

Matematica Generale I:

Scheda Esercizi Prima Parte

Elisabetta Michetti

1 Disequazioni e domini

NOTA: si raccomanda il ripasso delle funzioni elementari ($y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^\alpha$ e $y = \sqrt[\alpha]{x}$ con α intero positivo, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ con $a > 0 \vee a \neq 1$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$) e dei loro grafici.

Si risolvano le seguenti disequazioni (Livello 1):

1. $(x+2)(x-3) < 0$, $[S = (-2, 3)]$
2. $\frac{(x+3)(x-5)}{(4-x)} \geq 0$, $[S = (-\infty, -3] \cup (4, 5]]$
3. $2x^2 - 3x + 1 > 0$, $S = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{1}{2} \vee x > 1\}$
4. $-x^2 + 4x - 4 > 0$, $S = \emptyset$
5. $x^2 + x + 1 \geq 0$, $S = \mathbb{R}$
6. $3x^2 - 2x + 2 > 0$, $S = \mathbb{R}$
7. $-x^2 + 2x - 1 < 0$, $S = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 1\}$
8. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, $S = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
9. $\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases}$, $[S = (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +1)]$
10. $\frac{-x^2 - x + 3}{x(x+1)} \geq 0$, $S = [-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1) \cup (0, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$
11. $\sqrt{(x+3)(x-1)} < x+1$, $S = [1, +\infty)$
12. $\sqrt{x^2 - 1} > x+2$, $S = (-\infty, -\frac{5}{4})$
13. $\sqrt[3]{x^3 - 5x + 2} \geq x$, $S = (-\infty, \frac{2}{5})$

14. $|x + 1| < 3, S = (-4, 2)$
15. $|x^2 - 3x| \geq 1, S = (-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$
16. $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}, S = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
17. $e^{3x} \geq 6, x \geq \frac{\ln 6}{3}$
18. $\log_2(x^2 + 4) > 3, S = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
19. $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 1, x \in (1, \frac{3}{2}]$
20. $\ln(3 + x) + \ln(2x) < 0, S(0, \frac{-3+\sqrt{11}}{2})$

Si risolvano le seguenti disequazioni (Livello 2):

1. $x^3 - 4x^2 + 3x > 0, S = (0, 1) \cup (3, +\infty)$
2. $2x^3 - x - 1 < 0, S = (-\infty, 1)$
3. $2x^4 + 2x^2 - 4 \leq 0, S = [-1, 1]$
4. $\begin{cases} x^4 + 6x^3 + 9x^2 > 0 \\ x^3 - 2x^2 + 4x - 3 < 0 \end{cases}, S = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 1)$
5. $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0, x \in [0, \ln 3],$ (Suggerimento: si ponga $e^x = t$)
6. $\ln^2 x - 4 \ln x - 5 < 0, x \in (\frac{1}{e}, e^5),$ (Suggerimento: si ponga $\ln x = t$)
7. $\frac{|x+3|}{x} > 2x + 1$

Determinare il dominio delle seguenti funzioni (individuare inf, sup e, se esistono, max e min, di tale insieme) (Livello 1):

1. $y = \ln(x^2 - 9), [D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)]$
2. $y = (\sqrt{2x - 10})^{x+7} + 5, [x \geq 5]$
3. $y = \sqrt{\ln(x - 1)}, D = [[2, +\infty))$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\ln(x+3)}$
5. $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \sqrt{x - 1} + \frac{3x}{x-5}, [D = (1, 5) \cup (5, +\infty)]$
6. $y = \sqrt{\frac{x}{1-e^x}}; [D = \emptyset]$
7. $\sqrt{1 - |e^{2x} - 1|}; [D = (-\infty, \ln \sqrt{2})]$

$$8. f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{\log_2(2-x)}}, [D = (-\infty, -2] \cup (1, 2)]$$

$$9. f(x) = \sqrt{1 - \ln(1 - x^2)}, D = [(-1, 1)]$$

Determinare il dominio delle seguenti funzioni (Livello 2):

$$1. y = \frac{\ln|x^2+x^3|}{\sqrt{x^3-1}} - e^{\sin \frac{3}{\ln(x-2)}}, [D = (2, 3) \cup (3, +\infty)]$$

$$2. f(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{4x-5*2^x+6}}, [D = (-\infty, \log_2 2) \cup (\log_2 3, +\infty)]$$

Determinare il dominio di $f(x) = \ln(x^2 - (k+1)x + 4)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. $[D = (-\infty, \frac{k+1-\sqrt{\Delta}}{2}) \cup (\frac{k+1+\sqrt{\Delta}}{2}, +\infty)$ se $k \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$; $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ se $k = -5$; $D = \mathbb{R}$ se $k \in (-5, 3)$; $D = \mathbb{R} - \{2\}$ se $k = 3$]. (Livello 2)

2 Funzioni: grafico e proprietà

A partire dal grafico della funzione elementare, tracciare il grafico di $f(x)$. Dire se f è suriettiva e iniettiva e individuare l'insieme immagine (Livello 1):

$$1. f(x) = |x^2 - 1|$$

$$2. f(x) = \frac{1}{|x|} + 1$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$5. f(x) = |x + 1|$$

$$6. f(x) = x^2 + |x|$$

$$7. f(x) = |-x^2 + 5|$$

$$8. f(x) = \frac{1}{|x+1|}$$

$$9. f(x) = e^{|x|} - 1$$

$$10. f(x) = -|\ln(x+1)|$$

$$11. f(x) = (|x| + 2)^3$$

Determinare per via grafica il dominio delle seguenti funzioni (Livello 1):

$$1. y = \sqrt{|\ln|x+2|| - e^{|x|+1}}$$

$$2. y = \left(2 - \left|\frac{1}{x-2} + 1\right|\right)^{\ln x}$$

$$3. y = \ln(\sqrt{|x+1|} - |e^{|x|-1}|)$$

$$4. y = \sqrt{||x| - 3| - \ln|x+1|}$$

Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari (Livello 1):

$$1. f(x) = x^2 + x^4,$$

$$2. f(x) = \ln(1 + x^2),$$

$$3. y = e^{\frac{1}{x^2}},$$

$$4. y = 2\sqrt[3]{x^3 - x},$$

$$5. y = \ln((x+1)^3 - x^2)$$

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date da $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ e $g(x) = 3x - 6$. Verificare che sono l'una l'inversa dell'altra. (Livello 1)

Verificare analiticamente se le seguenti funzioni sono invertibili, quindi determinare la funzione inversa. (Livello 1)

$$1. y = e^{1-x^3}$$

$$2. y = (\ln x - 1)^3$$

$$3. y = \ln^3(x+2) - 1$$

$$4. y = \sqrt{x^3 - 4}$$

Verificare per via grafica se esiste la funzione inversa delle seguenti funzioni. Se possibile, tracciarne il grafico e dire se tali funzioni sono strettamente monotone, concave o convesse (Livello 2).

$$1. f(x) = \frac{2-x}{x+1}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

4. $y = |\ln(-x)|$

5. $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 2 & \text{se } x \leq -e \\ -\arctan(x+1) - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Date le seguenti funzioni f e g si dica se esiste $f \circ g$ e $g \circ f$, quindi determinarle (Livello 1):

1. $f = |\ln(x+2)| + 5, g = x^2 + 2x + 4$

2. $f = e^{|x+5|} + 1, g = \ln(|x|) + 3$

3. $f = x^4 + x^2, g = |\sqrt{x+5} - 1|$

Date le seguenti funzioni f e g si dica se esiste $f \circ g$ e $g \circ f$ o individuare su quale restrizione queste sono definite (Livello 2):

1. $f = \sin x + 2, g = \ln x$

2. $f = x^2, g = \ln x$

3. $f = \sqrt{x}, g = \frac{1}{x}$

4. $f = -x^2 + 6, g = \ln(x+1)$

5. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan x & \text{se } x < 0 \end{cases}, g(x) = x^3$

Siano $f_{|\mathbb{R}^+}(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = \ln(x+1)$. Dire su quale insieme è definita la funzione $f_{|\mathbb{R}^+}^{-1} \circ g$ e determinarla. (Livello 2)

3 Limiti e continuità

Determinare l'insieme dei punti d'accumulazione dei seguenti insiemi (Livello 1):

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

2. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$

3. $D = [-2, 2) \cup \{4\}$

4. $B = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$

Verificare in base a definizione i seguenti limiti (Livello 1):

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 x = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln |x| = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - 1 = -1$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{2x} = -\infty$
9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x+1|} = +\infty$
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{e}} x^2 = -\infty$

Si verifichi in base a definizione che $\lim_{x \rightarrow 1} (|x-1|)^2 + 3 = 3$. Sia inoltre $\epsilon = 1/100$, si determini il corrispondente valore di δ (Livello 2).

Calcolare i seguenti limiti (Livello 1).

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1+\sin x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)^{\frac{1}{x-1}}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$
6. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} + |\ln(x-2)|$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + x^2 + 2$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x + 1$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2+1}$

10. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 2}$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{x - 1}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 3}{2x^2 + x}$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{-2}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{-x}}$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)^{3x}$
17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x}$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 3}$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 2}, [0]$
20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{|\cos x^2|}{x^4 + 1}, [2]$
21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x, \left[\frac{1}{e^2}\right]$
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3+2x}\right)^{x-1}, \left[\frac{1}{e}\right]$
23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{5x}\right)^x, \sqrt[5]{\frac{1}{e^2}}$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{-\frac{2}{x}}, [e^{-2}]$
25. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3 \ln(x-1)}{x-2}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 2x}{3x}, \left[\frac{10}{3}\right]$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2x}\right)^2, \left[\frac{1}{4}\right]$

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ sono verificati i seguenti limiti (Livello 1):

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2k}{x}\right)^{2x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{6x} = 3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{2kx} = 2$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{kx^2-1}}{3x} = 2$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^2}{\sqrt{x+2}} = +\infty$$

Si dica se le seguenti funzioni sono continue in x_0 o che tipo di discontinuità presentano ed eliminarla se possibile (Livello 1):

$$1. f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{se } x \neq 0 \\ x+1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} + 3 & \text{se } x > 2 \\ e^{5x-1} + 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}, x_0 = 2$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3x+3} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{|x^2+2|}{x-4} & \text{se } x < 2 \end{cases}, x_0 = 2$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x+1}{2x-2} & \text{se } x \neq 1 \\ 8 & \text{se } x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano continue nel loro dominio (Livello 2):

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{ax+1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2ax+2 & \text{se } x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \ln((ax)^2+1) & \text{se } x \geq 2 \\ \sqrt{x^2+12}-3 & \text{se } x < 2 \end{cases}, x_0 = 2$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x+3}{10^{ax}} & \text{se } x \neq 0 \\ 10 & \text{se } x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$