

Matematica Generale II:

Scheda Esercizi Seconda Parte

Elisabetta Michetti

1 Vettori

1. Si rappresentino i vettori $\underline{x} = (1, 2)$ e $\underline{y} = (-1, 2)$ sul piano $\mathbb{R}^2$ quindi se ne rappresenti la somma. Si rappresenti inoltre l'insieme dei vettori $\underline{z} = \alpha \underline{y}$, con $\alpha > 0$.
2. Sia $\underline{x} = (1, 2, 3)$, si individui un vettore $\underline{y}$ ortogonale ad $\underline{x}$.
3. Dati $\underline{x} = (k, k)$ e $\underline{y} = (h, k)$ si determinino $h, k \in \mathbb{R}$ tali che i due vettori siano ortonormali. Darne un'interpretazione grafica.
4. Dati i vettori $\underline{x} = (2, a)$ e $\underline{y} = (-1, a)$ si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che i due vettori siano fra loro ortogonali. Sia $\underline{z} = 3\underline{x} - 2(\underline{x} + \underline{y})$, si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che $||\underline{z}|| = 1$.
5. Dati i vettori $\underline{x} = (4, 2)$ e $\underline{y} = (-2, 1)$, si esprima, se possibile, il vettore $\underline{z} = (-3, 0)$ come combinazione lineare di $\underline{x}$ e $\underline{y}$.
6. Si dica se i seguenti vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$: $\underline{x} = (-1, 2, 0)$, $\underline{y} = (0, -1, 1)$. Si dica inoltre se i vettori $\underline{v} = (5, -10, 0)$, $\underline{z} = (5, -10, 1)$ possono scriversi come loro combinazione lineare ed in caso affermativo si determinino i coefficienti di tale combinazione.

7. Dati i vettori $\underline{x} = (1, -2, 3)$, $\underline{y} = (1, 1, 2)$, $\underline{z} = (3, -2, -2)$ si dimostri che sono linearmente indipendenti quindi si esprima il vettore $\underline{v} = (0, -2, -9)$ come loro combinazione lineare.
8. Si verifichi che i seguenti vettori sono linearmente dipendenti: $\underline{x} = (0, -1, 10)$, $\underline{y} = (10, 5, 0)$, $\underline{z} = (20, 10, 0)$. Si esprima uno di essi come combinazione lineare dei restanti.
9. Si esprima il vettore $\underline{x} = (-1, 0, 3, 2)$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica.
10. Determinare per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{z} = (t, 0, 2)$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{x} = (2, -1, 0)$ e $\underline{z} = (1, -1, 2)$.
11. Dati i vettori $\underline{x} = (1, -2, 3)$, $\underline{y} = (0, 3, 1)$, $\underline{z} = (1, -2, -1)$, $\underline{v} = (1, 1, 1)$, si dica se essi sono linearmente dipendenti.

2 Operazioni fra matrici e determinante

1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

si determini la matrice X tale che $2(A + B) = X + C$.

$$[X = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}]$$

2. Si determinino $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x+y & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[x = -11, y = 22]$$

3. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[|A| = -11, |B| = -181, |C| = -60, |D| = -126]$$

4. Determinare per quali valori dei parametri i determinanti delle seguenti matrici risultano nulli.

$$A = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ x^2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & b & 2b \\ 1 & c & 2c \end{pmatrix}$$

$$[x = \{0, -1, 2\}; x = 4 \vee x = 7; \forall a, b, c]$$

5. Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

risolvere le equazioni $|A - \lambda I| = 0$ e $|B - \alpha I| = 0$ con $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$[\lambda = \{1, 5, 7\}, \alpha = 1]$$

6. Risolvere la seguente disequazione:

$$\begin{vmatrix} k & k-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} > 0$$

$$[k \neq 1]$$

3 Trasformazioni lineari

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f(\underline{x}) = (x_1 + x_2 + 1, x_3^2)$, si dica se essa è lineare.
2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f(\underline{x}) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3)$, si dica se essa è lineare. In caso affermativo si determini la matrice di rappresentazione e si calcoli $f(2, 1, 0, -1)$.
3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $f(2, 1) = (4, 5)$. Si determini f e la matrice di rappresentazione.
4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $f(\underline{e}_1) = (2, 5)$, $f(\underline{e}_2) = (-1, 0)$, $f(\underline{e}_3) = (3, 1)$, si determini f .

4 Matrice inversa e Rango

Si determini la matrice inversa di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determini $k \in \mathbb{R}$ tale che le seguenti matrici siano invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k^2 + k & 2k + 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & -2k \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k - 1 \end{pmatrix}$$

Si determini il rango delle seguenti matrici al variare del parametro.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -k & k \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & -2k & k \\ 6 & 0 & k \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & k - 1 \end{pmatrix}$$

5 Sistemi lineari

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$1. \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2z = -1 \\ x - y + 2z = -4 \\ 2y + z = 0 \end{cases} [x = 1, y = 1, z = -2]$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases} [\text{incompatibile}]$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 9 & 13 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} [x_1 = \frac{x_3 - 4x_4 - 2}{2}, x_2 = \frac{4 - 3x_3}{2}, \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}]$$

$$4. \begin{cases} 7x + 6y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 5x + 6y + 4z = 1 \end{cases} [x = 3, y = -1, z = -2]$$

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\underline{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \right]$$

$$6. \begin{cases} 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 10x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 - 15x_5 = 0 \end{cases} \left[\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{-9x_2 + 2x_4 + 5x_5}{3} \\ x_2 \\ \frac{2x_4 + 5x_5}{3} \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right]$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 15 & -10 \\ 4 & 12 & -7 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \left[\underline{v} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{3}t \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$8. \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2y = 0 \\ x + 3y = 0 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x + \frac{5}{2}y = 0 \end{cases} [x = 0, y = 0]$$

$$9. \begin{cases} x + 5y + 6z = -3 \\ 7x + y + 2z = 19 \\ 9x + 11y - 10z = 37 \\ 13x - 3y - 2z = 41 \end{cases} [x = 3, y = 0, z = -1]$$

$$10. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \left[\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$11. \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z = -3 \\ -x - y = 1 \end{cases} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$12. \begin{cases} -x + 4y + 6z = 4 \\ x - y - 2z = -2 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$13. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} [impossibile]$$

$$14. \begin{cases} x - y + z - v = 0 \\ x - 2y + 3z - 4v = 0 \\ x - 4y + 7z - 10v = 0 \end{cases} [x = z - 2v, y = 2z - 3v, \forall z, v \in \mathbb{R}]$$

$$15. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \left[\begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]$$

6 Sistemi lineari parametrici

Discutere e risolvere i seguenti sistemi al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$1. \begin{cases} (a - 1)x + 2ay = -2 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

$[a \neq 1/4 \Rightarrow \exists! sol. (x = 2, y = -1);$
 $a = 1/4 \Rightarrow \exists \infty^1 sol. (x = \frac{2y+8}{3}, \forall y \in \mathbb{R})]$

$$2. \begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2(k - 1)x + y = 4k \\ 2(2 - k)x + ky = k \end{cases}$$

$$[k \neq 8 \wedge k \neq 3/4 \Rightarrow \textit{incompatibile};$$

$$k = 8 \Rightarrow \exists! \textit{sol.}(2, 4)$$

$$k = 3/4 \Rightarrow \exists! \textit{sol.}(-12/23, 63/23)]$$

$$3. \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$[a = b = 1 \Rightarrow \exists \infty^1 \textit{sol.}(x, 1 - x);$$

$$a = b = -1 \Rightarrow \exists \infty^1 \textit{sol.}(x, -1 - x);$$

$$a = b \neq \pm 1 \Rightarrow \textit{incompatibile};$$

$$a \neq b \Rightarrow \exists! \textit{sol.}(x = (1 - b^2)/(a - b), y = (ab - 1)/(a - b))]$$

$$4. \begin{cases} (a - 2)x + ay = -a \\ (2 - a)x + (2 + a)y = -a^2 \end{cases}$$

$$[a = 2 \Rightarrow \exists \infty^1 \textit{sol.}(x = t, y = -1);$$

$$a = -1 \Rightarrow \exists \infty^1 \textit{sol.}(x = t, y = -3t - 1);$$

$$a \neq 2 \wedge a \neq -1 \Rightarrow \exists! \textit{sol.}(x = a/2, y = -a/2)]$$

$$5. \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[k = 1 \Rightarrow \exists \infty^1 \textit{sol.}(t, (1 - t)/4, (1 - t)/4);$$

$$k = 3 \Rightarrow \exists \infty^1 \textit{sol.}(t, t, (1 - 4t)/3);$$

$$k = -4 \Rightarrow \textit{impossibile};$$

$$k \neq \{1, 3, -4\} \Rightarrow \exists! \textit{sol.}(x_1 = x_2 = x_3 = 1/(a + 4))]$$

$$6. \begin{cases} ax + 3ay - z = -1 \\ (a + 1)x + 2y + z = -1 \\ x - ay + 2z = 0 \end{cases}$$

7 Esercizi di ricapitolazione

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

si determini i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $A\underline{x} = \alpha\underline{x}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla ed in corrispondenza di tali valori si risolva la precedente equazione. $[\alpha = 4 \Rightarrow (x, -x), \alpha = 2 \Rightarrow (x, x)]$

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- si discuta al variare di k il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, [$k = -1 \Rightarrow imp.$, $k = -4 \Rightarrow \exists! sol.$, $k \neq \{-4, -1\} \Rightarrow imp.$]

- si determini per quali valori di k il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha soluzione non nulla, [$k = -1$]

- per $k = -1$ si risolvano i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A\underline{x} = \underline{0}$.

3. Dati i seguenti vettori

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- si determini se esistono valori di k per i quali $\underline{z}$ possa esprimersi come combinazione lineare di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ quindi calcolare tale combinazione. [per $k = 3 \Rightarrow \underline{z} = -2\underline{x} + \underline{y}$]

4. Sia $\underline{y} = f(\underline{x})$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinare la terza componente del vettore $f(\underline{x})$ in corrispondenza di $\underline{x} = (21, 0, 11)$. [-10]

5. Dati i seguenti vettori

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -2 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

- si determini se esistono valori di λ tali che $\underline{z}$ sia combinazione lineare di $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{x}$; [$\lambda = 0 \Rightarrow \underline{z} = -\underline{v} + \underline{w} + 0\underline{x}$]

- si determini per quali valori di λ i vettori dati costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. [$\lambda \neq 0$]

6. Si dica al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$ quanti fra i seguenti vettori risultano linearmente indipendenti.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$[b = -1 \Rightarrow 3; b \neq -1 \Rightarrow 4]$$

7. Dato il sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2a^2 \\ 1 & a+1 & -9 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{b}$$

- si determinino, se esistono, i valori di a per i quali il sistema ammette soluzione $\forall \underline{b}; [a \neq -3]$
- per $a = -3$ si determini almeno un $\underline{b} \neq 0$ per cui il sistema ammette soluzioni;
- per $a = -3$ e $\underline{b} = 0$ si determinino le soluzioni del sistema.