

# MATRICI

**Def:** Una *tabella* di  $m \cdot n$  numeri ( $n, m \geq 1$ ) del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

È detta **MATRICE** con  $m$  righe e  $n$  colonne (o matrice  $m \times n$ ).

Tale matrice si indica anche con

$$[a_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Una **MATRICE**  $m \times n$  può anche considerarsi come

$m$  vettori riga,  
ciascuno di  $R^n$ ,  
messi uno  
sopra l'altro

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{1,*} \\ \underline{a}_{2,*} \\ \dots \\ \underline{a}_{m,*} \end{pmatrix}$$

$n$  vettori  
colonna,  
ciascuno di  $R^m$ ,  
messi uno di  
fianco all'altro

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (\underline{a}_{*,1}, \underline{a}_{*,2}, \dots, \underline{a}_{*,n})$$

**Def.**

Se  $A = [a_{i,j}]$  è una **MATRICE**  $m \times n$  e  $\underline{x} \in R^n$  è un **VETTORE** di componenti  $x_1, x_2, \dots, x_n$  definiamo il **PRODOTTO DELLA MATRICE A PER IL VETTORE  $\underline{x}$**  (che può anche essere scritto come vettore colonna e considerato come una matrice  $n \times 1$ ) **nel seguente modo:**

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{1,*} \underline{x} \\ \underline{a}_{2,*} \underline{x} \\ \dots \\ \underline{a}_{m,*} \underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

## ... osservazione

Il prodotto  $A\underline{x}$  ha senso solamente se il **NUMERO DELLE COLONNE** della matrice  $A$  è uguale al **NUMERO DI COMPONENTI** del vettore  $\underline{x}$  (o al numero delle righe della matrice  $n \times 1$  coincidente con il vettore  $\underline{x}$ )

Il prodotto di una matrice per un vettore, così come è stato definito, è una applicazione

$$f : R^n \rightarrow R^m$$

$$: \underline{x} \in R^n \rightarrow A\underline{x} \in R^m$$

ed è facile verificare, in base alle proprietà del prodotto scalare, che se  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ ,

$$A \cdot (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha A\underline{x} + \beta A\underline{y}$$

questo significa che il prodotto di una matrice per un vettore è una

**APPLICAZIONE LINEARE**

# Def.

Una **applicazione**  $f : R^n \rightarrow R^m$  **si dice**

## LINEARE

**se,**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  **e**  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in R^n$   
**si ha**

$$f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y})$$

## Risultato importante:

# TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI LINEARI

$\forall f : R^n \rightarrow R^m$  LINEARE

$\exists$  A matrice  $(m \times n)$  :

$$f(\underline{x}) = A\underline{x} \quad \forall \underline{x} \in R^n$$

$$A = [f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \dots, f(\underline{e}_n)]$$

# ESEMPIO

$f : R^n \rightarrow R$  è tale che

se  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f(\underline{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

# 1) $f$ è lineare?

Siano  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e

$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) &= f(\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \beta(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \\ &= \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y}) \end{aligned}$$

**SI, E' LINEARE**

## 2) Qual è la matrice $A$ che rappresenta $f$ ?

$$A = [f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \dots, f(\underline{e}_n)]$$

$$f(\underline{e}_1) = 1 + 0 + \dots + 0 = 1; \quad f(\underline{e}_2) = 0 + 1 + \dots + 0 = 1$$

$$\dots \quad f(\underline{e}_n) = 0 + 0 + \dots + 1 = 1$$

$$A = (1, 1, \dots, 1) \quad \Downarrow \quad \text{A matrice } (1 \times n)$$

$$A\underline{x} = (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 + \dots + x_n) = f(\underline{x})$$

# OPERAZIONI TRA MATRICI

## ADDIZIONE TRA MATRICI

Se  $A = [a_{i,j}]$  e  $B = [b_{i,j}]$

sono due matrici  $m \times n$

poniamo

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

## ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

**NB:** Per poter fare l'addizione fra due matrici, queste devono essere dello **stesso tipo**:

devono avere lo **stesso numero di righe** e lo **stesso numero di colonne**

**PROPRIETA':**  
**SONO LE STESS**  
**DELL'ADDIZIONE FRA VETTORI!**

# MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI

## PER SCALARI

Se  $A = [a_{i,j}]$   $i = 1, 2, \dots, m$   $j = 1, 2, \dots, n$

e  $\lambda \in \mathbb{R}$

poniamo

$$\lambda A = [\lambda a_{i,j}]$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

# ESEMPIO

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**PROPRIETA':**

**SONO LE STESSE DELLA  
MOLTIPLICAZIONE DI UN  
VETTORE PER UNO SCALARE!**

# MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

Se  $A = [a_{i,j}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (m \times n)$

e  $B = [b_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (n \times q)$

poniamo

$$AB = [c_{i,j}] \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, q \quad (m \times q)$$

con

$$c_{i,j} = \underline{a}_{i,*} \cdot \underline{b}_{*,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$$

$$\begin{array}{c} \underline{a}_{i,*} \end{array} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the dot product of a row vector  $\underline{a}_{i,*}$  and a column vector  $\underline{b}_{*,j}$  to produce a scalar  $c_{i,j}$ .

The first matrix (8x8) has a yellow horizontal bar representing the row  $\underline{a}_{i,*}$ . The second matrix (5x5) has a blue vertical bar representing the column  $\underline{b}_{*,j}$ . The resulting matrix (5x5) has a yellow horizontal bar and a blue vertical bar intersecting at the element  $c_{i,j}$ , which is highlighted in green. The indices  $i$  and  $j$  are indicated by green boxes.

**Osservazione:** per poter effettuare il prodotto fra matrici, le due matrici debbono essere **CONFORMABILI**, cioè il numero delle colonne della prima matrice deve essere uguale al numero delle righe della seconda.

# ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2 \times 3)$   $(3 \times 3)$

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{a}_{1,*} \underline{b}_{*,1} & \underline{a}_{1,*} \underline{b}_{*,2} & \underline{a}_{1,*} \underline{b}_{*,3} \\ \underline{a}_{2,*} \underline{b}_{*,1} & \underline{a}_{2,*} \underline{b}_{*,2} & \underline{a}_{2,*} \underline{b}_{*,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$(2 \times 3)$

# PROPRIETA':

1)  $(AB)C = A(BC) \Rightarrow ABC$   
(p. associativa)

2)  $A(B+C) = AB+AC$  e  $(B+C)A = BA+CA$   
(p. distributiva a dx e a sx)

3) Se  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c(AB) = (cA)B = A(cB) \Rightarrow cAB$

4)  $M \cdot 0 = 0$ ,  $0 \cdot M = 0$   
(purché le matrici siano conformabili)

# **NON VALE LA PROPRIETA' COMMUTATIVA!**

**\* In generale se  $A$  e  $B$  sono conformabili non è detto che  $B$  ed  $A$  lo siano**

**\* Anche nel caso particolare di matrici quadrate  $n \times n$ , in cui si può fare sia  $AB$  che  $BA$ , in generale  $AB \neq BA$**

## ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# NON VALE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO!

\* **Se  $A=0$  o  $B=0 \Rightarrow AB=0$**

\* **Ma  $AB=0 \not\Rightarrow A=0$  o  $B=0$**

# ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# MATRICE TRASPOSTA

Data una matrice  $A$  ( $m \times n$ ) ,  
scambiando le righe con le colonne  
otteniamo  $A^T$  ( $n \times m$ )



# MATRICE TRASPOSTA

# ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

# PROPRIETA':

$$1) (A^T)^T = A$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$3) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$4) (AB)^T = B^T A^T$$

# **PARTICOLARI MATRICI QUADRATE**

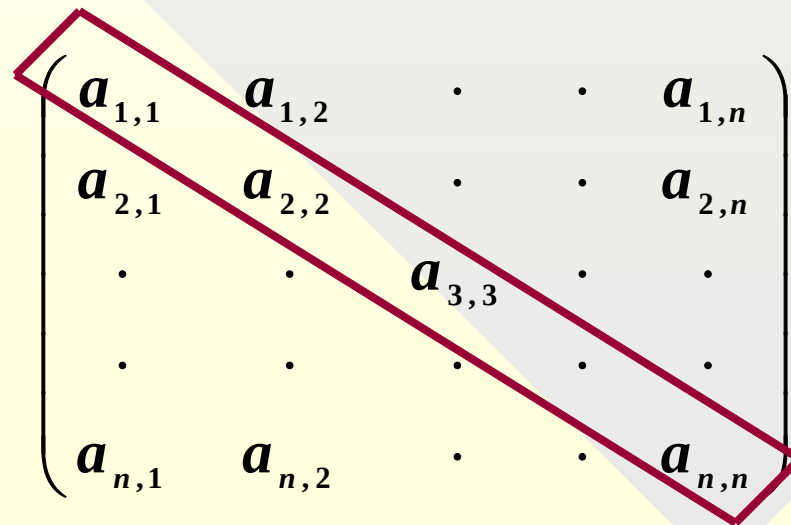
**LE MATRICI QUADRATE DI  
ORDINE  $n$  SONO LE  
MATRICI  $(n \times n)$**

# DIAGONALE PRINCIPALE

## Gli elementi

$$a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$$

formano la **diagonale principale** della matrice quadrata di ordine  $n$


$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & a_{3,3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

# MATRICE SIMMETRICA

E' una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) ,

tale che

$$A = A^T$$

***Gli ELEMENTI SIMMETRICI  
rispetto alla diagonale principale  
sono UGUALI***

# ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A$$

**A è simmetrica**

# MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

E' una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) ,

tale che

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall \quad i > j$$

***Gli ELEMENTI SOTTO LA  
DIAGONALE PRINCIPALE  
sono NULLI***

# ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



**A è triangolare  
superiore**

# MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

E' una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) ,

tale che

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall \quad i < j$$

***Gli ELEMENTI SOPRA LA  
DIAGONALE PRINCIPALE  
sono NULLI***

# ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



**A è triangolare  
inferiore**

# MATRICE DIAGONALE

E' una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) ,  
tale che

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Se  $a_{i,i} = \lambda \ (i = 1, \dots, n)$



$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

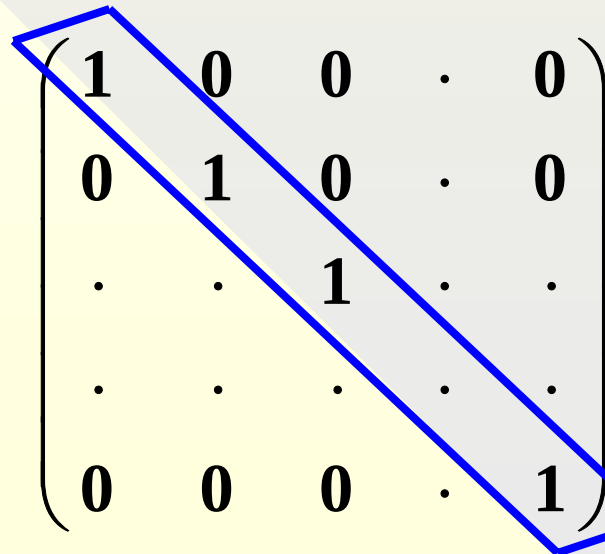
**MATRICE SCALARE:**

$$\lambda A = \lambda A$$

# MATRICE IDENTITA' (o unità)

E' una matrice  $A (n \times n)$ , tale che

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases}$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

**Per ogni matrice  $A$  di ordine  $n$**

$$\mathbf{I}_n \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$



**$\mathbf{I}_n$  è l'elemento neutro  
della moltiplicazione**

# MATRICE INVERSA

Nell' **insieme dei numeri reali**,  
se  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow \exists$  l'inverso di  $a$  cioè  
 $\exists b \in \mathbb{R}: ba = ab = 1$

Nell' **insieme delle matrici quadrate**,  
 $\exists$  la matrice inversa?

**Cioè,**

**data una matrice  $A$  di ordine  $n$ ,  
esiste una matrice  $B$  tale che**

$$\begin{aligned} & \mathbf{AB \text{ (} B \text{ inv. destra) =}} \\ & \mathbf{=BA \text{ (} B \text{ inv. sinistra) =}} \\ & \mathbf{=I \text{ ?}} \end{aligned}$$

**Poiché il prodotto tra matrici non è commutativo, in generale  $AB \neq BA$  CI SI PUÒ CHIEDERE:**

**1) Potrebbe esistere l'inversa destra e non esistere l'inversa sinistra?**

**2) Potrebbero esistere entrambe ed essere diverse fra loro?**



**Si dimostra che SE ESISTE  
L'INVERSA DESTRA (sin),  
ESISTE ANCHE L'INVERSA  
SINISTRA (destra)**

**E SONO UGUALI TRA LORO**

**Si dice che la matrice  $A$**

**E' INVERTIBILE**

**se esiste la matrice inversa  $A^{-1}$ :**

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

***Ogni matrice  $A$  di ordine  $n$  è invertibile?***

**NO**

# ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  non è invertibile

Se lo fosse, esisterebbe  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

tale che  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 3\beta & 0 \\ 2\gamma + 3\delta & 0 \end{pmatrix} \neq I_2, \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$