

Derivate parziali di $f(x,y)$

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, P_0 = (x_0, y_0) \in A$$

punto di accumulazione del dominio A

f si dice

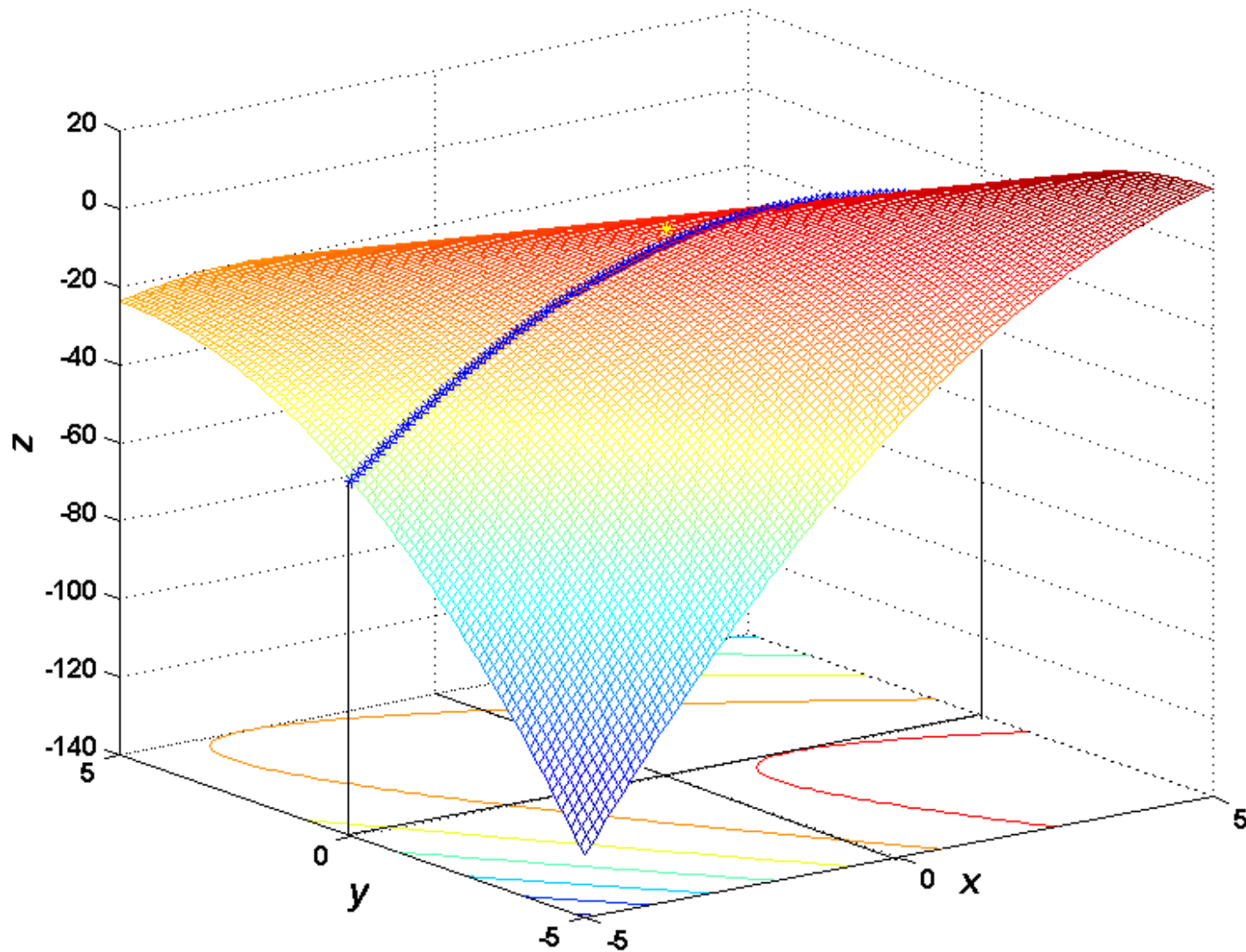
DERIVABILE PARZIALMENTE

RISPETTO AD x in $P_0 = (x_0, y_0)$

se **ESISTE** ed è **FINITO**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f(x, y) = -(x-2)^2 - 2xy - y^2 \quad P_0 = (0, 0) \quad * = f(x, 0) \quad * = f(0, 0)$$

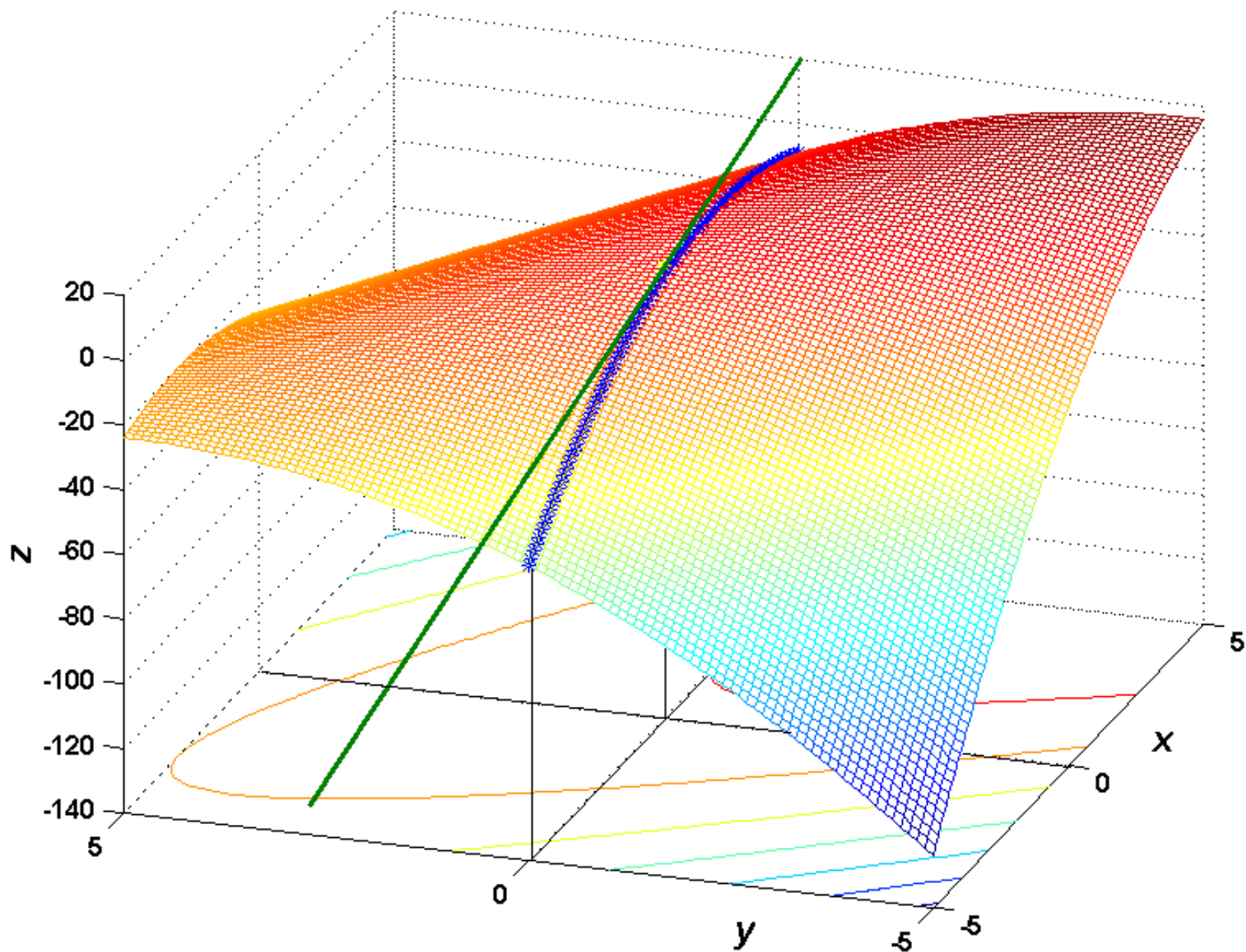


Se tale limite **ESISTE FINITO** esso si chiama **derivata parziale rispetto ad x di $f(x,y)$** nel punto P_0 e si indica con una delle seguenti notazioni

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

NB: La **derivata parziale rispetto ad x altro non è che la derivata della funzione nella sola variabile x , $f(x, y_0)$ quindi geometricamente rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente a tale curva nel punto (x_0, y_0)**

Retta tangente ad $f(x,y)$ nel punto $(0,0)$



In maniera analoga, *lo studente provi a farlo*, si definisce **la derivata parziale di f rispetto ad y**

ESEMPIO

Calcolare le derivate parziali prime di

$$f(x, y) = 3x + \log(x - y) + xy^2$$

nel punto $P_0 = (2, 1)$

$$f(x, y_0) = f(x, 1) = 3x + \log(x - 1) + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 1) = 3 + \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(2, 1) = 3 + 1 + 1 = 5$$

...continua

$$f(x_0, y) = f(2, y) = 6 + \log(2 - y) + 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(2, y) = -\frac{1}{2 - y} + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y'(2, 1) = -1 + 4 = 3$$

Osservazione

Il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ si chiama

vettore gradiente della funzione f e

si indica con la notazione ∇f



Il gradiente di $f(x, y) = 3x + \log(x - y) + xy^2$
nel punto $(2, 1)$ è $\nabla f(2, 1) = (5, 3)$

ESEMPIO

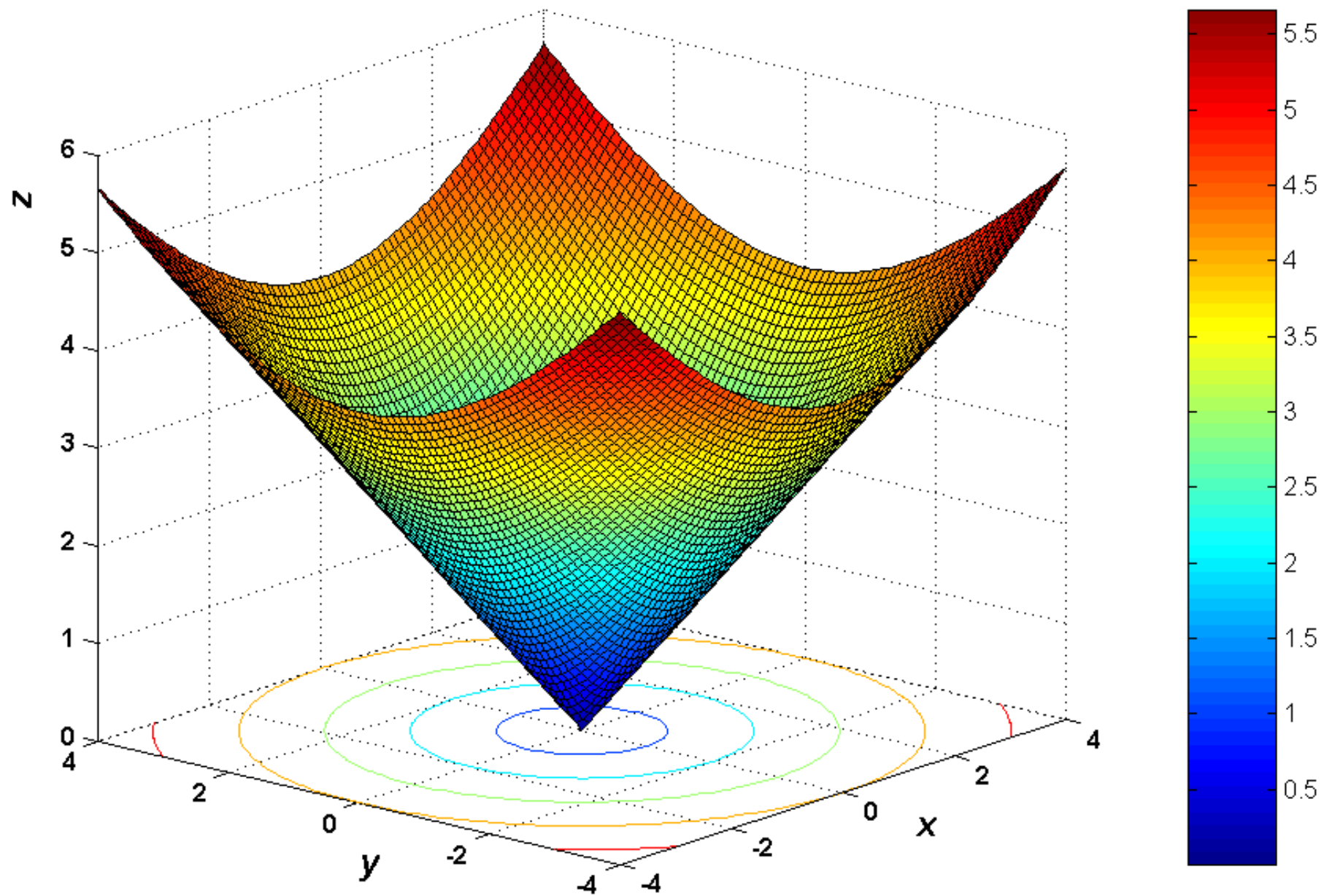
Dimostrare, utilizzando la definizione, che la funzione assegnata non è derivabile parzialmente nel punto $0=(0,0)$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \not\exists$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y} \not\exists$$

Grafico di $f(x,y)$



Osservazione

Mentre nel caso di funzioni di una variabile

DERIVABILITA' $\Rightarrow$ CONTINUITA'

per funzioni di due variabili

DERIVABILITA' PARZIALE



CONTINUITA'

ESEMPIO

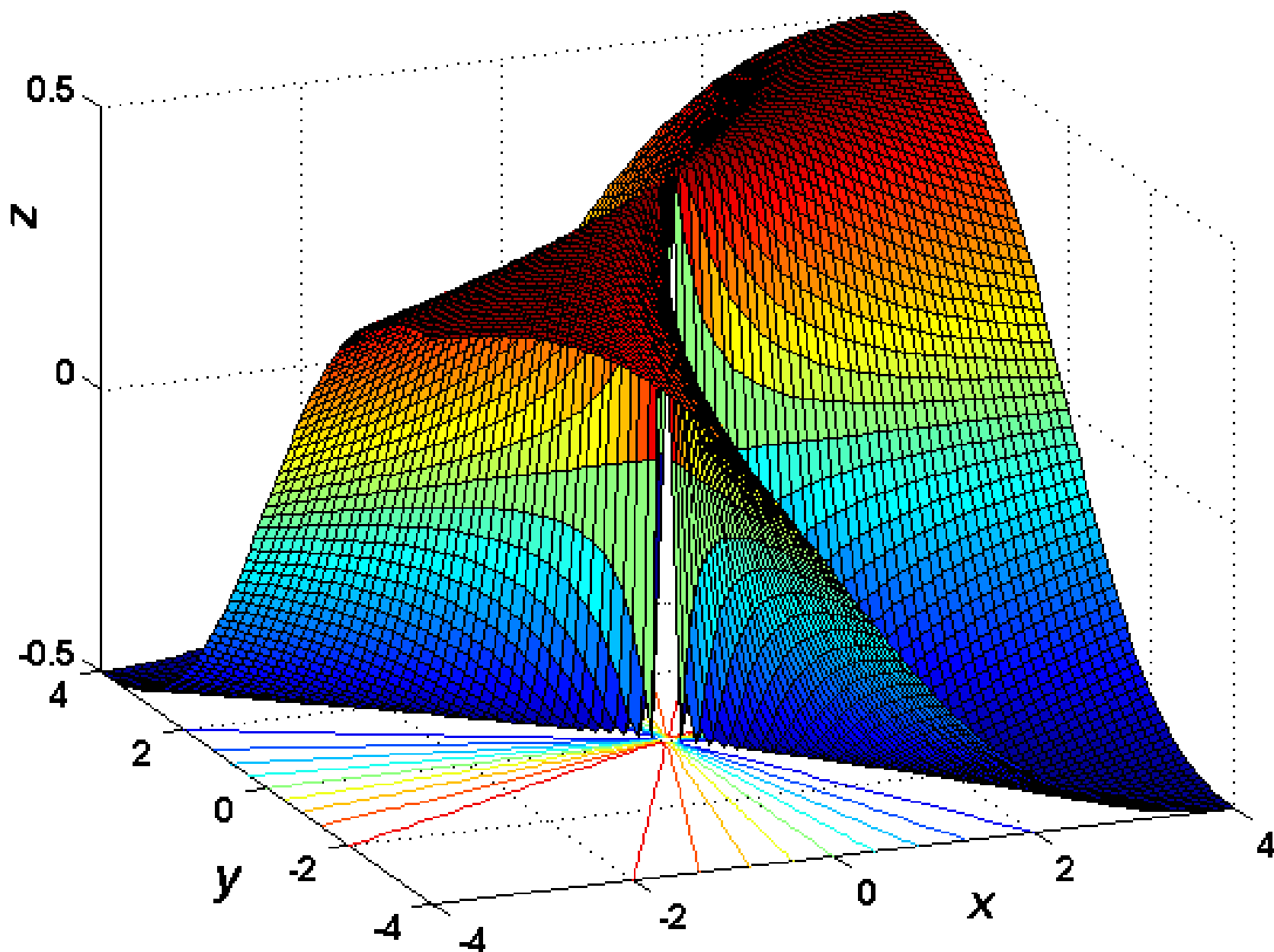
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{per } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(x, y) \text{ è DISCONTINUA in } (0, 0)$$

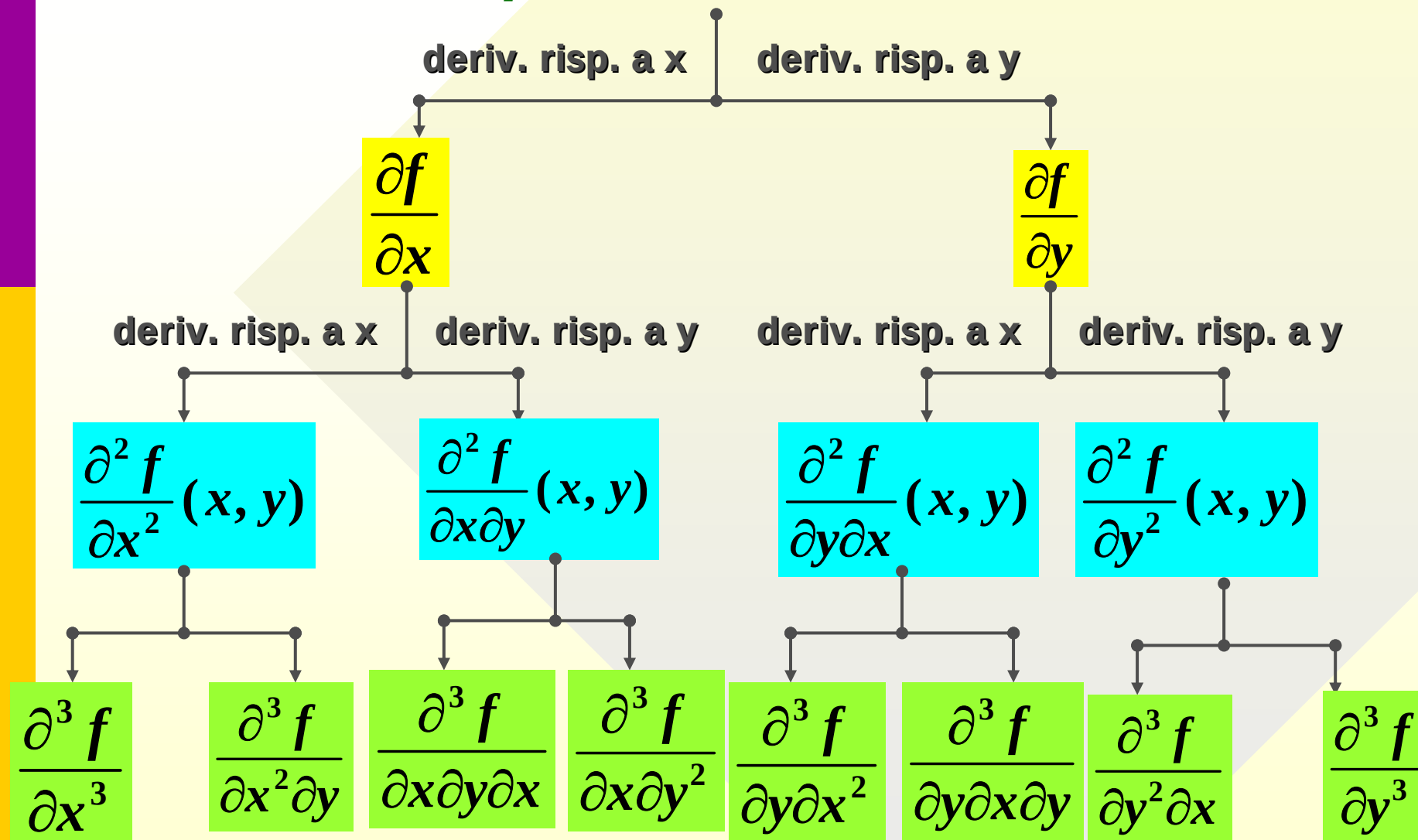
$$\text{Ma } \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 = f_x(0, 0)$$

$$\text{ed } \exists \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0 = f_y(0, 0)$$

Grafico di $f(x,y)$ derivabile parzialmente in $(0,0)$ ma ivi discontinua



$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



NOTAZIONI

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (o f_{xx}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (o f_{yy}), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (o f_{xxx}) \dots$$

Sono le DERIVATE PURE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (o f_{xy}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (o f_{yx}), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (o f_{xxy}) \dots$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} (o f_{xyx}), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} (o f_{xyy}) \dots$$

Sono le DERIVATE MISTE

ESEMPIO

Data la funzione $f(x, y) = e^{x+y}x + x^4y$ calcolare $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$

$$f_x(x, y) = e^{x+y}x + e^{x+y} + 4x^3y$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{x+y}x + e^{x+y} + e^{x+y} + 12x^2y$$

$$f_y(x, y) = e^{x+y}x + x^4$$

$$f_{yx}(x, y) = e^{x+y}x + e^{x+y} + 4x^3$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}(x, y) = xe^{x+y} + 2e^{x+y} + 12x^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{yxx}(x, y) = e^{x+y} + xe^{x+y} + e^{x+y} + 12x^2$$

TEOREMA DI SCHWARZ

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ammette derivate seconde miste in un intorno di un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.

f_{xy} e f_{yx} **CONTINUE** in P_0



$$f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$$

Definizione

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che f è
DIFFERENZIABILE in $P_0(x_0, y_0) \in A$
se $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - [a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

**Si dimostra che f differenziabile in $P_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists f_x(P_0) \text{ e } f_y(P_0) \text{ e } a_1 = f_x(P_0) \text{ e } a_2 = f_y(P_0)$**



$$df(P_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si chiama DIFFERENZIALE di f in P_0

NB:

Se $f(x, y) = x$

$$df(P_0) = dx = (x - x_0)$$

Se $f(x, y) = y$

$$df(P_0) = dy = (y - y_0)$$



$$df(P_0) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$$

Da un punto di vista geometrico



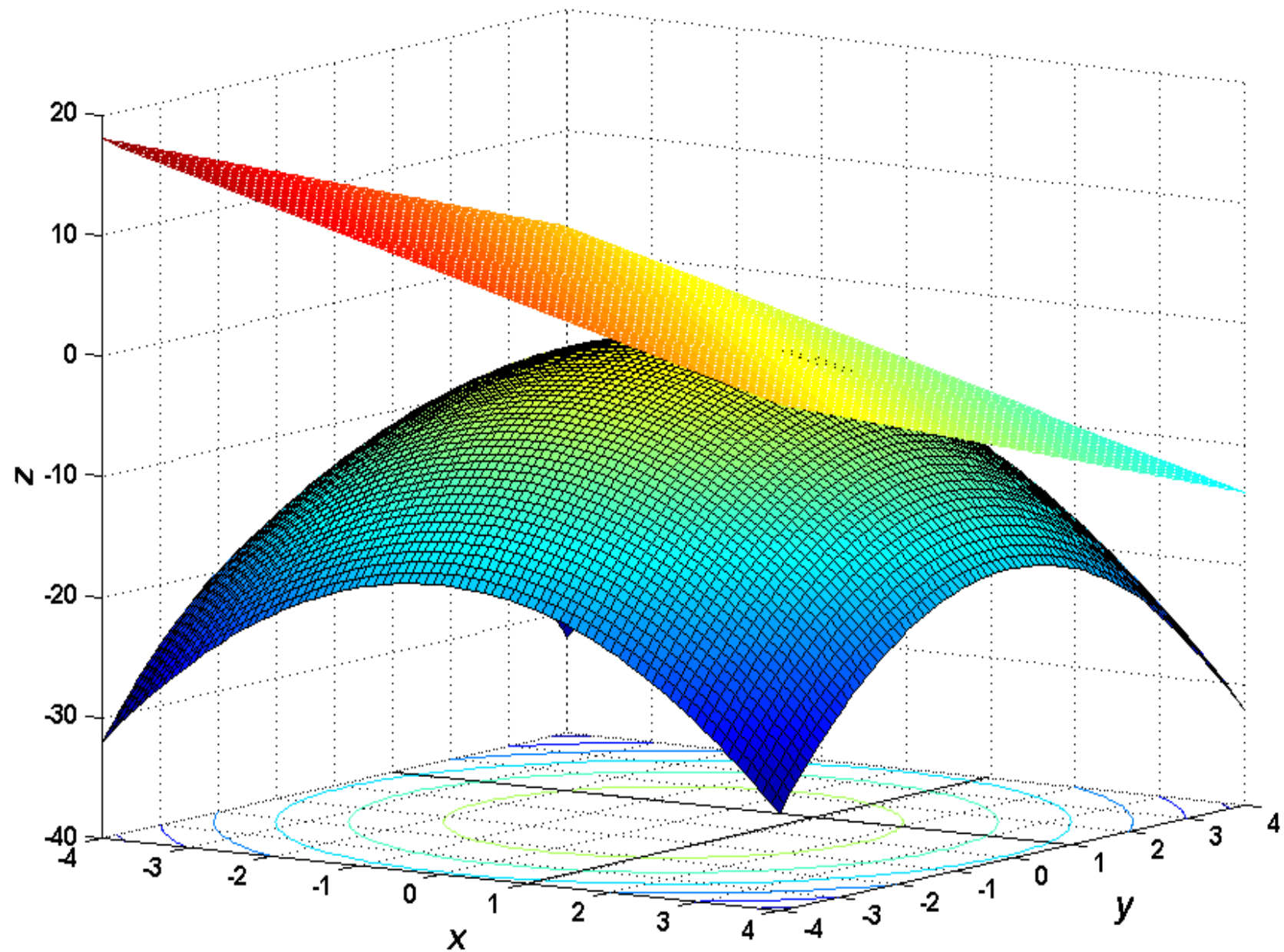
f differenziabile in $P_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ il grafico di f è dotato in P_0 di PIANO TANGENTE di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dalla definizione di differenziabilità $\Rightarrow$ il grafico della funzione può essere “ben” approssimato in un intorno di P_0 , dal piano tangente Π

Grafico del piano tangente ad $f(x,y)$ nel punto $(1,1)$



**f differenziabile in $P_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ derivabile parzialmente in P_0**

Dalla definizione di differenziabilità $\Rightarrow$

**f differenziabile in $P_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ continua in P_0**

ATTENZIONE:

di queste due proposizioni **non vale
l'inverso**

ESEMPIO

La seguente funzione è continua e derivabile in $(0,0)$ ma non è differenziabile in quel punto

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \Rightarrow f_x(0, 0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0 \Rightarrow f_y(0, 0) = 0$$

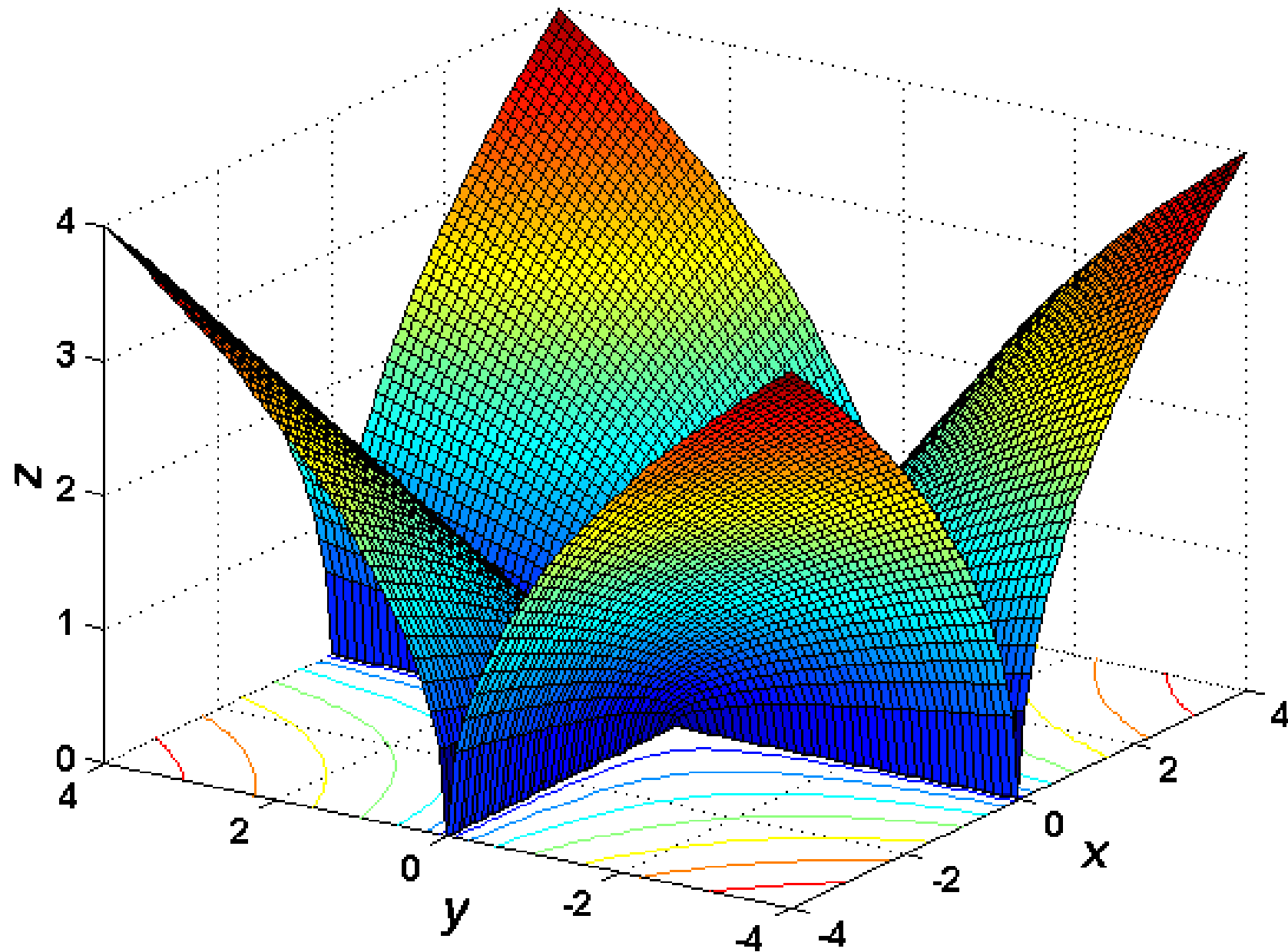
Se f fosse differenziabile dovrebbe essere

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{NON ESISTE infatti posto } y = mx$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|mx^2|}}{\sqrt{(m^2 + 1)x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$f(x,y)$ continua, derivabile ma non differenziabile in $(0,0)$



Osservazione:

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità parziale in P_0 **NON SONO SUFFICIENTI** a garantire la differenziabilità

ma

Se f è **continua in P_0** ed è dotata di derivate parziali continue

$\Rightarrow$ **f è differenziabile in P_0**

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **derivabile quante volte si vuole con tutte le derivate continue**

Per definizione

$$d^2 f = d(df) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)$$

con la convenzione che dx e dy siano costanti



$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(2)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(2)}$$

**Si chiama quadrato
simbolico di f**

Analogamente

$$d^3 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(3)}$$

...

$$d^n f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(n)}$$

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

$$\forall t \in [a, b], \quad P_t(x(t), y(t)) \in A$$



Funzione composta

$$F(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

- **Se $f(x,y)$ è derivabile parzialmente in A ,**
- **se $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili $\forall t \in [a,b]$**



$F(t)$ è derivabile in $[a,b]$ e si ha

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

ESEMPIO

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 \quad \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = e^t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F(t) = e^{e^t \sin t} + \sin^2 t$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$f_x(x, y) = ye^{xy} + 2x \quad f_y(x, y) = xe^{xy}$$



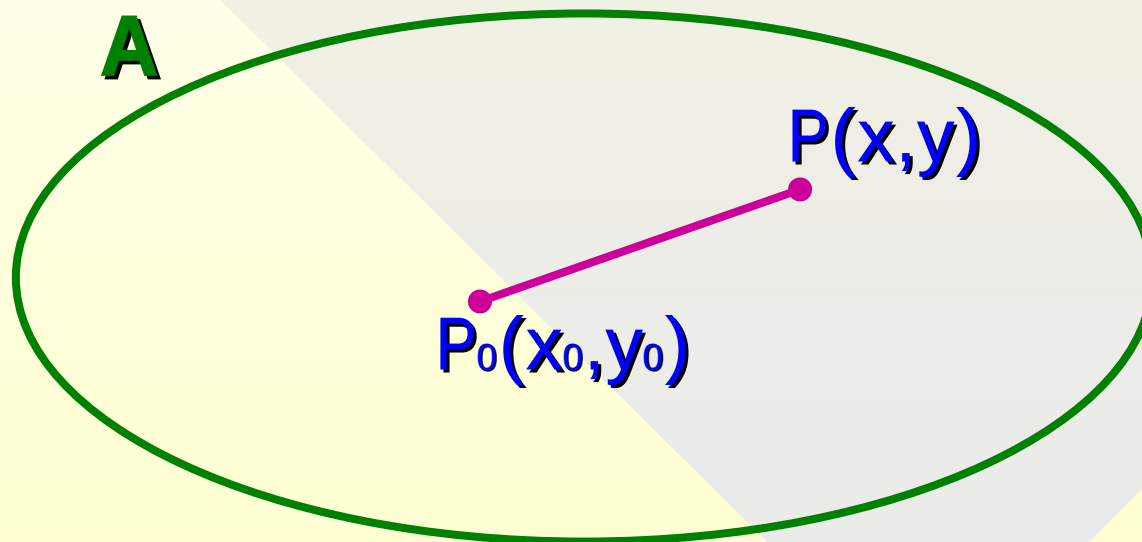
$$F'(t) = \left(e^t e^{e^t \sin t} + 2 \sin t \right) \cos t + \sin t \cdot e^{e^t \sin t} \cdot e^t$$

Formula di Taylor

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^n(A)$$

$$P_0(x_0, y_0) \in A \text{ e } P(x, y) \in A$$

con conseguente $P_0, P \in A$



$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & \\
 = & f(x_0, y_0) + \left[f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \right] + \\
 & + \frac{1}{2!} \left[f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \right]^2 + \dots\dots\dots + \\
 & + \frac{1}{n!} \left[f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \right]^n + R_n(x, y, x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

dove $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{R_n(x, y, x_0, y_0)}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right)^n} = 0$

Se $f \in C^{n+1}(A)$, si può scrivere il

RESTO NELLA FORMA DI LAGRANGE

$$\begin{aligned}
 R_n(x, y, x_0, y_0) = & \\
 = & \frac{\left[f_x \left(x_0 + \vartheta(x - x_0), y_0 + \vartheta(y - y_0) \right) (x - x_0) + \right. \\
 & \left. + f_y \left(x_0 + \vartheta(x - x_0), y_0 + \vartheta(y - y_0) \right) (y - y_0) \right]^{n+1}}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

ESEMPIO

Scrivere la formula di Taylor fino al secondo ordine per la funzione

$$f(x, y) = e^{(x+2y)} \text{ con punto iniziale } (1,1)$$

$$f(1,1) = e^3, \quad f_x = e^{x+2y}, \quad f_y = 2e^{x+2y}$$

$$f_{xx} = e^{x+2y}, \quad f_{xy} = 2e^{x+2y}, \quad f_{yy} = 4e^{x+2y}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = & e^3 + \left[e^3(x-1) + 2e^3(y-1) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[e^3(x-1)^2 + 4e^3(x-1)(y-1) + 4e^3(y-1)^2 \right] + R_2 \end{aligned}$$