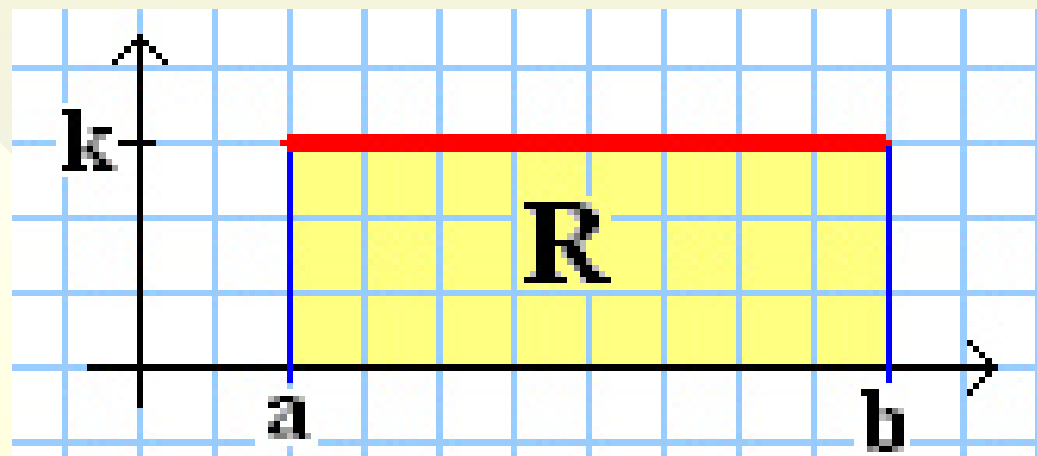


CALCOLO INTEGRALE

(integrale secondo Riemann)

Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = k$



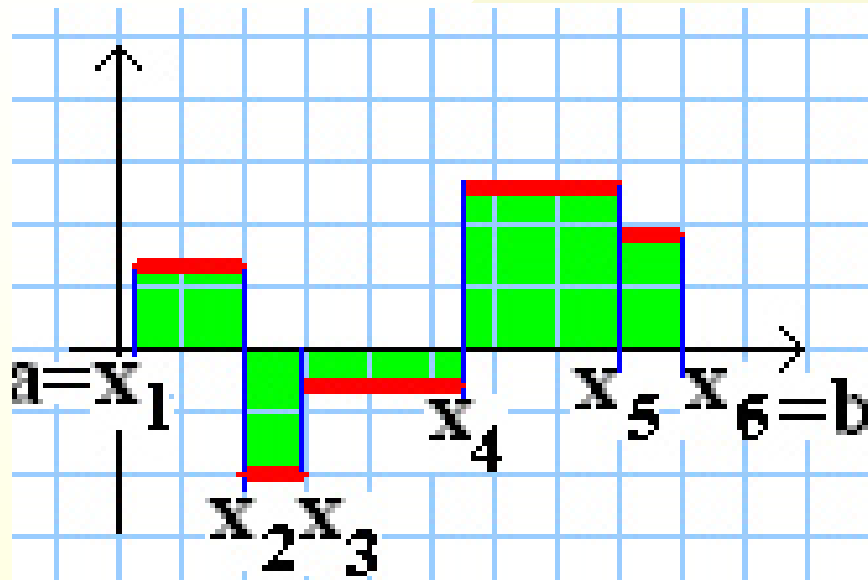
Per definizione: $\int_a^b f(x) dx = k(b - a)$

Osservazione: $\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \text{Area R se } k > 0 \\ -\text{Area R se } k < 0 \end{cases}$

Dato l'intervallo $[a, b)$, siano $x_1 \equiv a < x_2 < \dots < x_n \equiv b$

e sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = k_i \text{ per } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ (f costante a tratti)}$$



- Per definizione :

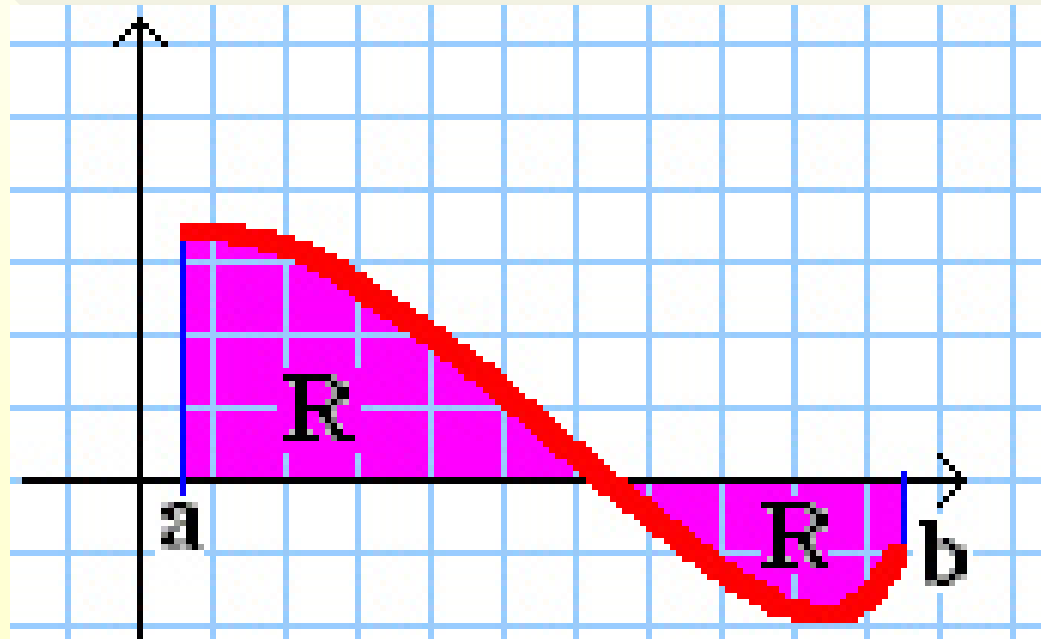
$$\int_a^b f(x) dx = k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) + \dots + k_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

- Osservazione :

$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree dei rettangoli } R_i$$

Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ *limitata*,
**come possiamo definire l'integrale in
modo che in analogia ai casi precedenti**

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area di } R \text{ (con segno)?}$$



Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
limitata,



$$S_- = \left\{ s(x) : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} : s(x) \text{ costante a tratti e } s(x) \leq f(x) \right\}$$

$$S_+ = \left\{ S(x) : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} : S(x) \text{ costante a tratti e } S(x) \geq f(x) \right\}$$

• Chiamiamo **integrale inferiore** di f: $\int_a^b f(x) dx = \sup_{s \in S_-} \int_a^b s(x) dx$

• Chiamiamo **integrale superiore** di f: $\int_a^b f(x) dx = \inf_{S \in S_+} \int_a^b S(x) dx$

Si dirà che $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ *limitata*

è **integrabile secondo Riemann** su $[a, b)$ se

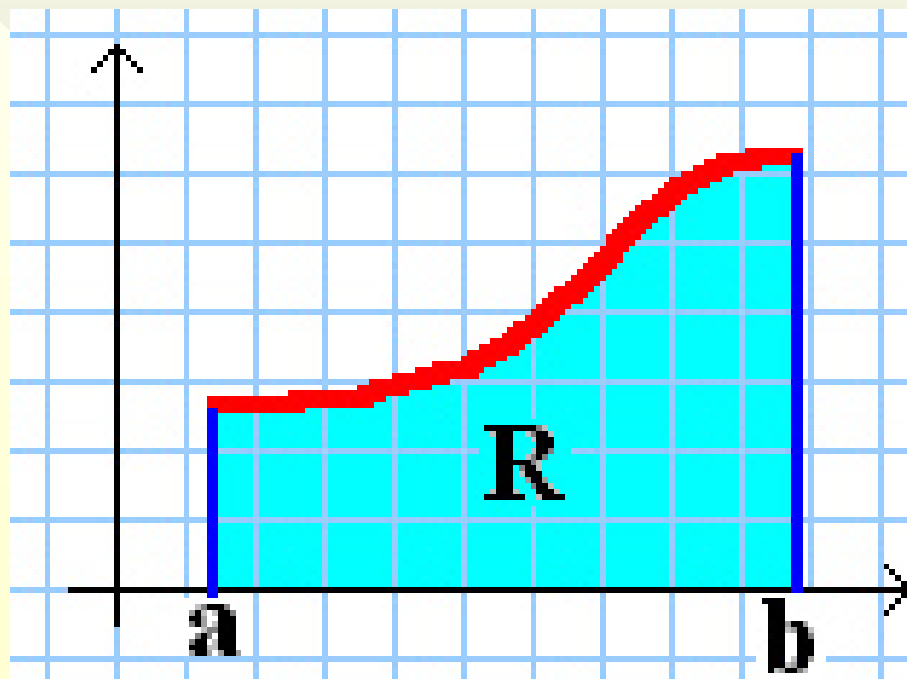
$$-\int_a^b f(x)dx = +\int_a^b f(x)dx$$

Il **valore comune** dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore si dirà

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si chiama **integrale definito**

E' intuitivo comprendere che se $f(x) \geq 0$ in $[a,b)$, l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ coincide con l'area di R.



Non tutte le funzioni limitate su un intervallo sono integrabili secondo Riemann.

Consideriamo, ad es., la **funzione**

$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è razionale} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \neq \int_0^1 f(x) dx = 1$$

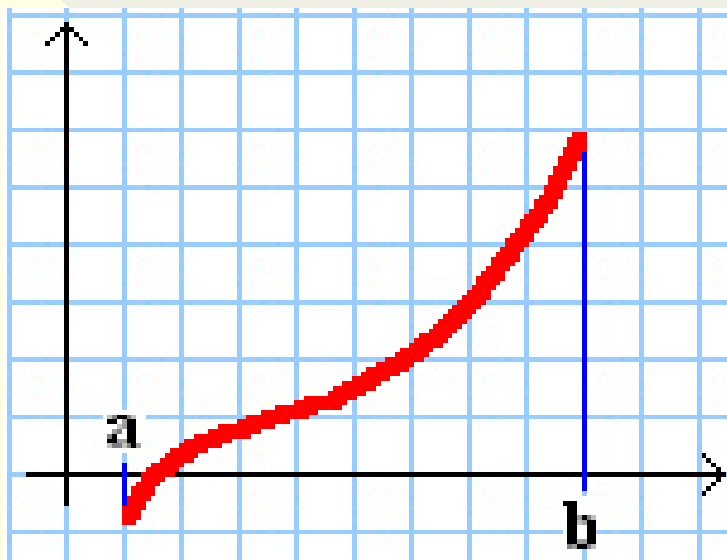


$f(x)$ non è integrabile secondo Riemann

Quali sono allora le funzioni integrabili secondo Riemann?

Si dimostrano i seguenti Teoremi:

1) Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ **CONTINUA** e **LIMITATA**
 $\Rightarrow f$ **E' INTEGRABILE** secondo Riemann



2) Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA con un NUMERO FINITO DI P.TI DI DISCONTINUITA'

$\Rightarrow f$ E' INTEGRABILE secondo Riemann

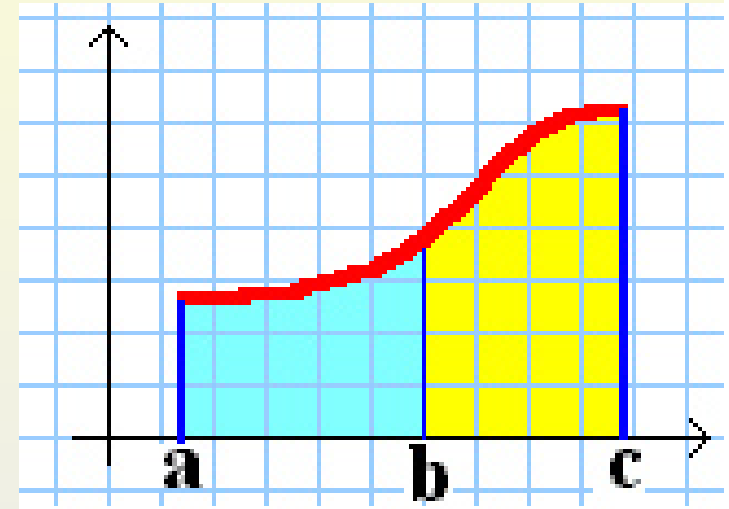


3) Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA e MONOTONA

$\Rightarrow f$ E' INTEGRABILE secondo Riemann

Proprietà dell'integrale definito

1) Addittività rispetto all'intervallo d'integrazione



Sia f integrabile su $[a, c]$ e sia $b \in [a, c]$



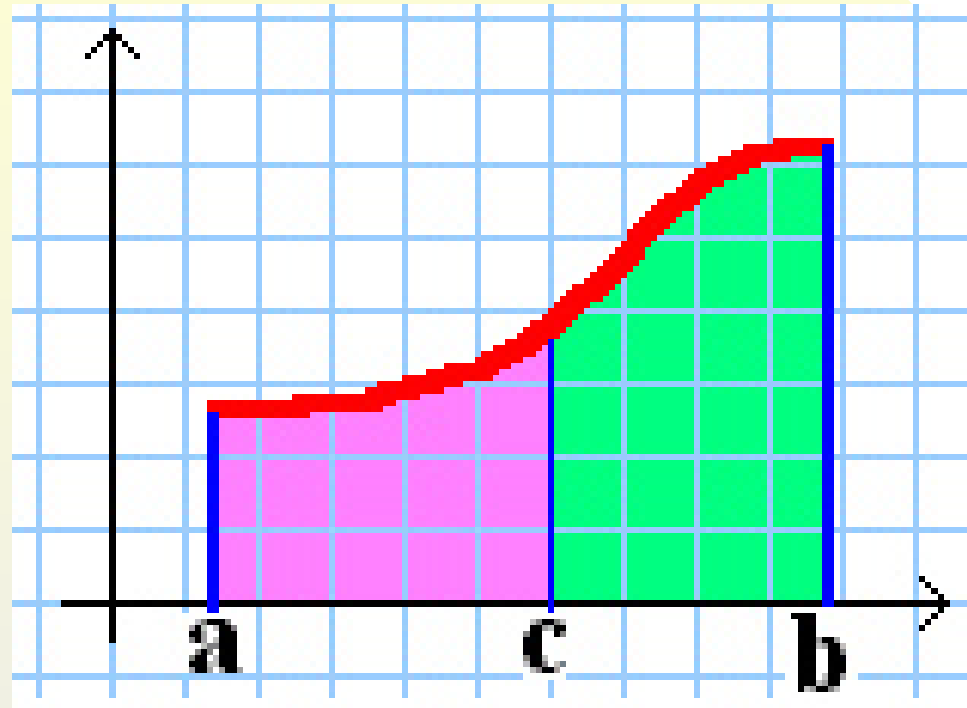
$$(*) \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Per convenzione $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\Rightarrow$ **1)** $\int_a^a f(x)dx = 0$

$\Rightarrow$ **2)** $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

qualunque sia l'ordine di a,b,c



$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx$$

2) Addittività rispetto alla funzione integranda

Se f_1 e f_2 sono integrabili su $[a, b)$



$f_1 + f_2$ è **INTEGRABILE** su $[a, b)$ e

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

3) Omogeneità

Se f è integrabile su $[a, b)$



$cf \quad \forall c \in \mathbb{R}$ è **INTEGRABILE** su $[a, b)$ e

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

2)+3) $\Rightarrow$ Linearità

Se f_1 e f_2 sono integrabili su $[a, b)$
e c_1 e c_2 sono costanti



$$\begin{aligned} & \int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = \\ & = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx \end{aligned}$$

4) Positività

Se f è integrabile su $[a, b)$

$$f(x) \geq 0 \text{ su } [a, b)$$



$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

5) Monotonìa

Se f_1 e f_2 sono integrabili su $[a, b)$
e $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in [a, b)$

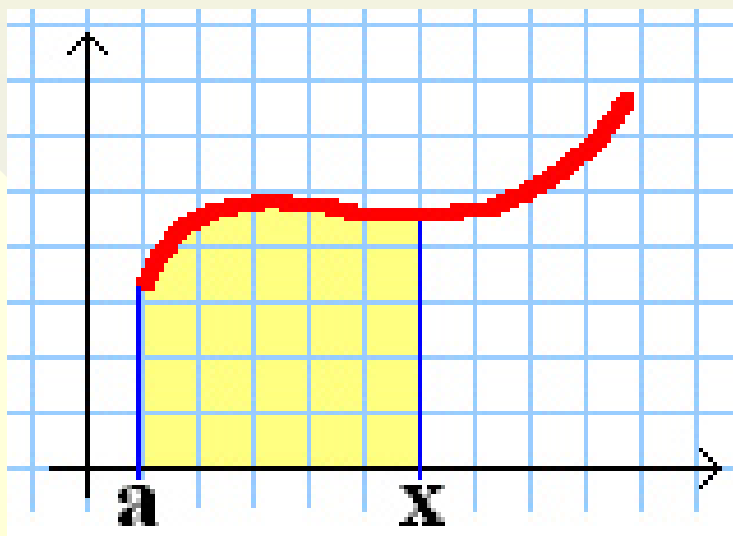


$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b)$ e sia $x \in [a, b)$

La funzione $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

si chiama **FUNZIONE INTEGRALE**



Def.: Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 : $G'(x) = f(x)$ si chiama **PRIMITIVA** di f

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b)$.

- La funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è derivabile $\forall x \in (a, b)$ e $F'(x) = f(x)$
- Inoltre, se $G(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$ allora $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$

Dal T. fondamentale del calcolo integrale



$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$



Per calcolare l'integrale definito di una funzione è sufficiente conoscere una primitiva della funzione data

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f data, si chiama **integrale indefinito di f** e si indica nel seguente modo: $\int f(x)dx$

E' facile comprendere che data $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

se $G(x)$ è una primitiva di f , **le primitive di f sono tutte e sole quelle che differiscono da G per una costante**



$$\int f(x)dx = G(x) + c$$

Teorema (della media integrale)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$.



$$\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Dimostrazione: • **I parte** Sia $x_0 \in [a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$$



$F(x)$ è derivabile $\forall x_0 \in [a, b)$ e $F'(x_0) = f(x_0)$

• **Il parte** Se $G(x)$ è t.c. $G'(x) = f(x)$,
considerata $H(x) = F(x) - G(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$
 $\Rightarrow H(x) = k \Rightarrow \int_a^x f(t)dt - G(x) = k \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_a^a f(t)dt - G(a) = k \Rightarrow k = -G(a)$



$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

METODI DI INTEGRAZIONE

Alcuni integrali si riescono a calcolare senza fatica, *integrali immediati*, tenendo conto che l'operazione di integrazione (indefinita) è l'operazione inversa della derivazione

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int \cos x dx = \text{sen}x + k$$

$$\int \text{sen}x dx = -\cos x + k$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + k$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = \text{cotg}x + k$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arsen}x + k$$

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} [f(x)]^{\alpha+1} + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + k$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + k$$

$$\int [\cos f(x)] f'(x) dx = \text{sen}[f(x)] + k$$

$$\int [\text{sen}f(x)] f'(x) dx = -\cos[f(x)] + k$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 f(x)} f'(x) = \text{tg}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 f(x)} f'(x) = \text{cotg}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{dx}{1+[f(x)]^2} f'(x) = \text{arctg}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} f'(x) = \text{arsen}[f(x)] + k$$

Regola di **INTEGRAZIONE PER PARTI**

Ricordando che

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$



$$\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$



$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esempio 1 Calcolare $\int \log x dx$

$f'(x)$ $g(x)$

$$\begin{aligned} \int \overset{\uparrow}{1} \cdot \overset{\uparrow}{\log x} dx &= x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= x \cdot \log x - \int dx = x \log x - x + k = \\ &= x(\log x - 1) + k \end{aligned}$$

Esempio 2 Calcolare $\int e^x \cos x dx$

$f'(x)$ $g(x)$

$$\int \overset{\uparrow}{e^x} \cdot \overset{\uparrow}{\cos x} dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \text{sen} x dx =$$

$$= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \text{sen} x - \int e^x \cdot \cos x dx$$



$$2 \int e^x \cdot \cos x dx = e^x (\cos x + \text{sen} x) + c$$



$$\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x (\cos x + \text{sen} x)}{2} + c$$

NB:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Esempio 3 Calcolare $\int_1^2 \arctg x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctg x dx &= x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= 1 \cdot \arctg 1 - 0 \cdot \arctg 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 1 = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

Regola di INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Si dimostra facilmente che il calcolo dell'integrale

$$\int f(x)dx$$

si trasforma, ponendo $x = g(t)$, in quello di

$$\int f(g(t))g'(t)dt$$

Se quest'ultimo si riesce a calcolare e risulta dato da

$G(t) + k$, ammesso che la funzione g sia invertibile,

l'integrale di partenza è dato da:

$$\int f(x)dx = G(g^{-1}(x)) + k$$

Esempio 4 Calcolare $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$
Posto $x = \log t \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \operatorname{arctg} t + k$$



$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arctg}(e^x) + k$$

NB: Se f è integrabile in $[a, b]$,

$g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ di classe $C^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(t))g'(t)$ è integrabile in $[\alpha, \beta]$

e vale la formula

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1=g^{-1}(x_1)}^{t_2=g^{-1}(x_2)} f(g(t))g'(t) dt$$

Esempio 5**Calcolare $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx$** **Posto $x = t^3$ ($\sqrt[3]{x} = t$) $\Rightarrow x'(t) = 3t^2$**

$$\begin{aligned}\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx &= \int_0^{\sqrt[3]{8}} e^t 3t^2 dt = 3 \int_0^2 e^t t^2 dt = \\ &= 3 \left[e^t t^2 \Big|_0^2 - \int_0^2 2te^t dt \right] = 3 \left[4e^2 - 2 \left((e^t t) \Big|_0^2 - \int_0^2 e^t dt \right) \right] = \\ &= 12e^2 - 6 \left[2e^2 - e^2 + 1 \right] = 6e^2 - 6\end{aligned}$$



$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx = 6e^2 - 6$$

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad n < m$$

NB : se $n \geq m$

$$P_n(x) = Q_m(x)L(x) + R_r(x) \quad r \leq m$$



$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)}$$

(caso precedente)

Esempio 6

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$$

$x^3 + 0x^2 + 0x + 0$	$x^2 - 3x + 2$
$-x^3 + 3x^2 - 2x$	$x + 3$
// $3x^2 - 2x$	
$-3x^2 + 9x - 6$	
// $7x - 6$	

$$\Rightarrow x^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 2) + 7x - 6$$

I CASO

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad m = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{A}{Bx + C}$$

$$\int f(x) dx = \frac{A}{B} \cdot \int \frac{B}{Bx + C} dx = \frac{A}{B} \log|Bx + C| + k$$

Esempio 7

$$\int \frac{2}{3-x} dx = -2 \int \frac{-1}{3-x} dx = -2 \log|3-x| + k$$

II CASO

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad m = 2 \Rightarrow n = 0, 1 \Rightarrow f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D}$$

$$1) \quad \Delta > 0 \Rightarrow x^2 + Cx + D = (x - a)(x - b)$$

$$(1) \quad \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D} = \frac{M}{(x - a)} + \frac{N}{(x - b)} = \frac{Mx - Mb + Nx - Na}{(x - a)(x - b)} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} M + N = A \\ -Mb - Na = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D} dx = M \int \frac{dx}{x - a} + N \int \frac{dx}{x - b} =$$

$$= M \log|x - a| + N \log|x - b| + k$$

Esempio 8 $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3x + 1}{(x - 3)(x - 2)}$$

$$\frac{3x + 1}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{M}{x - 3} + \frac{N}{x - 2} = \frac{(M + N)x - 2M - 3N}{(x - 3)(x - 2)}$$

$$\begin{cases} M + N = 3 \\ -2M - 3N = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = -7 \\ M = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{10}{x - 3} dx - \int \frac{7}{x - 2} dx = \\ &= 10 \log|x - 3| - 7 \log|x - 2| + k \end{aligned}$$

$$2) \quad \Delta = 0 \Rightarrow x^2 + Cx + D = (x - a)^2$$

$$(1) \quad \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D} = \frac{M}{(x - a)} + \frac{N}{(x - a)^2} = \frac{Mx - Ma + N}{(x - a)^2} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ N - Ma = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = A \\ N = B + Ma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D} dx = M \int \frac{dx}{x - a} + N \int \frac{dx}{(x - a)^2} =$$

$$= M \log|x - a| - \frac{N}{(x - a)} + k$$

Esempio 9 $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+1} dx$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{M}{x-1} + \frac{N}{(x-1)^2} = \frac{Mx - M + N}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} M = 2 \\ -M + N = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ N = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx =$$

$$= 2 \log|x-1| - \frac{3}{(x-1)} + k$$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow x^2 + Cx + D$ non si può scomporre

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + \frac{2B}{A}}{x^2 + Cx + D} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + C + \frac{2B}{A} - C}{x^2 + Cx + D} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + C}{x^2 + Cx + D} dx + \frac{A}{2} \frac{2B - AC}{A} \int \frac{dx}{x^2 + Cx + D} =$$

$$= \frac{A}{2} \log(x^2 + Cx + D) + \frac{2B - AC}{2} \int \frac{dx}{x^2 + Cx + D}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + Cx + D} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{C}{2}\right)^2 + \frac{4D - C^2}{4}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{4}{4D - C^2} \left(x + \frac{C}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4D - C^2}} \cdot \int \frac{\frac{2}{\sqrt{4D - C^2}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{4D - C^2}} \left(x + \frac{C}{2}\right)\right]^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4D - C^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + C}{\sqrt{4D - C^2}} + k$$



$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + Cx + D} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \log(x^2 + Cx + D) + \frac{2B - AC}{2} \frac{2}{\sqrt{4D - C^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + C}{\sqrt{4D - C^2}} + k$$

Esempio 10

$$\int \frac{4x + 1}{x^2 - x + 1} dx$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \int \frac{4x + 1}{x^2 - x + 1} dx = 2 \int \frac{2x + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= 2 \int \frac{2x - 1 + 1 + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1} dx = 2 \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + 2 \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} =$$

$$= 2 \log(x^2 - x + 1) + 3 \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\
 &= \int \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} dx = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2x-1}{2}\right)\right]^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c
 \end{aligned}$$



$$\int \frac{4x+1}{x^2 - x + 1} dx = 2 \log(x^2 - x + 1) + \frac{6}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$