

Massimi e Minimi

Definizione

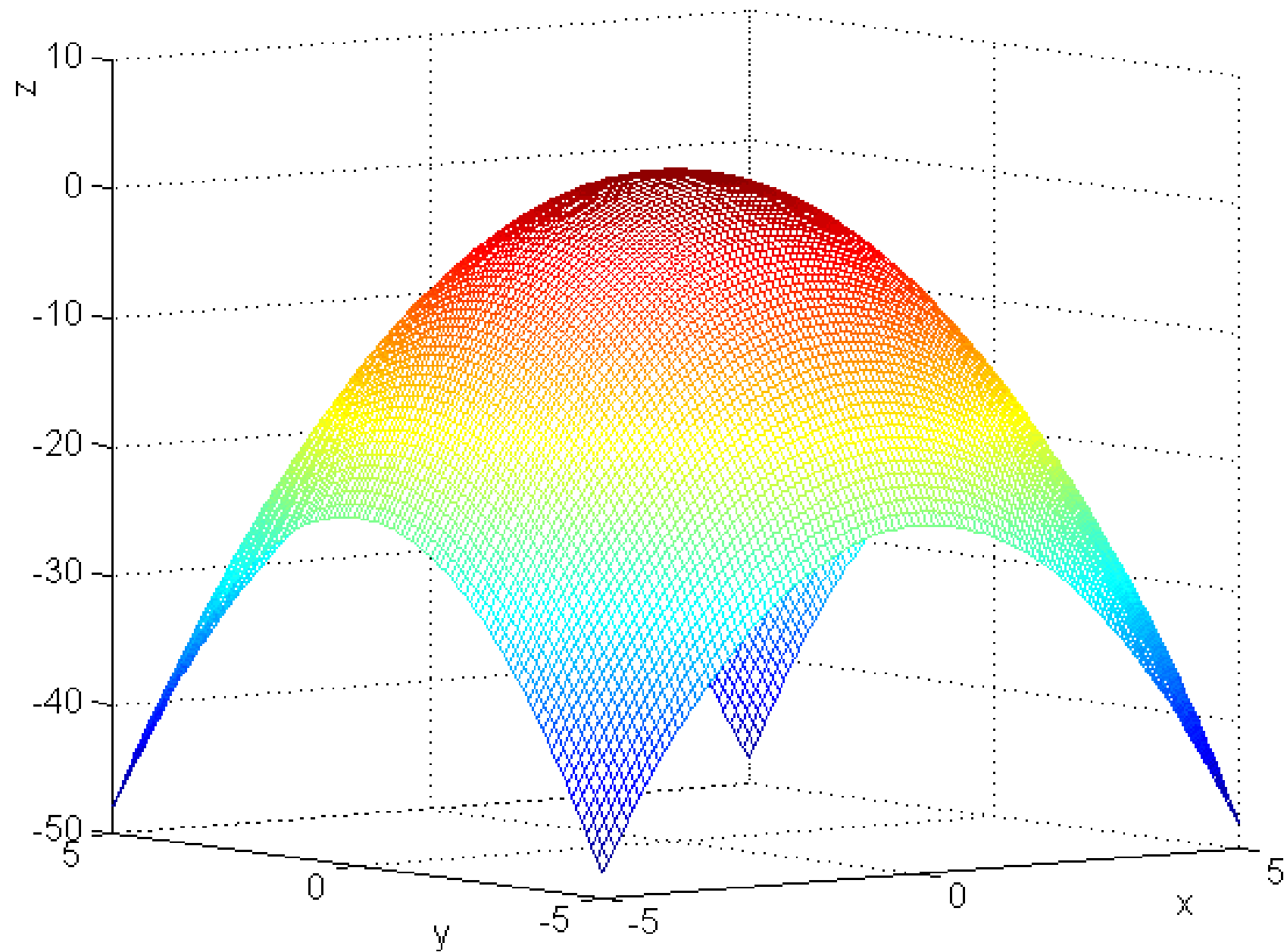
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \underline{x}_0 \in A$$

$\underline{x}_0$ punto di **max** improprio (proprio)
 ($\underline{x}_0$ punto di **min** improprio (proprio))
 se

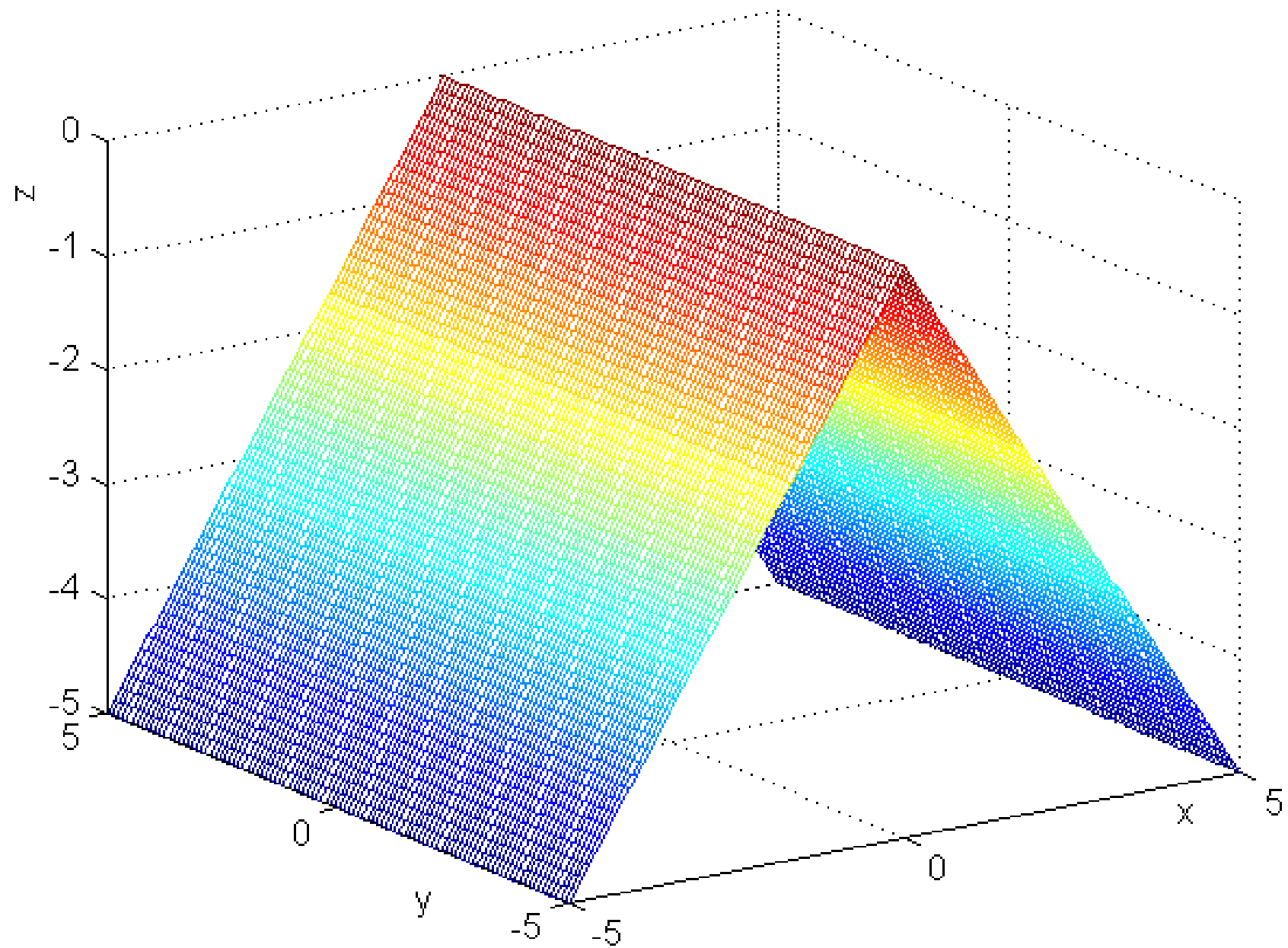
$$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0) \quad (f(\underline{x}) < f(\underline{x}_0)) \quad \forall \underline{x} \in A$$

$$(f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0) \quad (f(\underline{x}) > f(\underline{x}_0)) \quad \forall \underline{x} \in A)$$

Esempio di massimo proprio



Esempio di massimo improprio



Definizione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \underline{x}_0 \in A$$

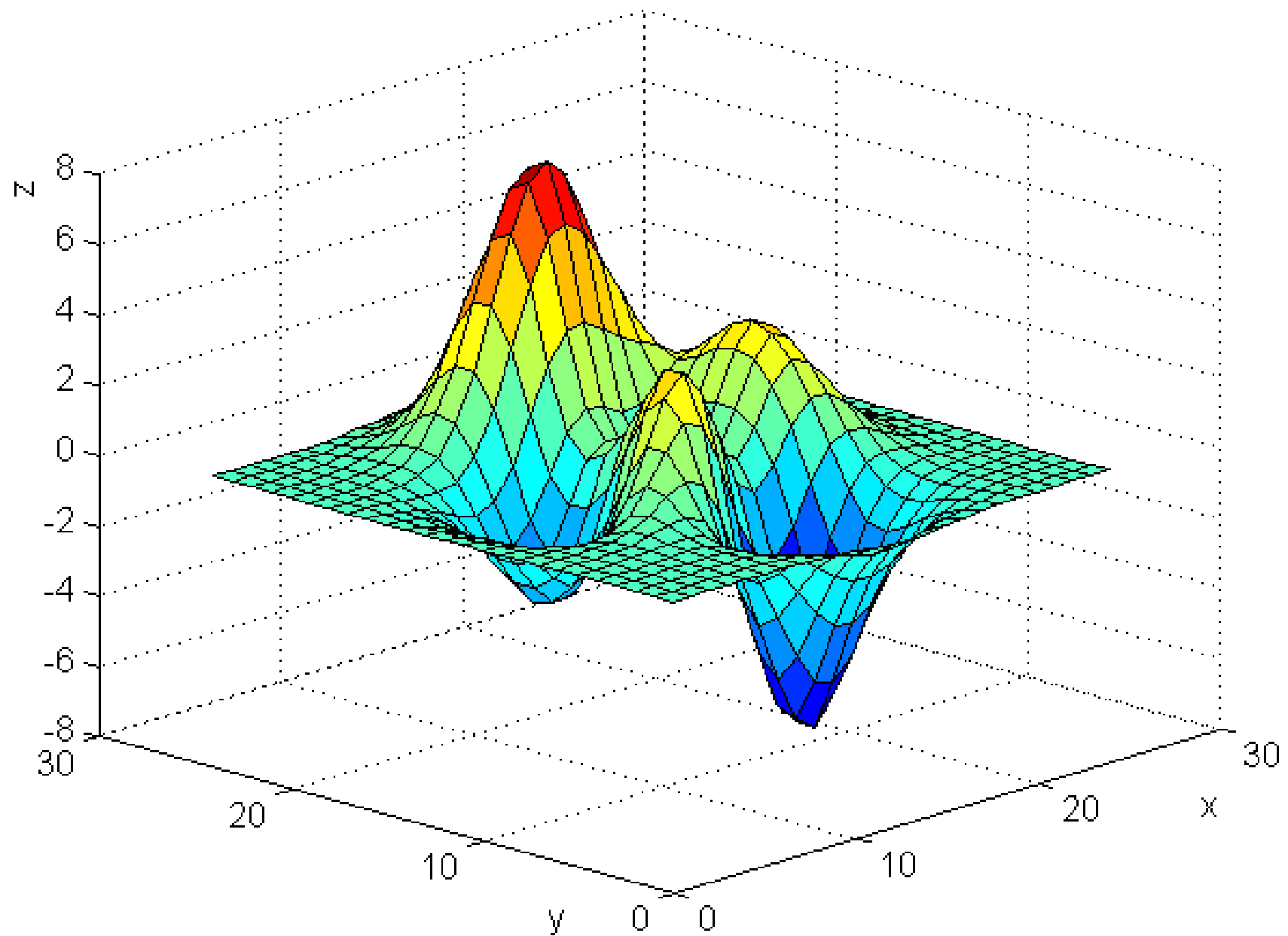
$\underline{x}_0$ punto di **max rel. improprio (proprio)
 ($\underline{x}_0$ punto di **min rel.** improprio (proprio))
 se**

$$\exists I(\underline{x}_0, r) : f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0) \quad (f(\underline{x}) < f(\underline{x}_0))$$

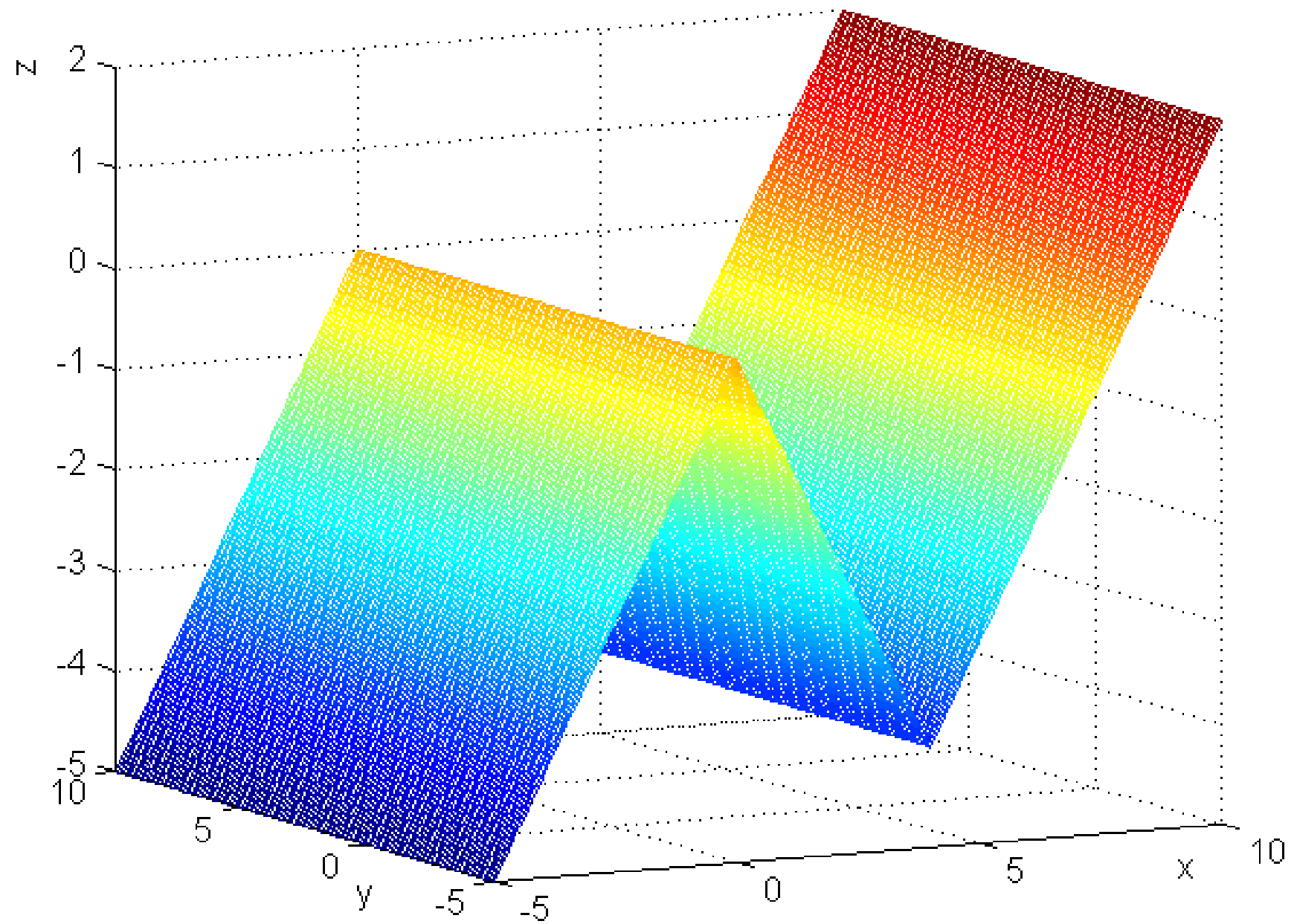
$$\forall \underline{x} \in \exists I(\underline{x}_0, r) \cap A$$

$$\left(\begin{array}{l} \exists I(\underline{x}_0, r) : f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0) \quad (f(\underline{x}) > f(\underline{x}_0)) \\ \forall \underline{x} \in \exists I(\underline{x}_0, r) \cap A \end{array} \right)$$

Esempio di massimi relativi propri



Esempio di massimo relativo improprio



Teorema

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ interno ad A ,

f differenziabile in $\underline{x}_0$,

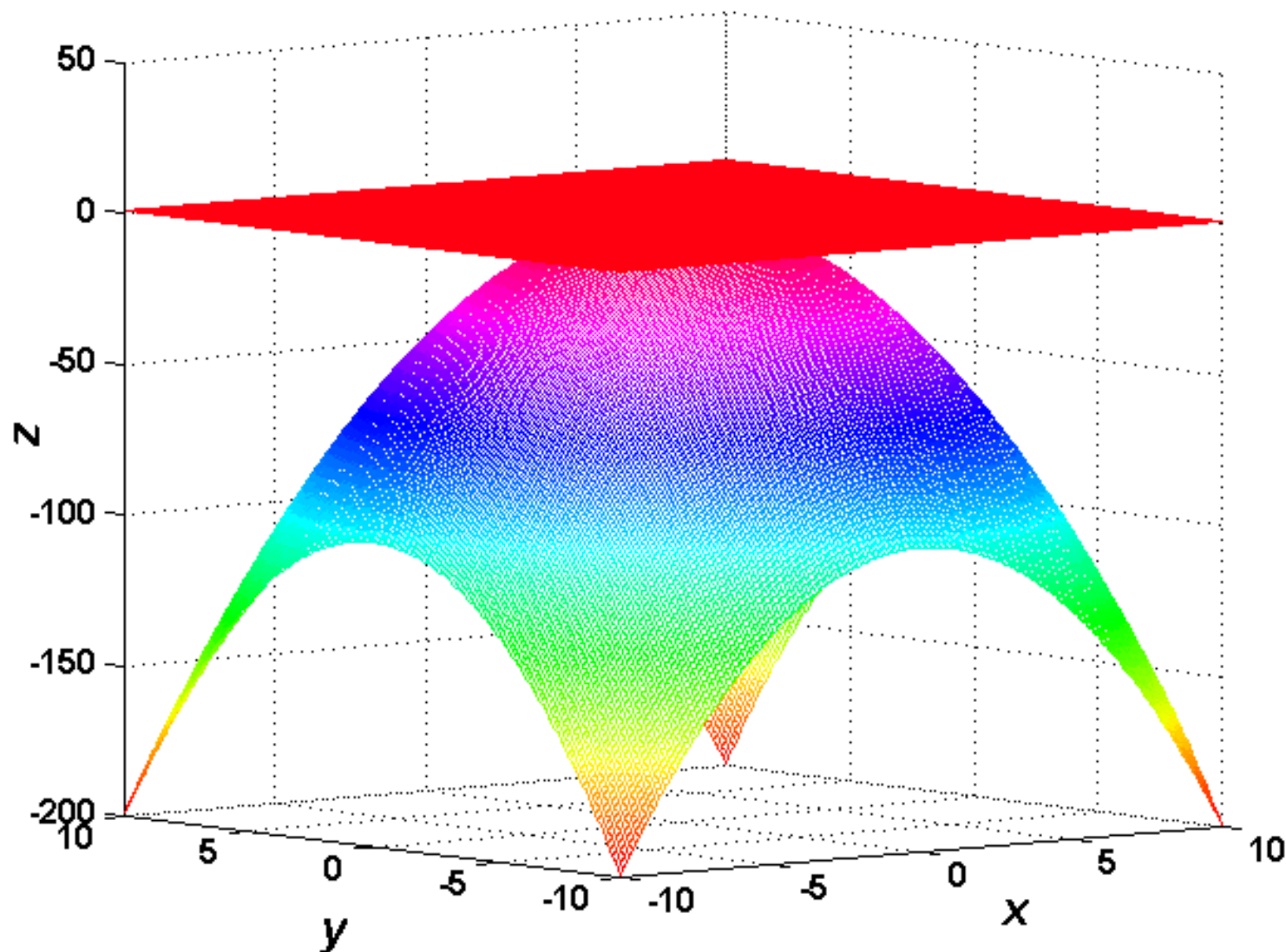
$\underline{x}_0$ punto di max (min) rel.



$$df(\underline{x}_0) = 0$$

(o equivalentemente $f_{x_i}(\underline{x}_0) = 0 \ (i = 1, \dots, n)$)

Grafico di $f(x,y)$ e del piano tangente $z=1$ nel punto di max



Il piano tangente al grafico nel punto di massimo è parallelo al piano (x,y)

La condizione non è però sufficiente

$$f(x, y) = xy$$

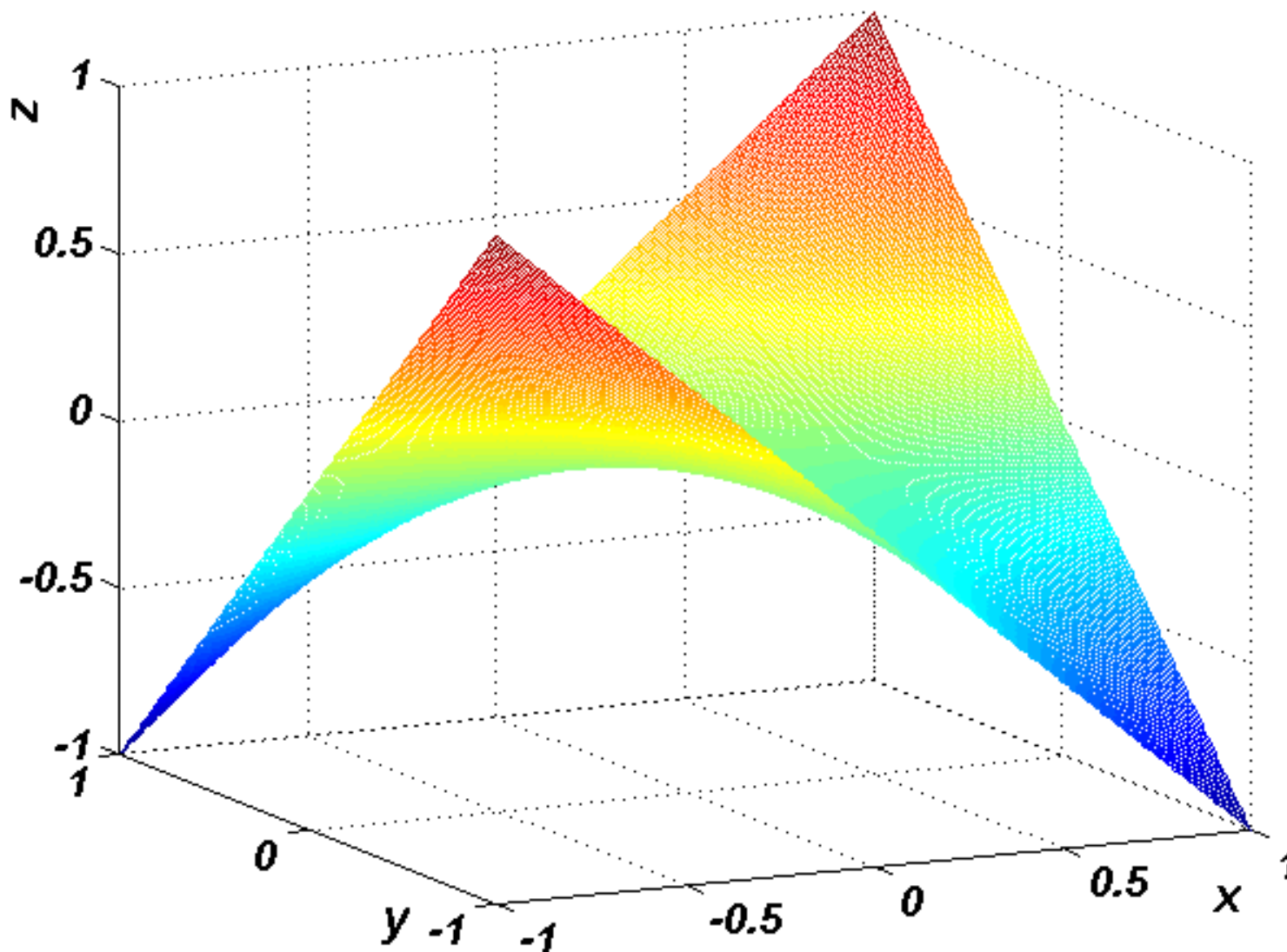
$$f_x(0,0)=0, \quad f_y(0,0)=0, \quad df(0,0)=0$$

ma $(0,0)$ non è

né un punto di max rel.

né un punto di min rel.

Grafico di $f(x,y)=xy$ nell'intorno di $(0,0)$



Il punto $(0,0)$ è un PUNTO DI SELLA

Definizione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x}_0 \in A$$

$\underline{x}_0$ punto di SELLA se

$\forall I(\underline{x}_0, r)$, in esso cadono
sia punti $\underline{x}$ in cui $f(\underline{x}) > f(\underline{x}_0)$,
sia punti $\underline{x}$ in cui $f(\underline{x}) < f(\underline{x}_0)$

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

è differenziabile nei punti interni di A



I punti di massimo e minimo relativo vanno
ricercati tra i punti di frontiera e i punti
CRITICI di f , cioè tra i punti P in
 corrispondenza dei quali

$$\nabla f(P) = 0$$

o equivalentemente

$$f_{x_i}(P) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

**Tra i punti critici, come
riconoscere i punti di
massimo relativo
minimo relativo
e di *sella* ?**

$\underline{x}_0$ Punto critico

Se $\exists I(\underline{x}_0, r) : f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) \leq 0 \Rightarrow \underline{x}_0$ punto di **max rel**

Se $\exists I(\underline{x}_0, r) : f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) \geq 0 \Rightarrow \underline{x}_0$ punto di **min rel**

Se $\forall I(\underline{x}_0, r) : f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)$ cambia segno $\Rightarrow \underline{x}_0$ punto di sella



Occorre analizzare nelle vicinanze di $\underline{x}_0$,

il segno di

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)$$

Prendiamo il caso in cui

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in A$ **punto critico**

Dalla formula di Taylor



$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + d^2 f(x_0, y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

Poiché P_0 punto critico

$$df(x_0, y_0) = 0$$



$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\ + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \\ + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$



Nelle vicinanze di P_0 , il segno di $f(P) - f(P_0)$ è strettamente legato al segno della forma quadratica

$$f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2$$

Posto $q(x, y) =$

$$= f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2$$

$\Downarrow$

$q(x_0, y_0)$ definita positiva (negativa) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ p.to di MIN (MAX) rel. proprio

$q(x_0, y_0)$ indefinita $\Rightarrow (x_0, y_0)$ p.to di SELLA

$q(x_0, y_0)$ semidefinita $\Rightarrow$ nulla si può dire a priori

NB: la condizione $q(x_0, y_0)$ semidefinita è SOLO NECESSARIA:

(x_0, y_0) p.to di MIN (MAX) rel. $\Rightarrow q(x_0, y_0)$ semidefinita pos. (neg.)

Più in generale: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ p.to interno ad A ,



$q(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ definita positiva (negativa) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_0$ p.to di MIN (MAX) rel. proprio

$q(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ indefinita $\Rightarrow P_0$ p.to di SELLA

$q(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ semidefinita $\Rightarrow$ nulla si può dire a priori

Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$

si chiama **MATRICE HESSIANA**,

la matrice

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

In particolare: $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(A)$



$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

NB: Se $f \in C^2(A)$ $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$



$H(x, y)$ è una matrice simmetrica ed **$H(x_0, y_0)$ è proprio la matrice associata alla forma quadratica**

$$f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

(minore princ. di N-O I ordine)

$$|H(x_0, y_0)| > 0$$

(minore princ. di N-O II ordine)



(x_0, y_0) p.to di **MIN REL PROPRIO**

$$|H(x_0, y_0)| < 0$$



(x_0, y_0) p.to di **SELLA**

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$$

(minore princ. di N-O I ordine)

$$|H(x_0, y_0)| > 0$$

(minore princ. di N-O II ordine)



(x_0, y_0) p.to di **MAX REL PROPRIO**

$$|H(x_0, y_0)| = 0$$



la forma quadratica è semidefinita



non si può dire **NULLA A PRIORI**

Esempio: **massimi e minimi relativi di**

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^5 - 5 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 + 4xy^2 + 10x^4 = 0 \\ f_y = 4x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$



$$P_1 \equiv (0, 0) \quad P_2 \equiv \left(-\frac{2}{5}, 0\right)$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y^2 + 40x^3$$

$$f_{yy}(x, y) = 4x^2 + 12y^2$$

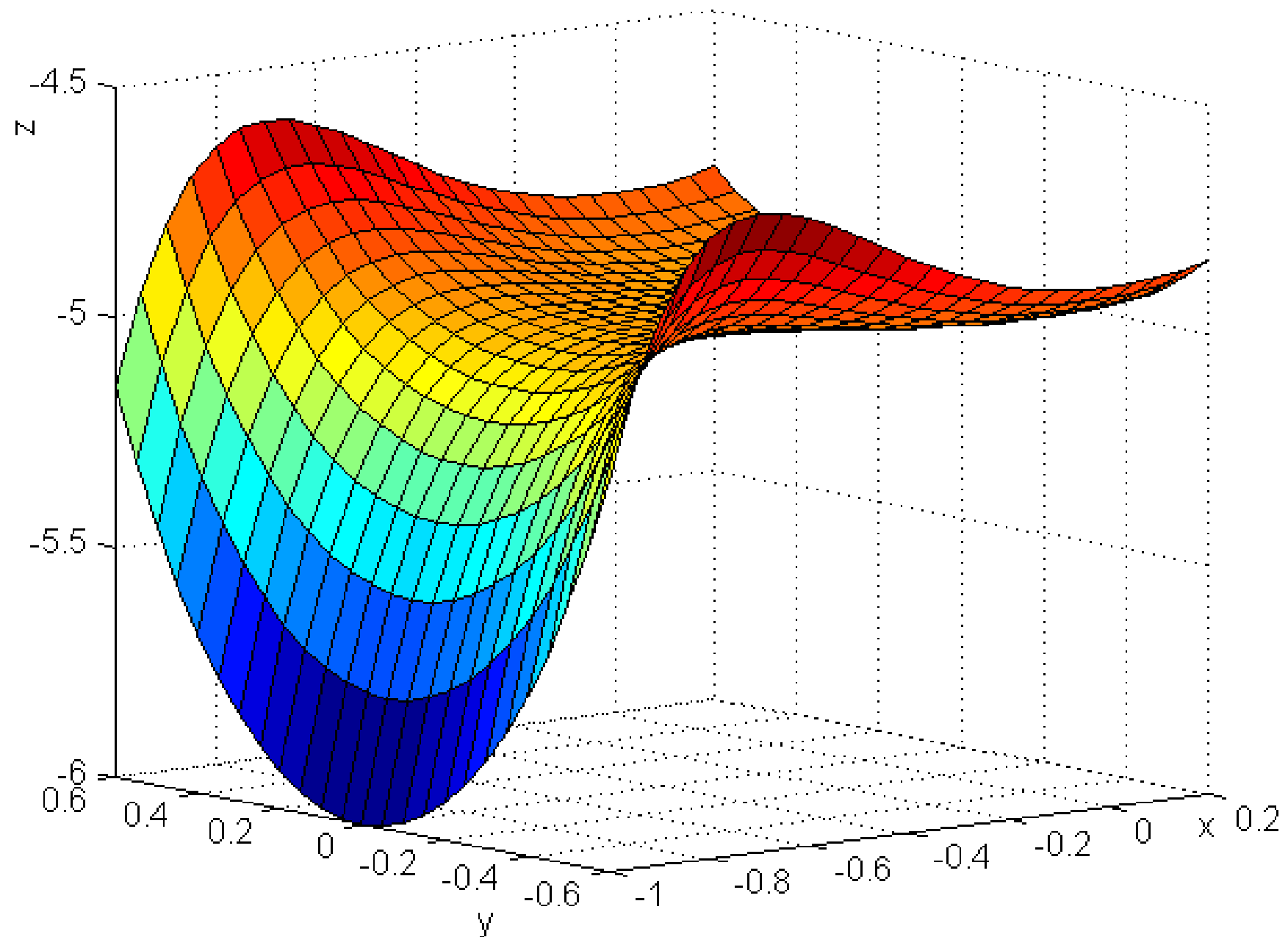
$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 8xy$$



$$H\left(-\frac{2}{5}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{25} & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

$$\left| H\left(-\frac{2}{5}, 0\right) \right| < 0 \Rightarrow \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \text{ p.to di SELLA}$$

Grafico di $f(x,y)$ nell'intorno di $(-2/5,0)$



$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

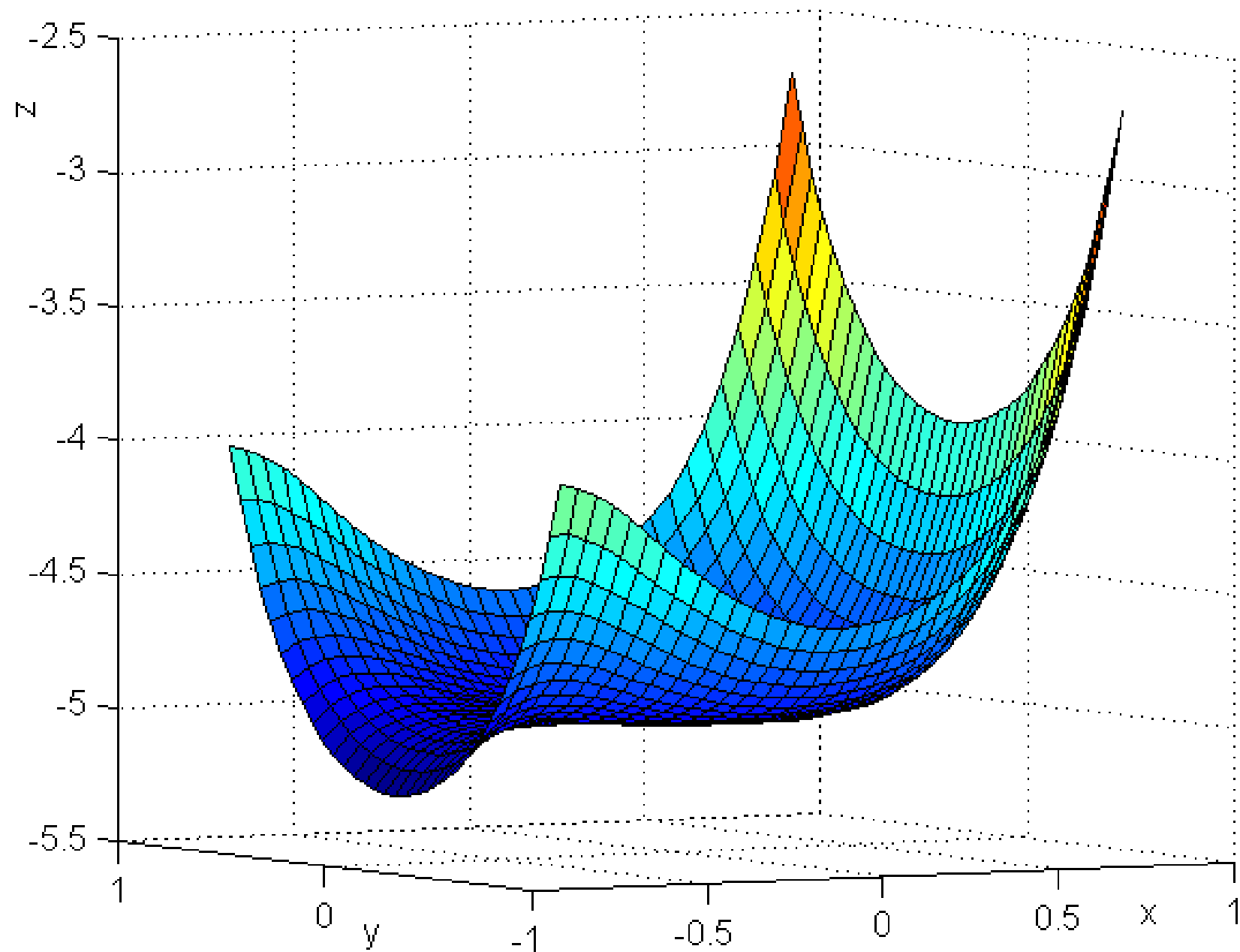
Nulla si può dire a priori

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^5 = \\ &= x^4(1+2x) + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

$$\text{Per } x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x,y) - f(0,0) \geq 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ p.to di MIN REL per f

Grafico di $f(x,y)$ in un intorno di $(0,0)$



Esempio: **massimi e minimi relativi di**

$$f(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 2x - 1 \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0 \equiv (1, 0, 0) \text{ p.to CRITICO}$$

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yz} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_{xx} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad |H(x, y, z)| = 8 > 0$$



I minori principali di N-O sono positivi



La forma quadratica è definita positiva



(1,0,0) P.TO di MINIMO RELATIVO

$$f(1,0,0) = -2$$