

Metodo di ELIMINAZIONE di GAUSS

Due sistemi di equazioni si dicono

EQUIVALENTI *se ammettono le stesse soluzioni.*

Per passare ad un sistema equivalente si possono eseguire, eventualmente più volte, le seguenti **operazioni**:

- (1) cambiare l'ordine delle equazioni
- (2) moltiplicare l'equazione per una costante non nulla
- (3) sommare ad un'equazione una combinazione lineare delle altre

Utilizzando **(1)** **(2)** e **(3)** si può
trasformare un **sistema DI**
CRAMER in un **sistema**
equivalente in cui la **MATRICE**
DEI COEFFICIENTI sia

TRIANGOLARE

superiore o inferiore

ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x + 6y + 3z = 9 \\ 2x + 5y + 4z = 6 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

**Dividiamo la 1
equazione per 3**

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y + 4z = 6 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la I equazione per 2 e la sottraiamo alla II e alla III $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ -5y - z = -6 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la II equazione per 5 e la aggiungiamo alla III $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 9z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - z + 3 = -8/3 + 2/3 + 3 = 1 \\ y = -2z = 4/3 \\ z = -2/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**E il vettore
soluzione è:**

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 / 3 \\ -2 / 3 \end{pmatrix}$$

SISTEMA DI m EQUAZIONI ED n INCOGNITE

Non sempre in un sistema il *numero delle equazioni* è uguale al *numero delle incognite*.

Consideriamo il caso più generale in cui m

ed n possono essere qualsiasi: $\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$

Con A matrice $m \times n$ $A \in M_{m,n}$

$\underline{x}$ vettore incognito $\underline{x} \in R^n$

$\underline{b}$ vettore dei termini noti $\underline{b} \in R^m$

RANGO di una matrice A ($m \times n$)

Definizione: Data una matrice $A(m \times n)$, se p è un numero naturale ($\neq 0$) *non superiore al più piccolo dei numeri m ed n* , si dice **MINORE DI ORDINE p** della matrice A , un *qualunque determinante di ordine p* ottenuto con gli elementi comuni a p righe e a p colonne di A .

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

E' un minore del secondo ordine
ottenuto prendendo gli elementi
comuni alla I e III colonna e alla
I e II riga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

E' un minore del terzo ordine
ottenuto prendendo gli elementi
comuni alla I, III e IV colonna
e alla I, II e III riga

Qual è il ***massimo ordine***
dei minori che si possono
estrarre da una **matrice**
 $(m \times n)$?

Naturalmente è il più
piccolo fra i numeri m
ed n !

RANGO di A (def.)

Quando *almeno un elemento della matrice A è diverso da zero*, si dice

RANGO (o caratteristica) **DI A**
l'ordine massimo dei minori
non tutti nulli che si possono
estrarre da A .

Se tutti gli **elementi** di A sono **nulli**,
diremo che la **caratteristica** di A è **zero**

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \in M_{3,4} \Rightarrow r(A) \leq 3$$

$$P=3 ?$$

2	3	1	2	3	1	2	1	2
1	2	1	1	1	2	1	1	1
4	6	2	4	4	6	2	4	4

I minori del terzo ordine sono tutti UGUALI A ZERO in quanto *la terza riga è proporzionale alla prima* $\Rightarrow p < 3$

P=2 ?

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

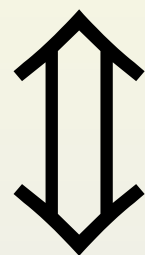
**$\exists$ un minore del secondo ordine
DIVERSO DA ZERO**



p=2

TEOREMA di Kronecker

Una matrice **HA RANGO K**



È possibile estrarre un **minore di ordine K diverso 0** e siano **tutti nulli i minori di ordine K+1** (se ve ne sono) che lo contengono.

ESEMPIO

Determinare il rango p di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \in M_{4,5} \Rightarrow r(A) \text{ è } p \leq 4$$

$$D_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Se i minori del terzo ordine che lo contengono sono uguali a zero $\Rightarrow p=2$

$$D_1^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$D_2^3 \neq 0 \Rightarrow p \geq 3$$

Se tutti i minori del quarto ordine che lo contengono sono uguali a zero $\Rightarrow p=3$, altrimenti $p=4$

$$D_1^4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2^4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow p = 3$$

Siano

$$A \in M_{m,n} \quad \underline{x} \in R^n \quad \underline{b} \in R^m$$

Allora

$$A \in M_{m,n} = \text{matrice incompleta}$$

$$A' \in M_{m,n+1} = \text{matrice completa}$$

(si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti)

Osservazione:

Possono presentarsi **2 CASI**:

✧ o la caratteristica della *matrice completa* è maggiore di quella della *matrice incompleta*

✧ o le due *matrici* hanno la **stessa caratteristica**

Quando un **SISTEMA DI**
m EQUAZIONI IN n INCOGNITE

è ***compatibile***

(ammette soluzioni) ?

TEOREMA di Rouché Capelli

Un sistema lineare

di m equazioni in n incognite $A\underline{x}=\underline{b}$

AMMETTE SOLUZIONI



$$r(A)=r(A')$$

Osservazione:

Un sistema di **m equazioni** in **n**
incognite **$A\underline{x}=\underline{b}$**

con **$\underline{b}=\underline{0}$** si dice **OMOGENEO**

*Un sistema omogeneo è sempre
compatibile: esso ammette
sempre la soluzione nulla **$\underline{x}=\underline{0}$***

(d'altra parte $r(A)=r(A')$)

Come si procede per
risolvere un **SISTEMA**

$$\underline{A}\underline{x}=\underline{b}$$

compatibile?

Sia k il *rango comune* di A e A' .

✧ Si considerano soltanto k delle m equazioni trascurando le altre $m-k$

La scelta va fatta in maniera tale che la matrice dei coefficienti delle k equazioni scelte abbia rango k

⇒ Sistema di k equazioni in n incognite

✧ In questo **sistema** di **k equazioni** in **n incognite** si scelgono **k incognite** in modo che il determinante dei loro coefficienti sia diverso da zero; alle altre **n-k incognite** si attribuiscono valori arbitrari

⇒ sistema di **k equazioni** in **n incognite** il cui determinante dei coefficienti è $\neq$ da 0 che può essere **risolto con Cramer**

Quindi:

- ◆ Se $k < n$ il sistema ammette *infinite soluzioni* dato che ad $n-k$ incognite si possono dare valori arbitrari (si dice ∞^{n-k} soluzioni)
- ◆ Se $k = n$ il sistema ammette *una, ed una sola, soluzione*

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = -7(-20) - 5(28) = 0$$

Il sistema non è di Cramer

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

Il sistema è compatibile ?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 2(-18 - 26) - 1(6 - 10) + 3(13 + 15) = \\ &= -88 + 4 + 84 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Per Kronecker $\Rightarrow r(A)=r(A') \Rightarrow$ **il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases}$$

Risolviamo con la regola di Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + x_3 & 1 \\ 2 - 2x_3 & -3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-x_3 - 11}{-7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 + x_3 \\ 1 & 2 - 2x_3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-5x_3 + 1}{-7}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}x_3 + \frac{11}{7} \\ \frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7} \\ x_3 \end{pmatrix}$$