile quando non si riesce ad esplicitare il vincolo.

Si scrive una ***FUNZIONE AUSILIARIA*** detta **FUNZIONE LAGRANGIANA**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Vale la seguente condizione necessaria

$$f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in C^1(A)$$

$P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ p.to di MAX o MIN rel. vincolato
e $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \neq$



$\exists! \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ t.c. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$ è **SOLUZIONE DEL SISTEMA**

$$(*) \begin{cases} L_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y) = 0 \\ L_\lambda(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x - y) = 0 \end{cases}$$

**La condizione data è solo
necessaria**



Potrebbero esistere soluzioni del sistema (*) che non sono però punti di massimo o di minimo

**Diamo una condizione
sufficiente affinché una**

***soluzione del sistema (*) sia
punto di massimo (minimo)
vincolato***

$$f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in C^2(A)$$

Sia $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ SOLUZIONE del sistema (*)

Si consideri la seguente matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & g_x(P) & g_y(P) \\ g_x(P) & L_{xx}(P) & L_{xy}(P) \\ g_y(P) & L_{yx}(P) & L_{yy}(P) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g_x(\bar{x}, \bar{y}) & f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\lambda} g_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\lambda} g_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \\ g_y(\bar{x}, \bar{y}) & f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\lambda} g_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{\lambda} g_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

- **Se $\det D < 0$ allora P è punto di MIN REL. VINCOLATO**
- **Se $\det D > 0$ allora P è punto di MAX REL. VINCOLATO**

Esempio: **determinare gli estremi relativi di**

$f(x, y) = 2x + y$ sotto la CONDIZIONE $x^2 + y^2 = 5$

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Le SOLUZIONI DEL SISTEMA sono

$$P_1 \equiv \left(1, 2, \frac{1}{2}\right) \quad P_2 \equiv \left(-1, -2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{In } P_1 \Rightarrow D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{In } P_2 \Rightarrow D_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|D_1| = 20 > 0 \Rightarrow$$

(1,2) p.to di MAX REL vincolato

$$|D_2| = -20 > 0 \Rightarrow$$

(-1,-2) p.to di MIN REL vincolato