

1 Quando una **MATRICE** è
INVERTIBILE ?

2 Come si calcola la
MATRICE INVERSA ?

Diamo una prima risposta alla prima domanda

Siano $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Si chiama **SISTEMA LINEARE**
di n equazioni in n incognite

IL VETTORE $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

che **soddisfa l'equazione**

$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ si chiama

vettore soluzione
del sistema

Se A è **invertibile**,

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$



$$\underline{A}^{-1} \underline{b} = \underline{A}^{-1} \underline{A} \underline{x} = \underline{I}_n \underline{x} = \underline{x}$$

Si verifica immediatamente (e per sostituzione) che $\underline{A}^{-1} \underline{b}$ è **l'unica soluzione** del sistema dato

**A invertibile $\Rightarrow A \underline{x} = \underline{b}$
univocamente risolubile per
ogni scelta di $\underline{b}$**

Si può vedere facilmente che vale
anche l'inverso di questa proposizione
per cui

**A invertibile $\Leftrightarrow A \underline{x} = \underline{b}$
univocamente risolubile
per ogni scelta di $\underline{b}$**

Per rispondere in maniera più completa alla prima domanda e per dare una risposta alla seconda,

introduciamo il concetto di

DETERMINANTE

(di una matrice A di ordine n)

Sia M_n l'insieme delle matrici quadrate di ordine n

Definiamo una legge

$$: A \in M_n \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

Poniamo:

Per $n=1$ $\det A = a_{11}$

Per $n \geq 2$ definiamo COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n} =$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$$

OPPURE

$$\det A = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{n,j}A_{n,j} =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$$

NB: Come si può vedere, in questa definizione **non è specificata** una particolare **riga o colonna** rispetto alla quale si debba **calcolare il determinante**.

La definizione è comunque ben posta
in quanto si può verificare che

il valore del **determinante** è
indipendente dalla scelta della
riga o della **colonna** rispetto
alla quale viene calcolato.

ESEMPIO

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} =$$

$$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)^3 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

OPPURE

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1$$

In generale,

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ESEMPIO

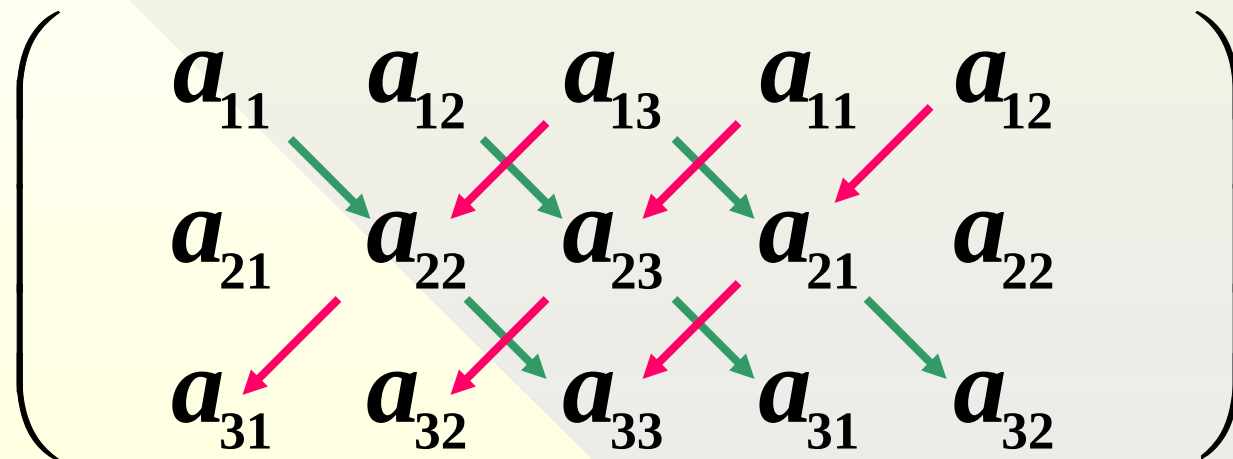
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ Se } n=3 \Rightarrow$$

regola di Sarrus



$$\begin{aligned} |A| = & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} + \\ & - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ -5 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = \\
 &= -7 \cdot \left[3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \right] = \\
 &= -7 \cdot 141 = -987
 \end{aligned}$$

PROPRIETA' dei determinanti

Osservazione: in base alla
definizione di determinante e alla
definizione di matrice trasposta

$$\det A = \det A^T$$



le *proprietà* dei determinanti che sussistono
circa le *righe* valgono anche relativamente alle
colonne

1) Un determinante *cambia di segno* quando si *scambiano* fra loro *due righe* (o colonne)



Un determinante che abbia *due righe* (o colonne) *uguali* è **UGUALE A ZERO**

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiando le prime due righe si ottiene ↓

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Per la proprietà 1) $\Rightarrow \det A = - \det B$

Poiché $B=A \Rightarrow \det A = - \det A$

$\Rightarrow \det A=0$

2) Se in un determinante *un vettore riga* (o colonna) *è somma di due vettori*, il determinante è uguale alla *somma di due determinanti* ottenuti da quello iniziale *sostituendo tale riga* (o colonna) una volta con il *primo* e l'altra volta con il *secondo* dei due *vettori addendi*

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+5 & 3+7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$





Se in un determinante **UNA RIGA (o colonna)** è **SOMMA DI ALTRE DUE**, allora **ESSO E' NULLO**

$$Es. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1+0 & 0 \\ 3 & 3+1 & 1 \\ 5 & 5+0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

3) Se si moltiplica *un vettore riga* (o colonna) *per un numero*,
il determinante **risulta**
moltiplicato per tale numero

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 3 \cdot \det A$$



**un determinante avente
due righe (o due colonne)
proporzionali E' NULLO**



$$\text{Es. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \cdot 1 \\ 1 & 2 & 4 \cdot 2 \\ 3 & 1 & 4 \cdot 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 = 0$$

4) Un determinante ***non cambia*** se ***ad una riga*** (o colonna) ***si somma*** un'altra riga (o colonna) ***moltiplicata per un fattore costante arbitrario***

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2+3 \cdot 1 & 7+3 \cdot 3 & 0+3 \cdot 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

TEOREMA

Moltiplicando gli **elementi di una riga** (o colonna) per i **complementi algebrici** corrispondenti agli **elementi di un'altra riga** (o colonna) e ***sommando*** i prodotti ottenuti **si ottiene zero.**

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0$$

TEOREMA

Se $A, B \in M_n$

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

NB:

In generale,

$$\det (A+B) \neq \det A + \det B$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A + B) = 1 \neq 0 = \det A + \det B$$

Le proprietà 1), 2), 3), 4)
sono molto importanti
per *semplificare il*
calcolo
dei determinanti

ESEMPIO

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sommando alla seconda colonna, la prima moltiplicata per (-2) , il determinante non cambia per la proprietà 4

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2+(-2)\cdot 1 & 1 \\ 2 & 4+(-2)\cdot 2 & 3 \\ 3 & 1+(-2)\cdot 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Se **n è grande** $\Rightarrow$ il calcolo dei determinanti diventa **complicato**

Resta semplice anche per **n grande** nel caso di **matrici triangolari inferiori e superiori**.

In tal caso il determinante è dato dal **PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE**

Se $A = \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & d_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$

Se $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$

In particolare

$$|I_n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema di CRAMER

Sia $\underline{Ax}=\underline{b}$ un *sistema di n equazioni lineari*.

Se $\det A \neq 0$ il sistema ammette **una, ed una sola soluzione**, per ogni scelta del vettore $\underline{b}$ dei termini noti;
il vettore soluzione è dato da

$$\underline{x} = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_m}{D} \right)$$

D_j è il determinante della matrice ottenuta da A , sostituendo alla j -esima colonna il vettore dei termini noti b .

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & b_{i-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & b_{i+1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

NB. $\underline{x} = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_m}{D} \right)$ **si può anche scrivere**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{12}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e poiché **se il sistema è risolubile** $\forall$ scelta di $\underline{b}$
 $\Rightarrow$ **A invertibile** (già visto $\Leftrightarrow$) e l'unica **soluzione**
 è $\underline{x} = A^{-1} \underline{b}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

Ricapitolando:

$$\det A \neq 0$$



sistema univocamente risolubile $\forall \underline{b}$



A invertibile e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

Det $A \neq 0$ caratterizza le MATRICI INVERTIBILI ?

SI

Si può vedere facilmente infatti che

$$***A* invertibile \Leftrightarrow \det A \neq 0**$$

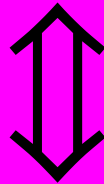
$\Leftarrow$ Già dimostrato

$$\Rightarrow \text{Se } A \text{ è invertibile} \Rightarrow \exists A^{-1} : A^{-1} A = I_n$$

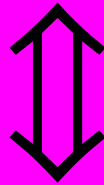
$$\Rightarrow \det(A^{-1} A) = \det I_n \Rightarrow \det A^{-1} \det A = 1$$
$$\Rightarrow \det A \neq 0$$

Conclusione

A invertibile



$A\underline{x} = \underline{b}$ è univocamente risolubile $\forall \underline{b}$



Det A $\neq$ 0