

Funzioni di più variabili

Le funzioni reali di variabile reale non sono idonee alla descrizione e allo studio di molti fenomeni naturali



Occorrono funzioni più generali:

$$y = g(x)$$

$$\text{dove } g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\Rightarrow$ ci limiteremo in questo corso a considerare funzioni di due variabili

$$\text{dove } g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ESEMPIO

Funzione di produzione di Cobb-Douglas

$$y = aK^{\alpha}L^{1-\alpha} = g(K, L) \quad \text{con } a > 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1$$

Questa legge definisce una ***funzione di due variabili*** che lega il prodotto nazionale annuo y di un paese, alla disponibilità di capitale K e di lavoro L

Definizione

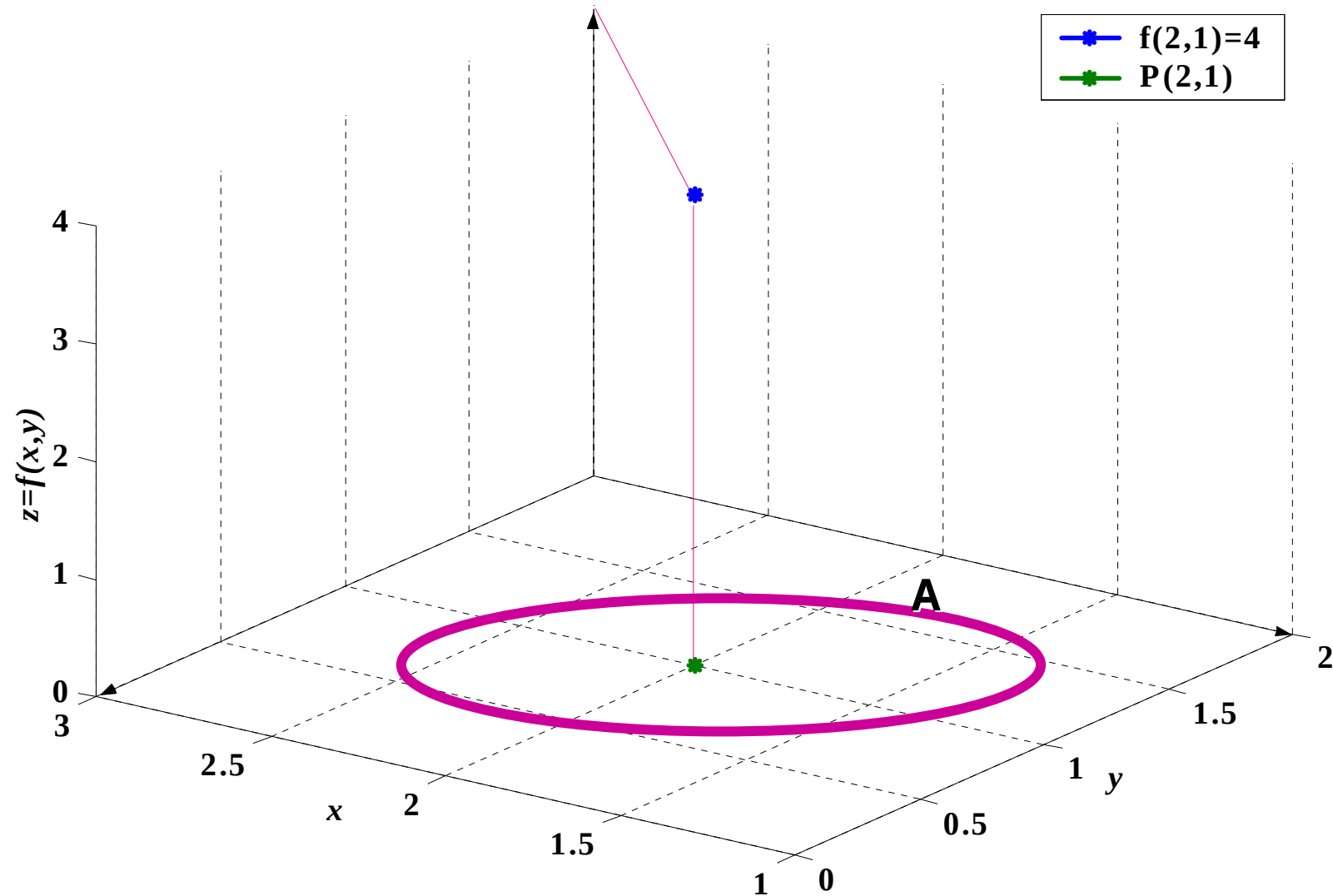
Una funzione reale di due variabili

$$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

è una legge che **ad ogni punto $P(x,y)$** dell'insieme A associa uno, ed un solo, elemento $z=f(x,y)$ di $\mathbb{R}$

A si chiama dominio della funzione

Immagine di un punto P del dominio A di f



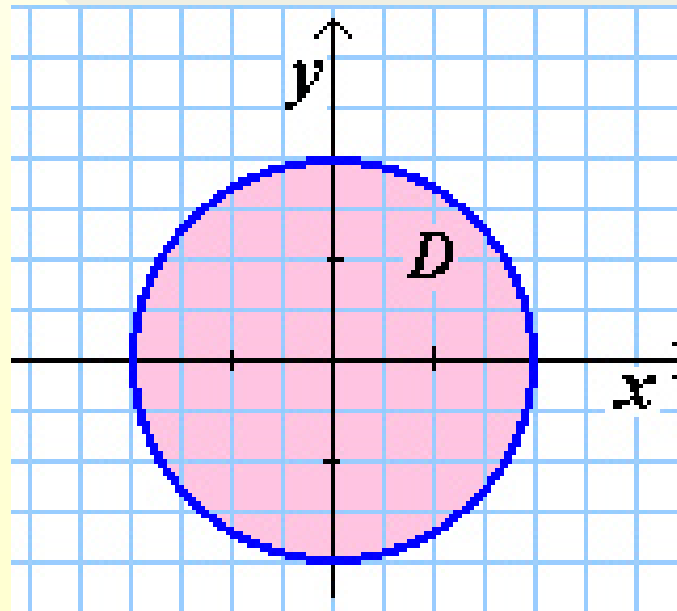
Come nel caso di funzioni di una variabile, *se non è specificato il dominio A di f* ma è definita solamente la legge, si intende come dominio il **DOMINIO NATURALE** di f cioè **il più grande insieme sul quale la legge data abbia senso**

ESEMPIO

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Il dominio di f è

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \end{aligned}$$



ESEMPIO

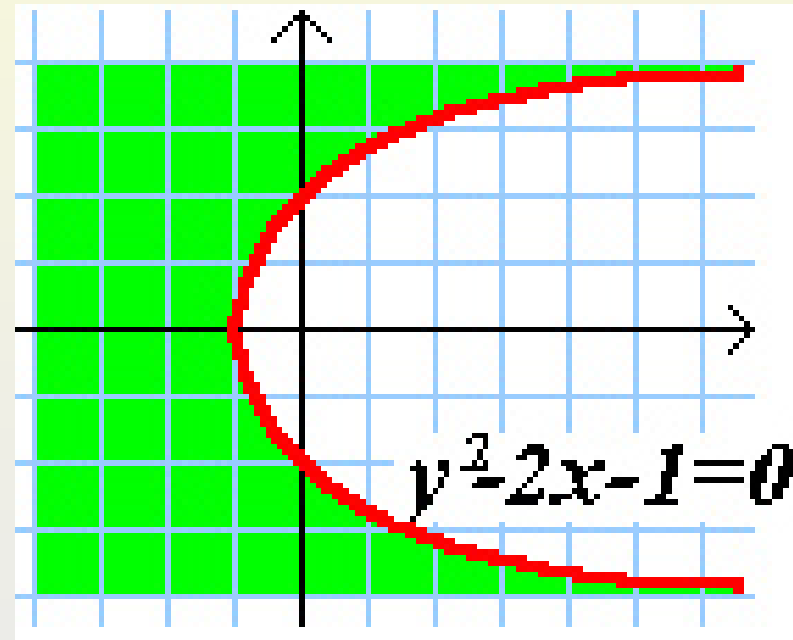
$$f(x, y) = \sqrt{\log(y^2 - 2x)}$$

Affinchè $f(x, y)$ abbia senso

$$\begin{cases} y^2 - 2x > 0 \\ \log(y^2 - 2x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2x > 0 \\ y^2 - 2x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2x - 1 \geq 0\}$$



Il **grafico** della funzione di due variabili

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è l'insieme

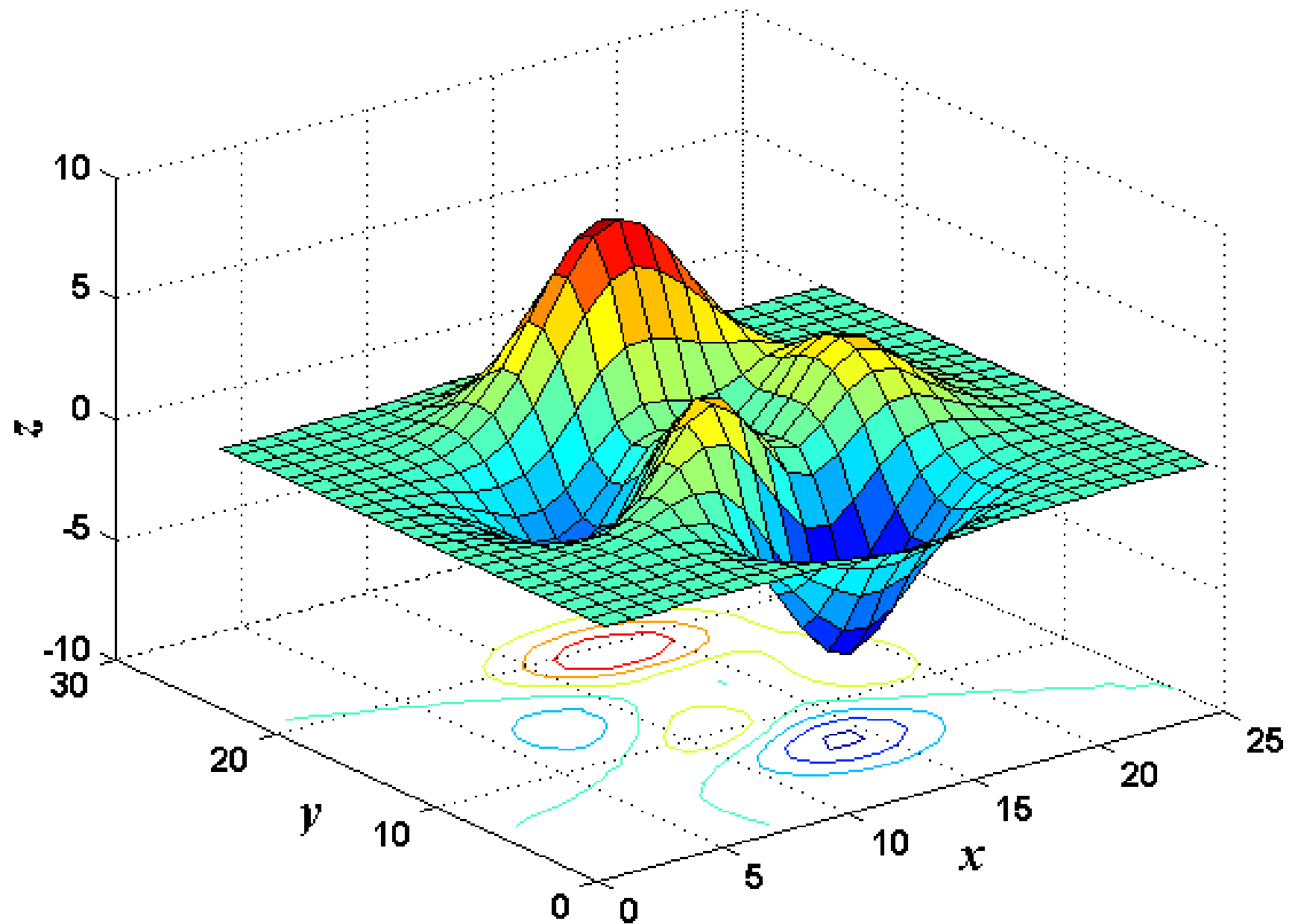
$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in A \text{ e } z = f(x, y)\}$$

E' quindi una superficie S nello spazio (x, y, z)

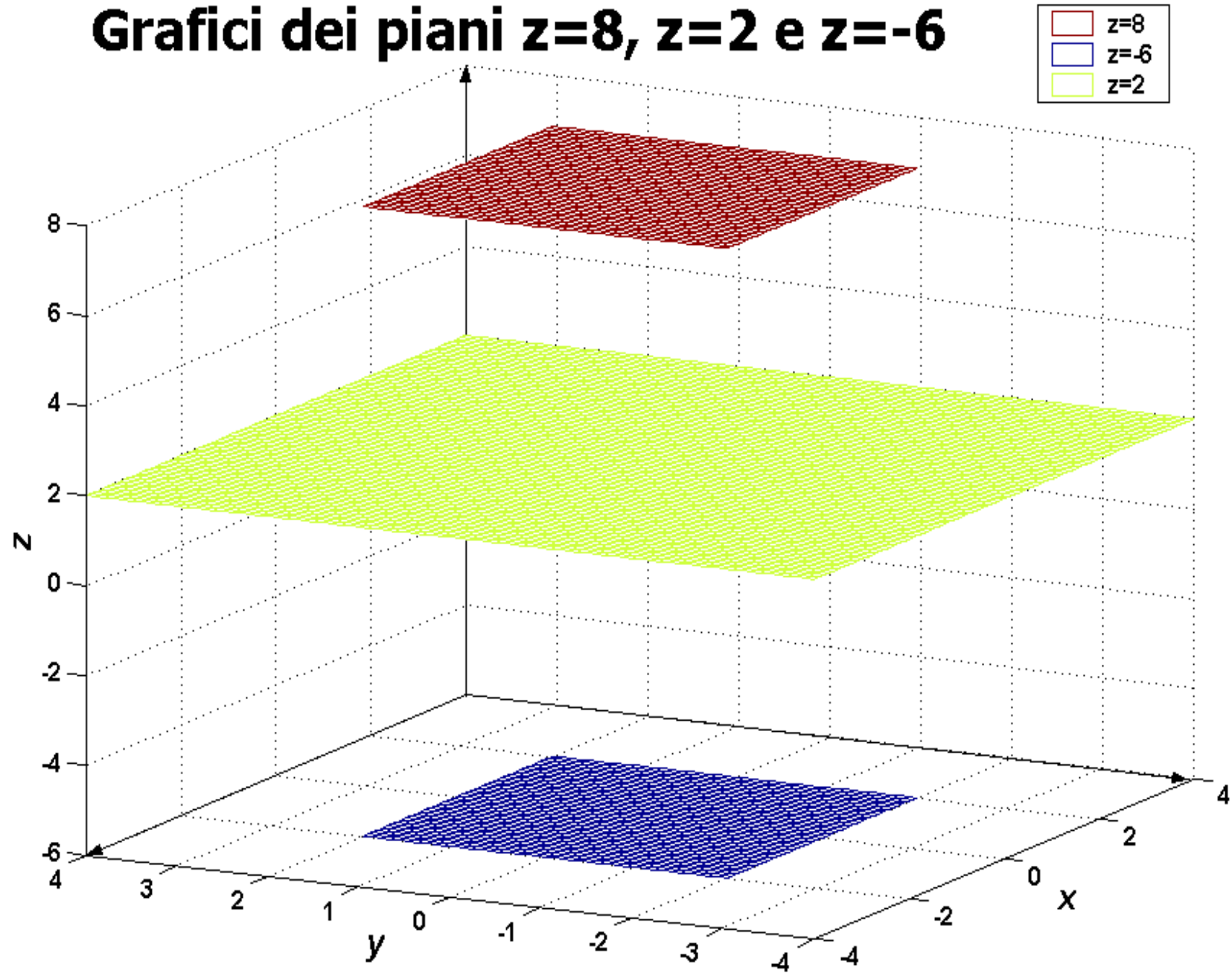
NB: ogni retta perpendicolare al piano x, y incontra la superficie S in un solo punto

NB: il grafico della funzione $f(x, y) = K$ è un piano parallelo al piano (x, y) avente quota K

Superficie S nello spazio (x,y,z)



Grafici dei piani $z=8$, $z=2$ e $z=-6$



Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

si dice **limitata superiormente**, **limitata inferiormente**, **limitata** se il suo *insieme immagine* $f(A) \subset \mathbb{R}$ è **limitato superiormente**, **limitato inferiormente** o **limitato**

**Estremo superiore, estremo inferiore,
se esistono, massimo e minimo di f
coincidono con**

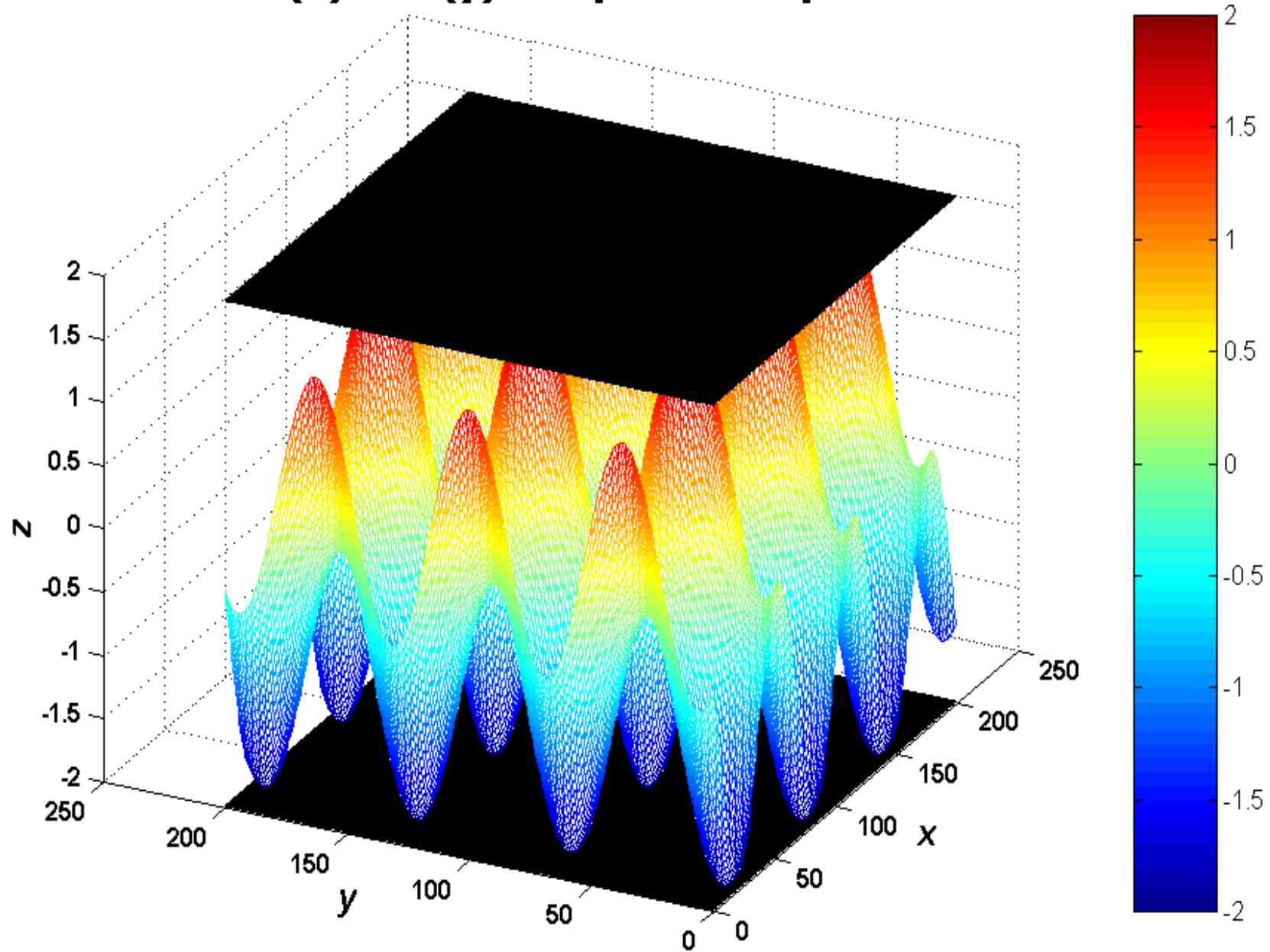
il sup, l'inf il max e il min di $f(A)$

Osservazione:

Dire che la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

è limitata, significa dire che **esistono** due piani paralleli al piano (x,y) , **$z=K$** e **$z=H$** , tali che il grafico di f non va “oltre” il piano $z=K$ e non scende al di sotto del piano $z=H$

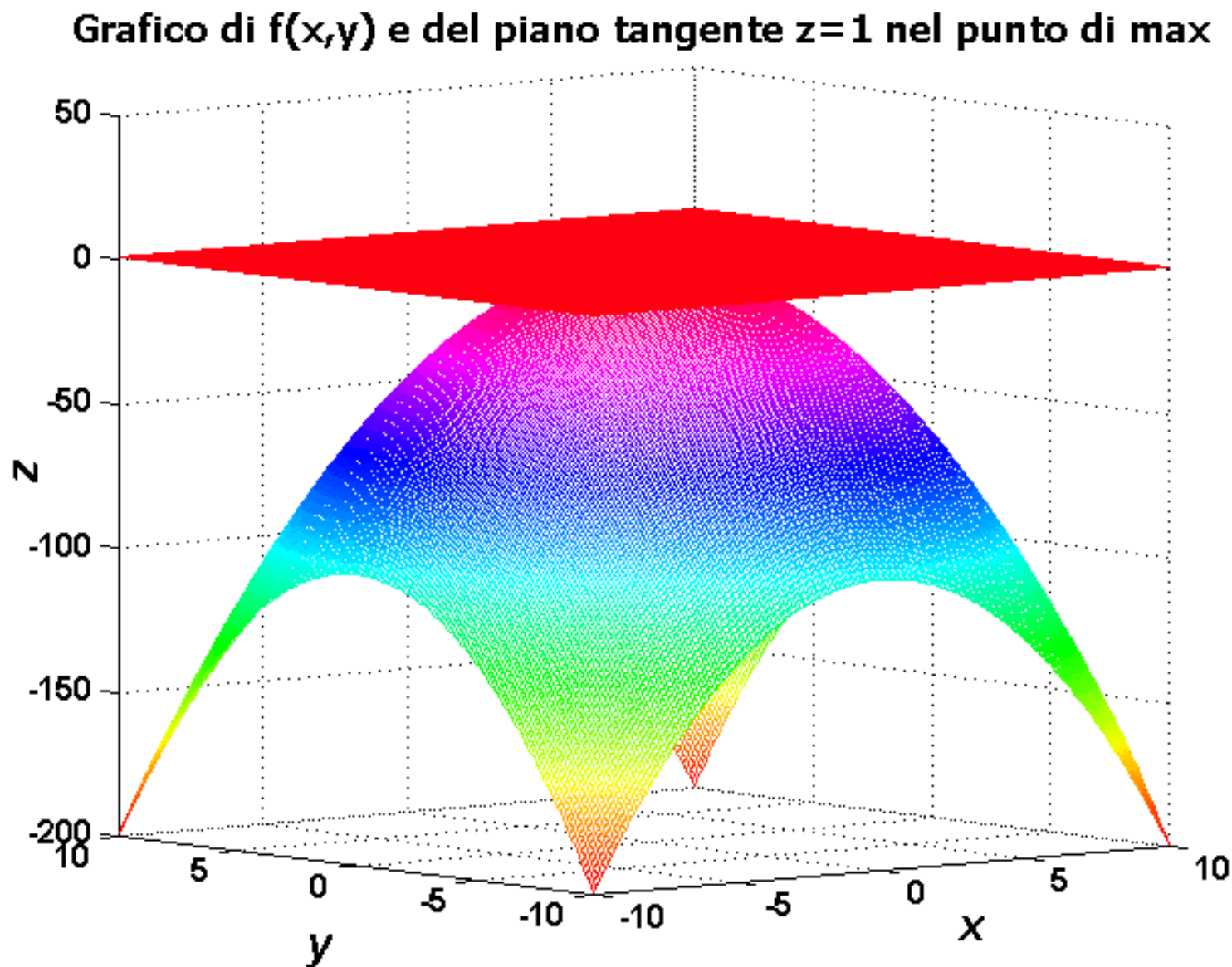
Funzione $z=\sin(x)+\cos(y)$ compresa fra i piani $z=-2$ e $z=2$



Il dominio di f è $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$z=1$ è il max di $f(x,y)$ $f(x,y)$ è illimitata inferiormente



Per comprendere “l’andamento” di una funzione

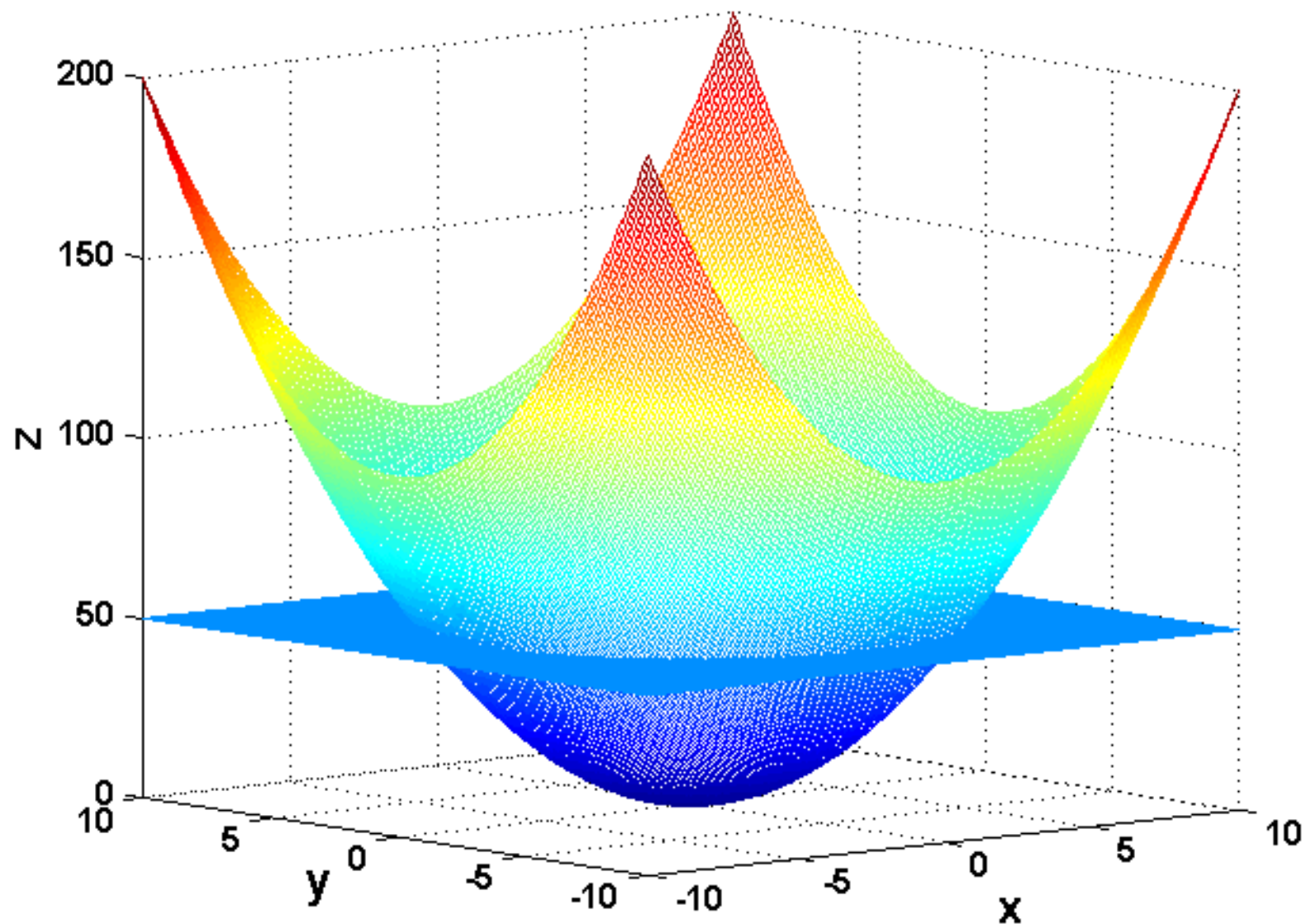
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

sono molto usate le **LINEE DI LIVELLO**

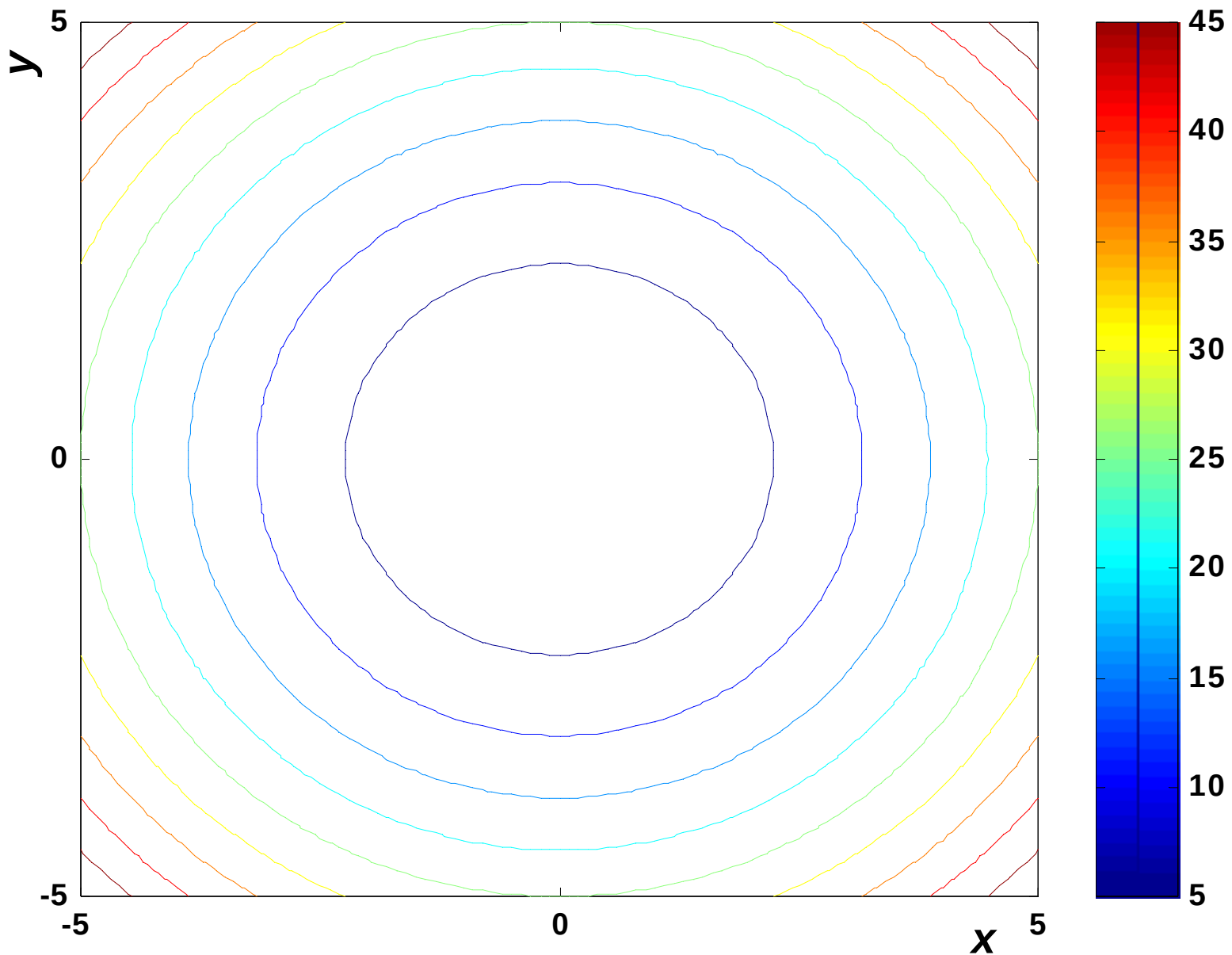
Le curve di livello **si ottengono** intersecando la superficie con un piano parallelo all’asse x,y e proiettando poi ortogonalmente sul piano x,y le curve che si ottengono

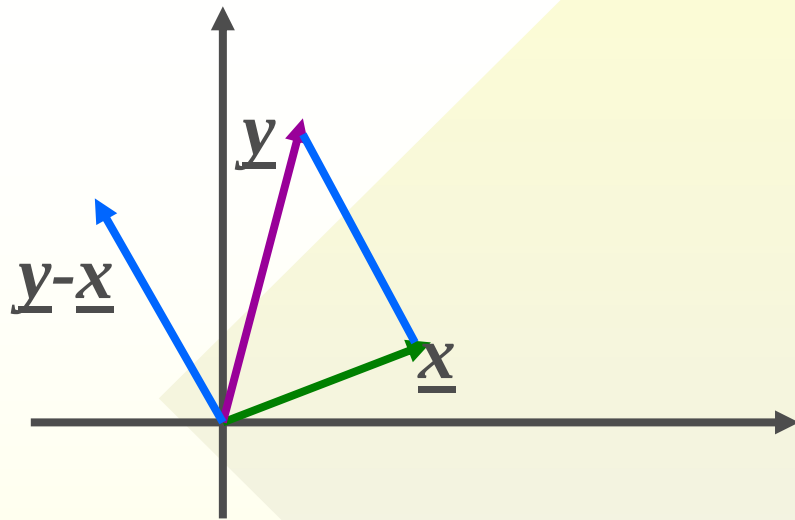
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Grafico di $f(x, y)$ intersecato con il piano $z=50$



Linee in corrispondenza delle quali la funzione assume valore costante $z=c$





Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{y} - \underline{x} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$$

$$\|\underline{y} - \underline{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$\|\underline{y} - \underline{x}\|$ coincide coincide con la **lunghezza del vettore $\underline{y} - \underline{x}$** cioè con la lunghezza del vettore di estremi $\underline{x}$ e $\underline{y}$ quindi con la **distanza euclidea dei due vettori**

Definiamo distanza fra due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

NB: Se

$$x, y \in \mathbb{R} \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

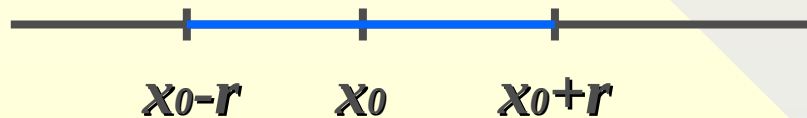
anche in questo caso **la $\|x - y\|$ coincide con la distanza euclidea fra i due punti x e y**



Intorno di un punto

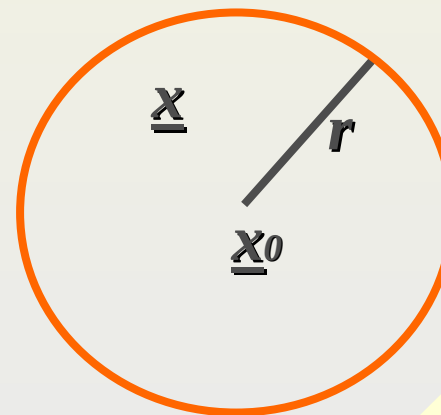
In $\mathbb{R}$

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

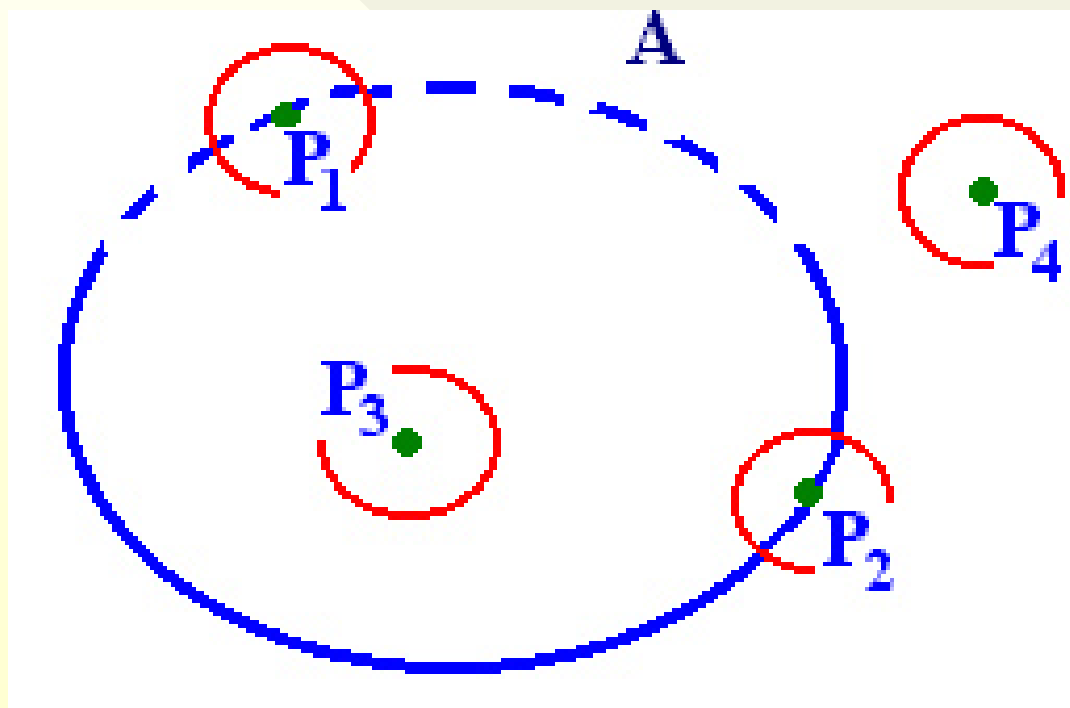


In $\mathbb{R}^2$

$$I(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x}, \underline{x}_0) < r\} = \\ = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}$$



Con questa definizione di intorno di un punto in $\mathbb{R}^2$ si possono estendere le definizioni di **punto interno**, **punto esterno**, **punto di frontiera**, **insieme aperto**, **insieme chiuso** già viste per insiemi $A \subset \mathbb{R}^2$

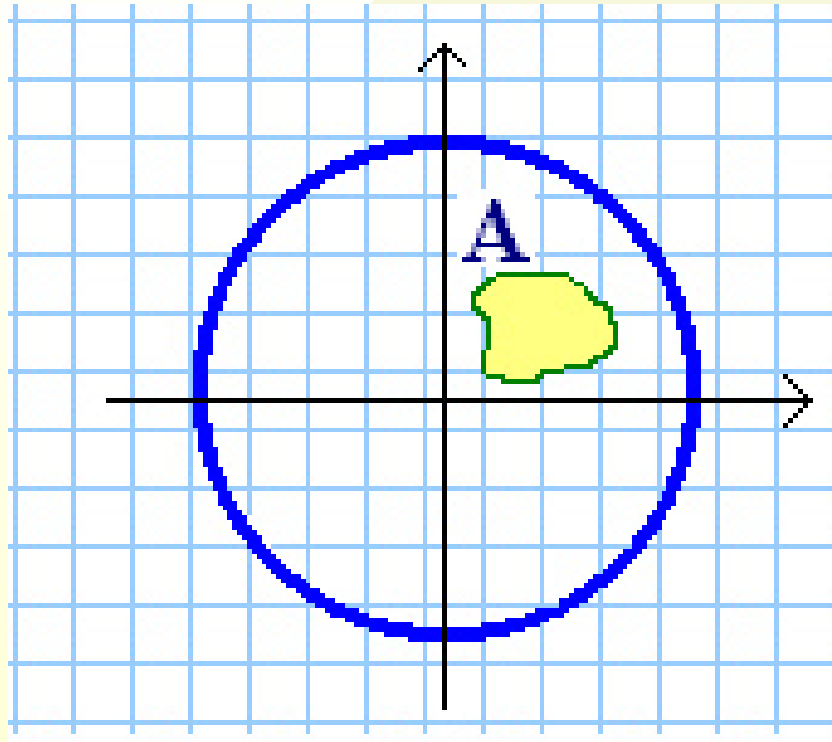


P_2 e P_1 punto di frontiera di A

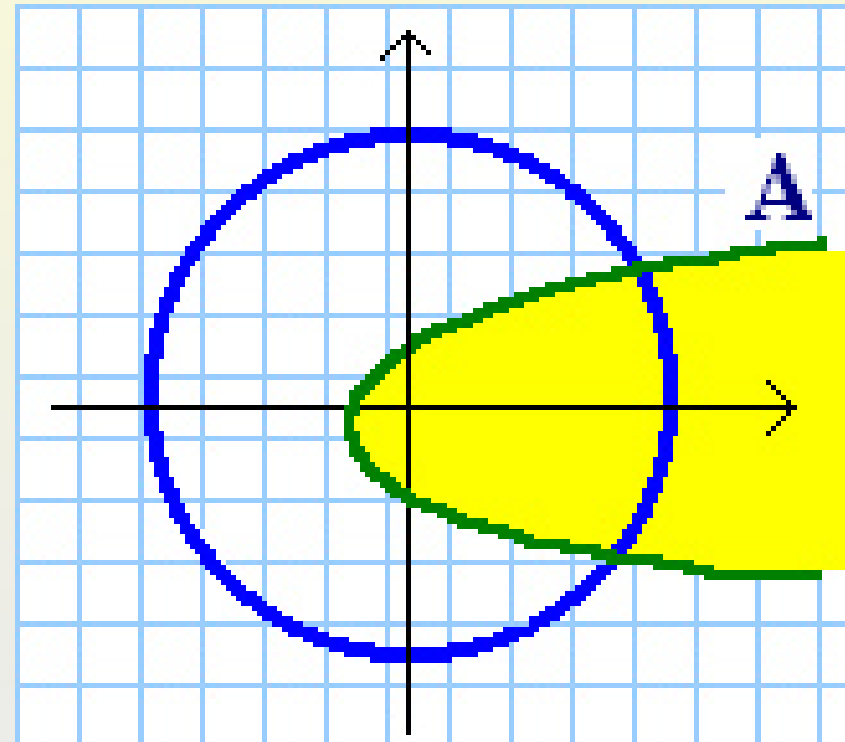
P_3 punto interno ad A

P_4 punto esterno ad A

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice **limitato** se $\exists$ un **intorno dell'origine che lo contiene**



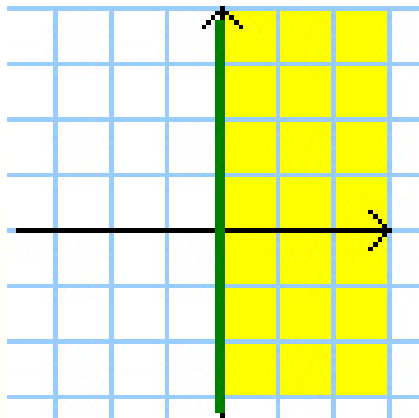
A limitato



A illimitato

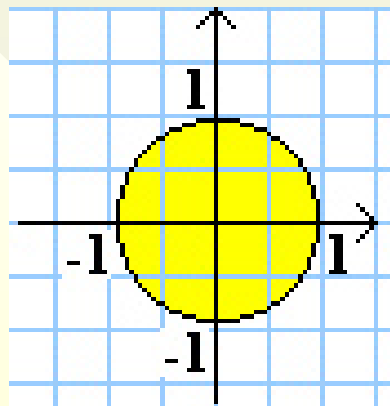
Un insieme **CHIUSO** e **LIMITATO** si dice **COMPATTO**

Esempi



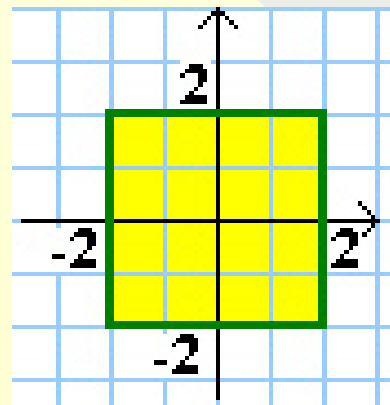
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$$

è un insieme **CHIUSO**
ma **ILLIMITATO**



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

è un insieme **APERTO**
e **LIMITATO**



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y, x \in [-2, 2]\}$$

è un insieme **CHIUSO**
e **LIMITATO**

LIMITI

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0)$ punto
di accumulazione del dominio D

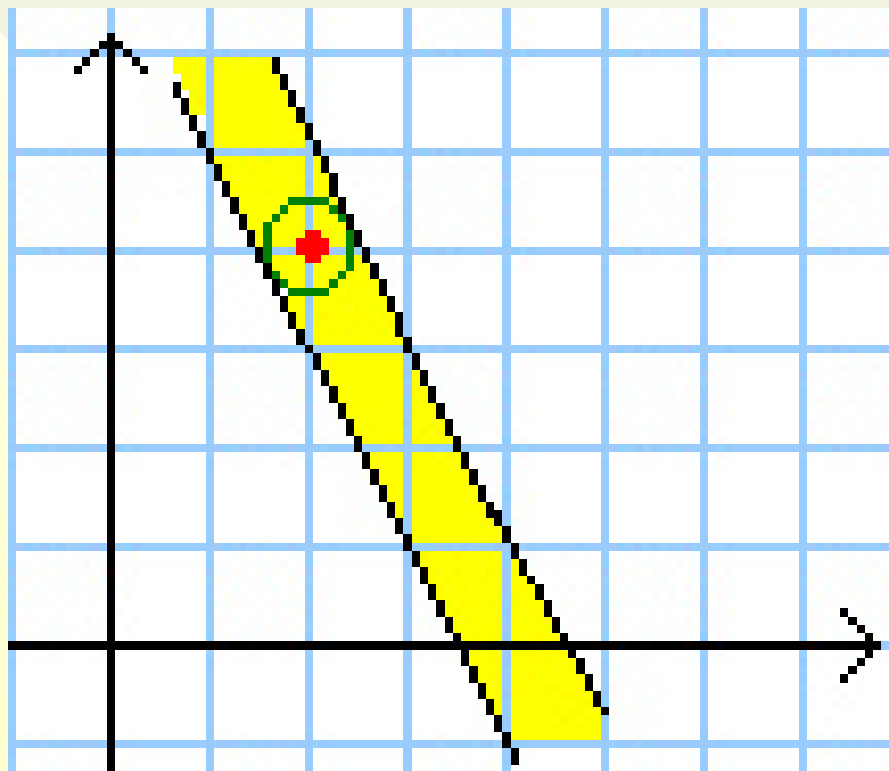
Si dice che l è il limite di $f(x, y)$ per
 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall P \in I(P_0, \delta) \cap D - \{P_0\}$
si ha $|f(x, y) - l| < \varepsilon$

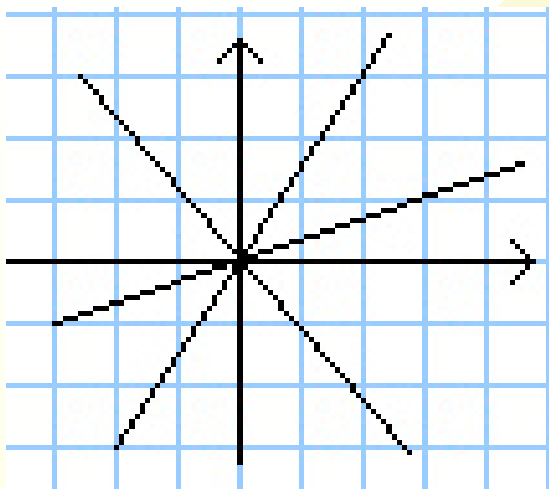
Esempio**Verificare che** $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (2x + y) = 4$

$$\begin{aligned} |2x + y - 4| < \varepsilon &\Rightarrow 4 - \varepsilon < 2x + y < 4 + \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2x + 4 - \varepsilon < y < -2x + 4 + \varepsilon \end{aligned}$$



Esempio Dimostrare che non esiste

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$



$y=mx$ fascio di
rette uscenti
dall'origine

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{per } m = 0 & f(x, 0) = 0 \\ \text{per } m = 1 & f(x, x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Comunque si consideri un intorno dell'origine,
in esso cadono sia punti in cui $f(x, y) = 0$ sia
punti in cui $f(x, y) = 1/2 \Rightarrow$ **IL LIMITE NON
ESISTE**

Osservazione

$$\text{Se } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = l$$



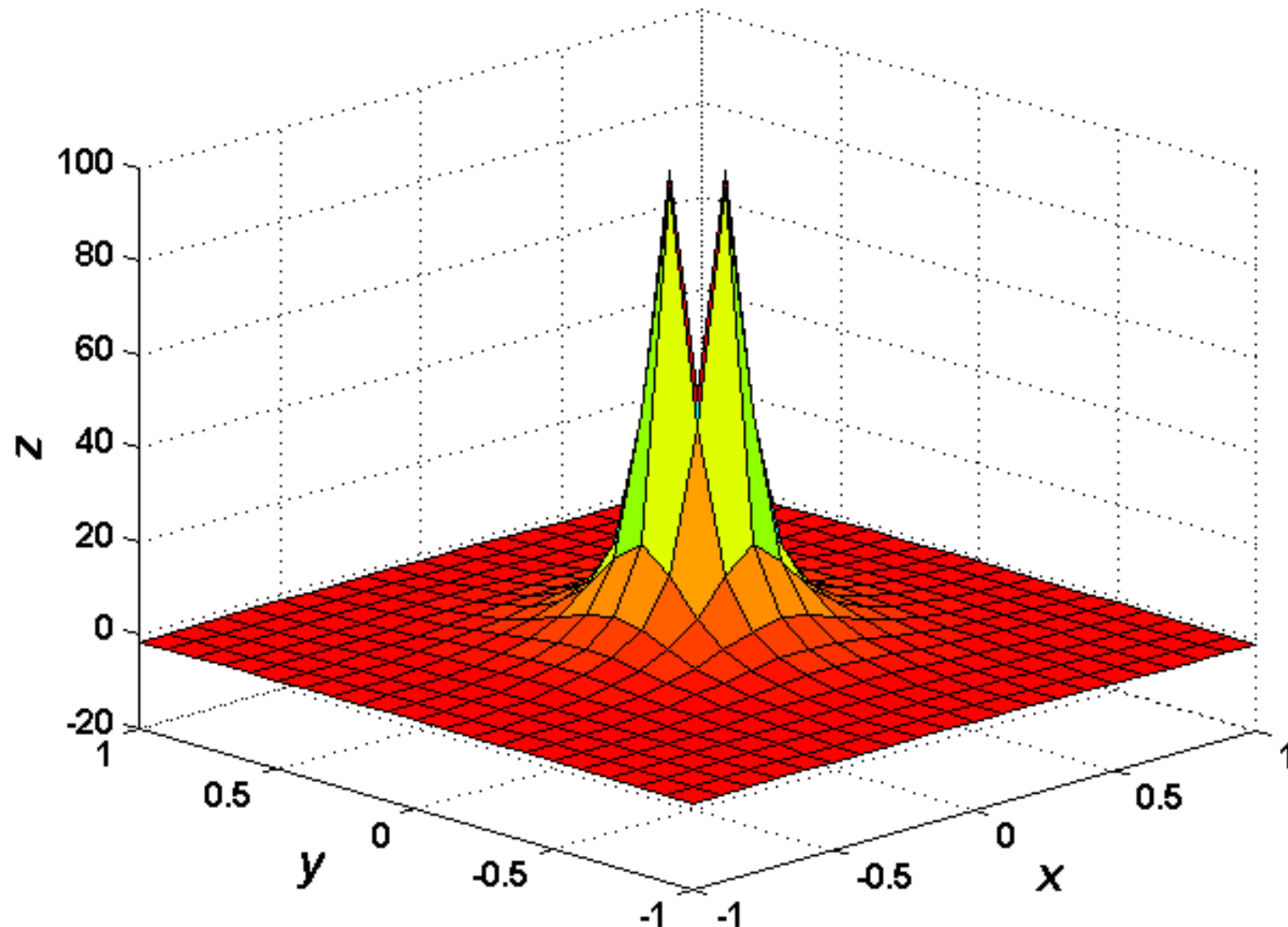
Ogni restrizione di f ad un insieme che abbia (x_0, y_0) come punto di accumulazione, **ha lo stesso limite**

In maniera analoga, lo studente provi a farlo, si definiscono:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = l$$

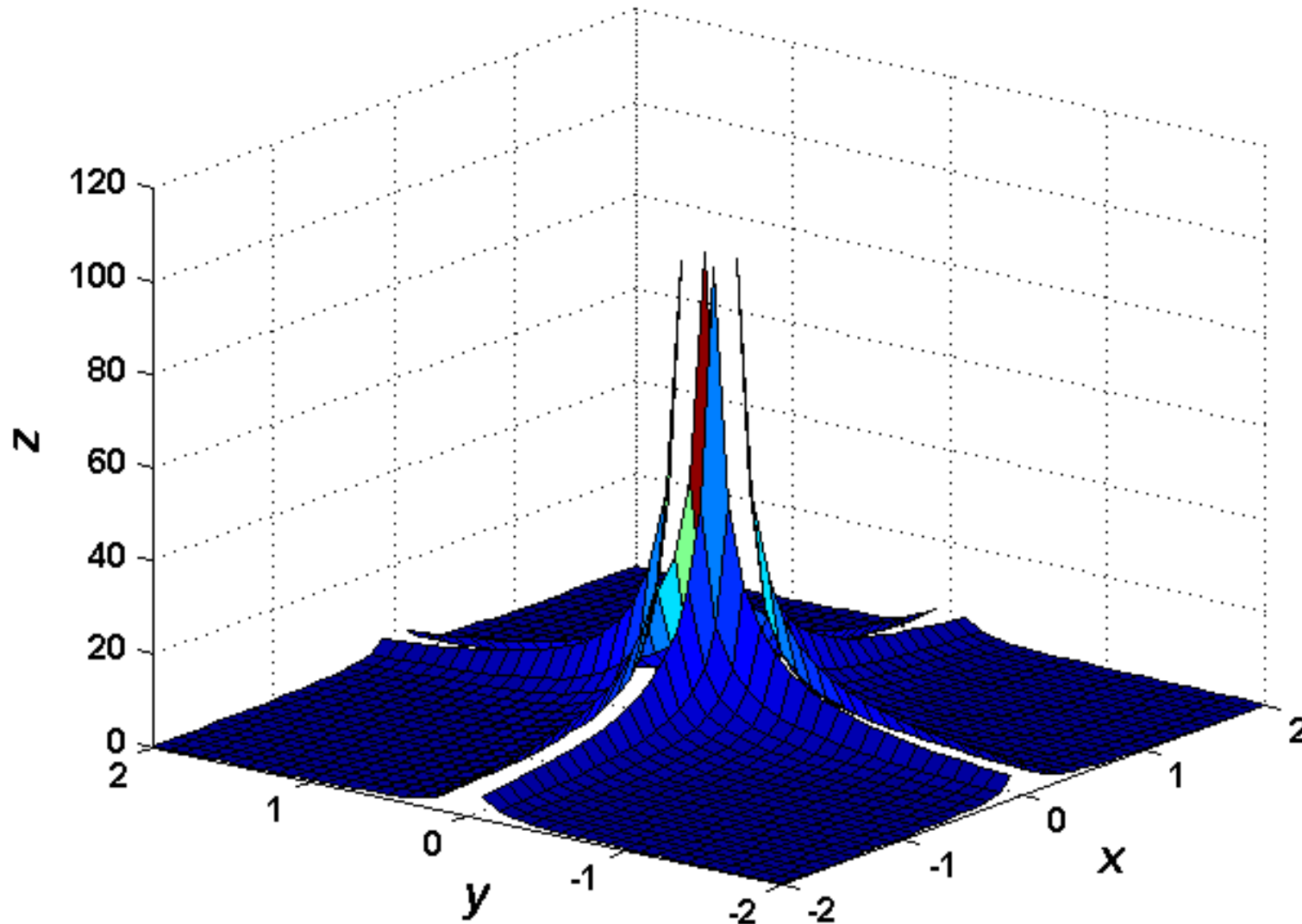
$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} - 2$$

Limite finito per (x, y) tendenti ad infinito



$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \pm\infty \quad f(x, y) = \frac{1}{|xy|}$$

Limite infinito per (x, y) tendenti ad un valore finito



Funzioni continue

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, P_0 = (x_0, y_0) \in D$
punto di accumulazione del dominio D

f si dice **CONTINUA** in $P_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

**(cioè quando esiste il limite e coincide col
valore che la funzione assume nel punto)**

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è **CONTINUA IN A**
se essa è **continua** $\forall P \in A$

**NB: I principali teoremi sulla continuità
visti per $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valgono anche per**

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$