

BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Def.

Si chiama **base** di un sottospazio V
un insieme di vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$

LINEARMENTE INDIPENDENTI di
 V che sono un **sostegno** per V

Poiché $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_k$ sono un
sostegno di V ,
 ogni vettore $\underline{v} \in V$ può scriversi come
combinazione lineare di questi e
 Poiché i vettori sono
linearmente indipendenti,
 ogni vettore $\underline{v} \in V$ può essere scritto in
un unico modo, come combinazione
 lineare di $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_k$
*I coefficienti di questa combinazione lineare
 si chiamano coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base*

... osservazione

Un sottospazio non ammette una sola base ma, in generale, infinite basi diverse

TEOREMA

Se V è un sottospazio di R^n allora due diverse basi di V sono necessariamente costituite da un ugual numero di vettori; tale numero viene chiamato **DIMENSIONE DI V** e si indica con $\dim(V)$

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

I vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una BASE DI $\mathbb{R}^n$

Le COORDINATE del generico vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rispetto a questa base sono proprio $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\Rightarrow$ BASE PRIVILEGIATA $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ BASE CANONICA

... osservazione

Si può dimostrare che se s è la
dimensione del sottospazio V di R^n ,
allora

ogni s -pla di vettori
LINEARMENTE INDIPENDENTI
costituisce una BASE DI V .

3) ***PRODOTTO SCALARE*** (o prodotto interno)

L'operazione **PRODOTTO SCALARE** è un'operazione

$$: R^n \times R^n \rightarrow R \quad \text{e se}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} : (\underline{x}, \underline{y}) \rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ESEMPIO 1

Dati

$$\underline{x} = (3, 1, 0, 2), \underline{y} = (1, 2, 0, 3)$$

il loro prodotto $\underline{x} \cdot \underline{y}$ è dato da

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 3 + 2 + 6 = 11$$

ESEMPIO 2

Consideriamo il **processo produttivo** di una determinata merce. Supponiamo che per avere una unità di prodotto si usino **n merci** $x_1, x_2, \dots, x_n$ in **quantità** rispettivamente $q_1, q_2, \dots, q_n$. Sia p_i il **prezzo unitario** della merce x_i .

$\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ distinta base unitaria

$\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ vettore dei costi unitari

$\Rightarrow$ **costo unitario di produzione:**

$$\underline{p}\underline{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n$$

PROPRIETA'

$$1) \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{y}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \quad \forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^n$$

(p. commutativa)

$$2) (\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}) \cdot \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{y}} \cdot \underline{\mathbf{z}} \quad \forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^n$$

(p. distributiva risp. all'add. fra vettori)

$$3) h\underline{\mathbf{x}} \cdot k\underline{\mathbf{y}} = h(\underline{\mathbf{x}} \cdot k\underline{\mathbf{y}}) = hK(\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}}) \quad \forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, \in \mathbf{R}^n$$

$$4) \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{x}} \geq 0 \quad \forall h, k, \in \mathbf{R}$$

$$\quad \quad \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$$

Osservazione:

Il **prodotto di due numeri reali** è zero se, e solo se, **uno dei due è uguale a zero**.

Per il **prodotto interno** fra vettori non è così:

- se uno dei due vettori è nullo, il prodotto è nullo ma
- **se il prodotto è nullo, non necessariamente uno dei due vettori è nullo.**

$x, y \in \mathbb{R}$ allora $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } y = 0$

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ allora $\underline{x} = \underline{0} \text{ o } \underline{y} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}\underline{y} = 0$

ma $\underline{x}\underline{y} = 0 \not\Rightarrow \underline{x} = \underline{0} \text{ o } \underline{y} = \underline{0}$

Per esempio

se $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\underline{x}\underline{y} = -1 + 1 = 0$$

Def.

Sia $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

la **NORMA** di $\underline{x}$ è definita da

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

NB: Se $n=1$, $\|\underline{x}\| = |\underline{x}|$.

PROPRIETA'

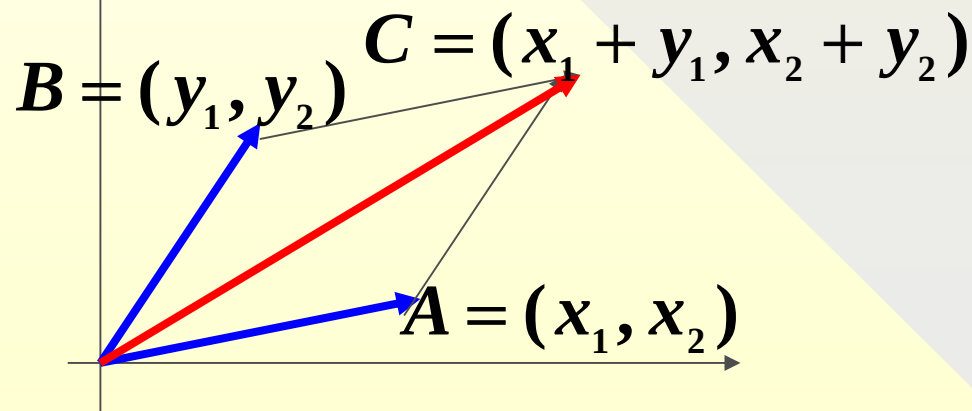
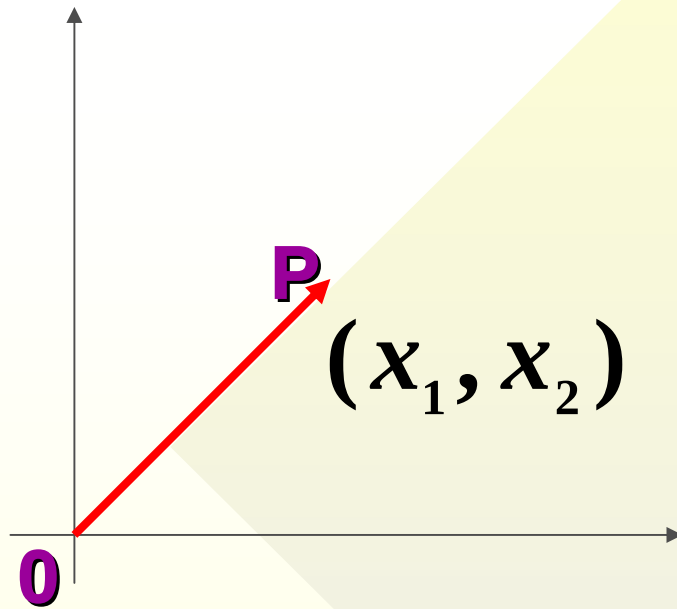
1) $\|\underline{x}\| \geq 0, \quad \|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$

2) $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$

3) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ (disuguaglianza triangolare)

In $\mathbb{R}^2$ se $\underline{x} = (x_1, x_2)$

allora $\|\underline{x}\| = \overline{0P}$



La 3) significa che in ogni triangolo la **lunghezza di un lato è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due**

Def.

Sia $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 e $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$;

Due vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ si dicono
ORTOGONALI se $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$

Def.

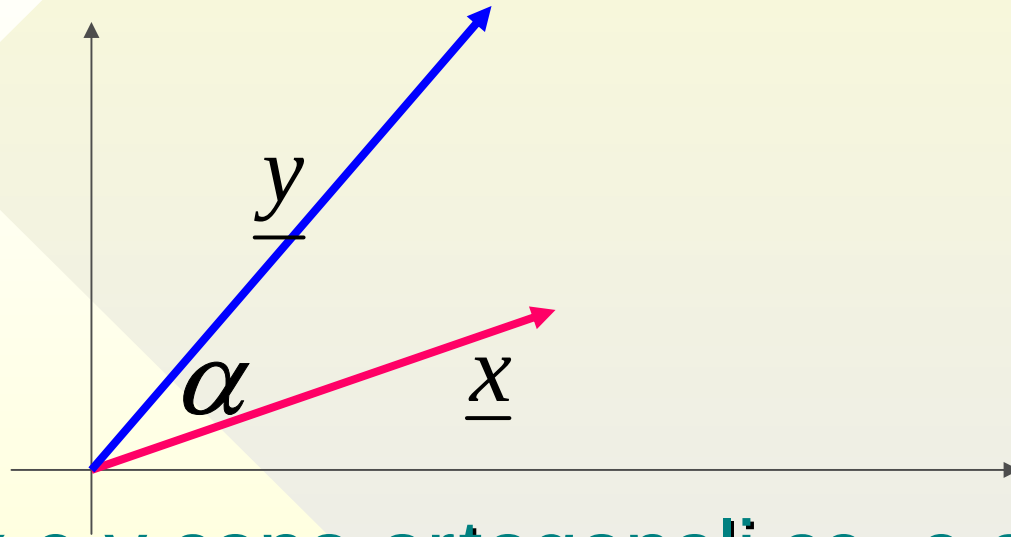
Due vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ si dicono
ORTONORMALI se sono ortogonali

e

$$\|\underline{x}\| = \|\underline{y}\| = 1$$

In $\mathbb{R}^2$ si può vedere facilmente che

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cos \alpha$$



Quindi $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali se, e solo se,

o *almeno uno dei due vettori è uguale a zero*

o $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, 1, \dots)$