

Matematica Generale II: Scheda Esercizi Prima Parte

Elisabetta Michetti

1 Disequazioni e domini

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $z = \frac{\sqrt{x-y^2-1}}{\sqrt{-2x-y+10}} + \ln\left(-\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} + 2\right)$
2. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - y^2 - 4)(-y^2 - x - 1)}$
3. $z = \ln(2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y + 3)(e^x x - yx)$
4. $z = \frac{\ln\left(\frac{-x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$
5. $z = \sqrt{(-x^2 + y^2 - 4) \ln(x^2 + y^2)}$
6. $z = \sqrt{\frac{(x-y-1)(-x^2-y^2+8y)}{y-e^{-x}}}$

Studiare il segno della funzione $z = (y - 5)^2(-y^2 + 2y + x + 6)$

Data $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+4y^2-1}}{x-2y}$, si risolva la disequazione $f(x, y) > 1$.

2 Limiti

Verificare in base a definizione i seguenti limiti:

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} 2y - 2 \arctan |x - 1| = 4$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} 4x^2 + y = 1$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} y - |\ln |x+1|| = 1$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2}{xy^2} + 1 = 1$$

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} x^2 + 2y^2 = \infty$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{|y|} = \infty$$

Verificare che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{\frac{y^2}{x^2}}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y}$$

3 Curve di livello

Tracciare le curve di livello delle seguenti funzioni:

$$1. z = x^2 - y^2$$

$$2. z = x^2 + y^2 + x$$

$$3. z = y + \ln \frac{1}{x}$$

$$4. z = y(x - 1)$$

4 Derivate parziali

Verificare in base a definizione la derivabilità parziale della funzione $f(x, y) = |x+1|\sqrt[3]{y}$ nel punto $P = (-1, 0)$

Si scriva l'equazione del piano tangente alla funzione $z = \arctan(x^3 - y)$ nel punto $P = (1, 0)$

Si scriva il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine della funzione $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 - 1}$ con punto iniziale $P = (0, 1)$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde di $z = \sin(x^2 + y^2)$ nel punto $P = (0, 0)$

Calcolare il differenziale primo e secondo di $z = \sqrt{xy} - \ln(x/y)$ nel punto $P_0 = (-1, -1)$

5 Forme quadratiche

Si studi la definizione della seguente forma quadratica

$$q(\underline{x}) = x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Si studi la definizione della seguente forma quadratica al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$q(\underline{x}) = k^2x_1^2 + (k+1)x_2^2 + 12x_1x_2$$

Si studi la definizione della seguente forma quadratica

$$q(\underline{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$$

6 Massimi e minimi liberi

Si determinino i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

1. $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
2. $z = x + y^2 + \ln(x + y)$
3. $f(x, y) = 2x + y^2 - \ln(x + 2y)$
4. $z = x_1^2 - x_1x_2^2$
5. $z = 3x^2 - 6xy + y^2 + y^4$
6. $f(x, y) = \ln(1 - (x - 2)^2) - y^2$
7. $z = \ln(-2x^2y - 4x^2 - y^2 - 2y)$

7 Massimi e minimi vincolati

Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati delle seguenti funzioni:

1. $z = y^2 - 6y + 3x - 4$ t.c. $y^2 - x + 2 = 0$
2. $f(x, y) = 2x - y$ t.c. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (anche per via grafica)
3. $z = xy$ t.c. $x + 4y = 16$ (anche per via grafica)
4. $z = x_1^2 x_2$ t.c. $2x_1^2 + x_2^2 = 3$ (anche per via grafica)
5. $z = x^2 + y$ t.c. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ (anche per via grafica)
6. $f(x, y) = \frac{x}{y^2+1}$ t.c. $x^2 + y^2 - 3 = 0$ (solo per via grafica)

Matematica Generale (2)
Esercizi su massimi e minimi liberi e vincolati

1. Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

- 1) $z = -x^4 + 2y^4 + 3$
- 2) $z = y^2 - 2x^2 + xy$
- 3) $z = 2y^4 + 8y + 2x^4$
- 4) $z = \frac{y^3}{3} - y + x^2 + 1$
- 5) $z = x^3 + 3x^2 + y^2 - 1$
- 6) $z = -x^3 + 3x + y^4 - 4y$
- 7) $z = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2y$
- 8) $z = x - \frac{y^3}{3} - \ln(x - y)$

2. Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni soggette ai vincoli di seguito indicati.

- 1) $z = 3xy$ con vincolo $2x + 4y - 1 = 0$
- 2) $z = xy^2$ con vincolo $x - 2y + 1 = 0$
- 3) $z = x^2 + y^2 - 2$ con vincolo $y - x = 0$
- 4) $z = y(x - x^2)$ con vincolo $y - 3x = 0$
- 5) $z = xy + y - 1$ con vincolo $y - x^2 + 1 = 0$
- 6) $z = 2x + 2y + 1$ con vincolo $x^2 + y^2 - 2 = 0$
- 7) $z = 4x + 2y - 2$ con vincolo $x^2 + y^2 - 20 = 0$
- 8) $z = x - y - 1$ con vincolo $x^2 + y^2 - 8 = 0$
- 9) $z = 2x^2 - 4y$ con vincolo $2x^2 + y^2 - 1 = 0$
- 10) $z = 2y^2 - 8x$ con vincolo $2y^2 - 2x^2 + 8 = 0$
- 11) $z = 2x^2 + 4y$ con vincolo $2x^2 + y^2 - 4 = 0$
- 12) $z = -4x + 2y^2$ con vincolo $-x^2 + 2y^2 + 1 = 0$
- 13) $z = x^2 - y^2$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 1$
- 14) $z = \ln(x - y^2)$ soggetta al vincolo $x - y = 0$.

3. Determinare per via grafica i punti di massimo e minimo vincolati.

- 1) $z = y - 2x + 1$ con vincolo $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

- 2) $z = xy$ con vincolo $x + y - 5 = 0$
- 3) $z = 2y - x$ con vincolo $y - x^2 = 0$
- 4) $z = y + x$ con vincolo $x^2 + y^2 + 2y = 0$
- 5) $z = x^2 + y^2$ con vincolo $x + y - 4 = 0$