

Polinomio di Taylor

Sia

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b)$$

Domanda:

è possibile **“approssimare”** f
“vicino” a x_0 con un polinomio
del tipo

$$P_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n ?$$

Risposta

Teorema:

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a, b), \quad f \in C^n((a, b))$$

$$\Rightarrow \quad \exists! P_n(x, x_0) \text{ t.c.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$$\begin{aligned} P_n(x, x_0) &= \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ &= \sum_{K=0}^n f^{(K)}(x_0) \frac{(x - x_0)^K}{K!} \end{aligned}$$

$$P_n(x, x_0) = \sum_{K=0}^n f^{(K)}(x_0) \frac{(x - x_0)^K}{K!}$$

Si chiama

POLINOMIO DI TAYLOR

di grado n e punto iniziale x_0

Dal teorema precedentemente enunciato

$\Rightarrow$ se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b)$

$$(*) \quad f(x) = \sum_{K=0}^n f^{(K)}(x_0) \frac{(x - x_0)^K}{K!} + R_n(x, x_0)$$

con $R_n(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right)$

Il secondo membro di (*) si chiama
FORMULA DI TAYLOR con **resto**
secondo Peano

Nel caso in cui **$x_0 = 0$** la formula
di Taylor prende il nome di
formula di McLaurin

Esempio $f(x) = \sin x$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! P_n(x, 0) :$$

$$\sin x = P_n(x, 0) + o(x^n) \quad (*)$$

Polinomio di Mc Laurin di grado 3

$$\begin{array}{llll} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x & f''(x) = -\sin x & f'''(x) = -\cos x \\ f(0) = 0 & f'(0) = 1 & f''(0) = 0 & f'''(0) = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow P_3(x, 0) = x - \frac{1}{3!} x^3 \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!}}{x^3} = 0$$

Polinomio di Mc Laurin di grado 1

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow P_1(x, 0) = x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

(*) Polinomio di Mc Laurin di grado 5

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(5)}(x) = \cos x$$

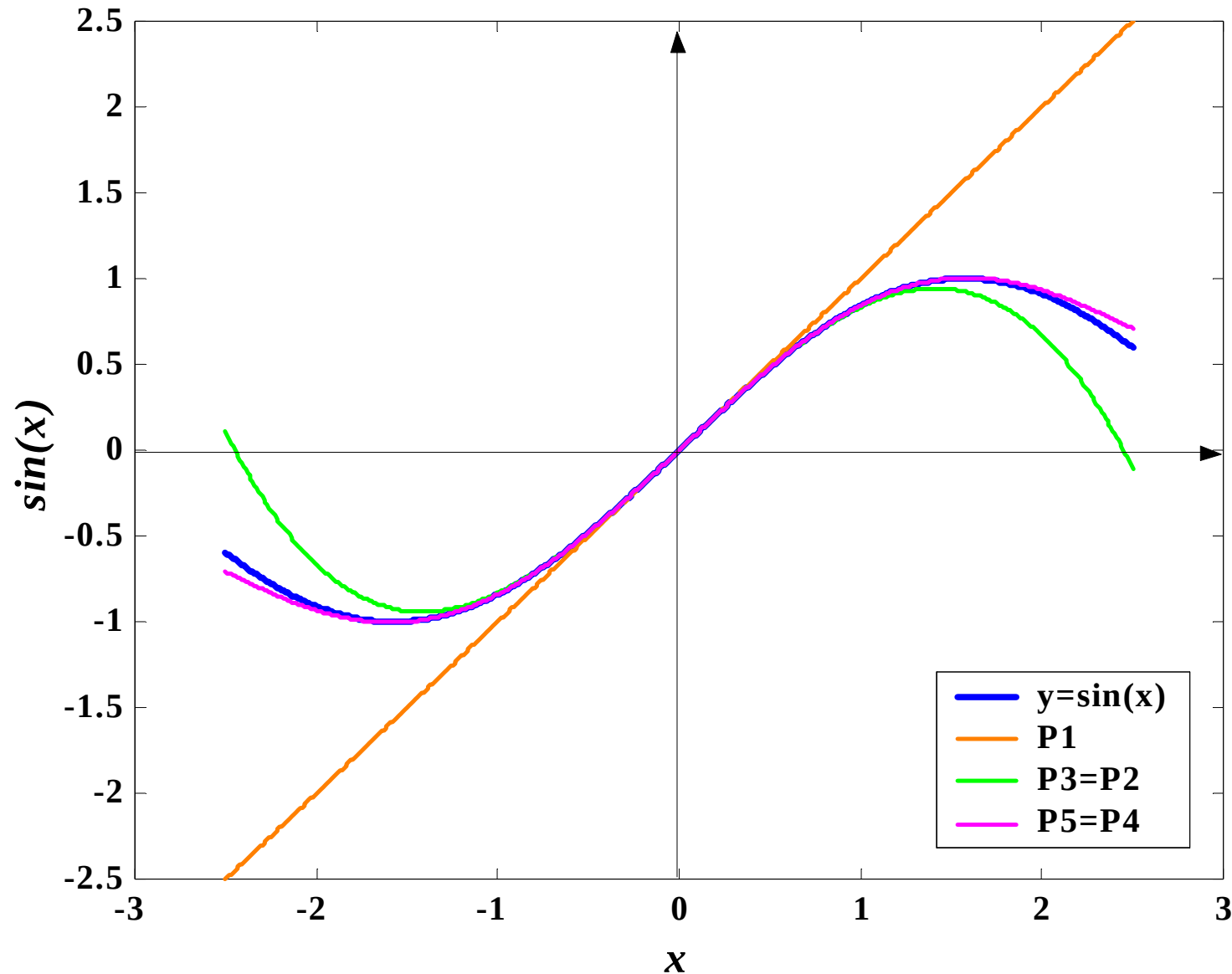
$$f^{(4)}(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow P_5(x, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}}{x^5} = 0$$

⇒ **Aumentando** il grado del polinomio di Mc Laurin, **migliora** l'approssimazione di $f(x)$ “vicino” al punto $x_0=0$

Grafico di $\sin(x)$ e dei polinomi approssimanti fino al grado 5



Resto nella forma di Lagrange

Se $f \in C^{n+1}(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, $P_n(x, x_0)$ Pol di Taylor



$\forall x \in (a, b) \exists \xi \in (x, x_0) :$

$$f(x) = P_n(x - x_0) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_n(x, x_0) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

si chiama **resto**
nella forma di Lagrange

Esempio

Si vuole valutare l'errore che si commette approssimando la funzione

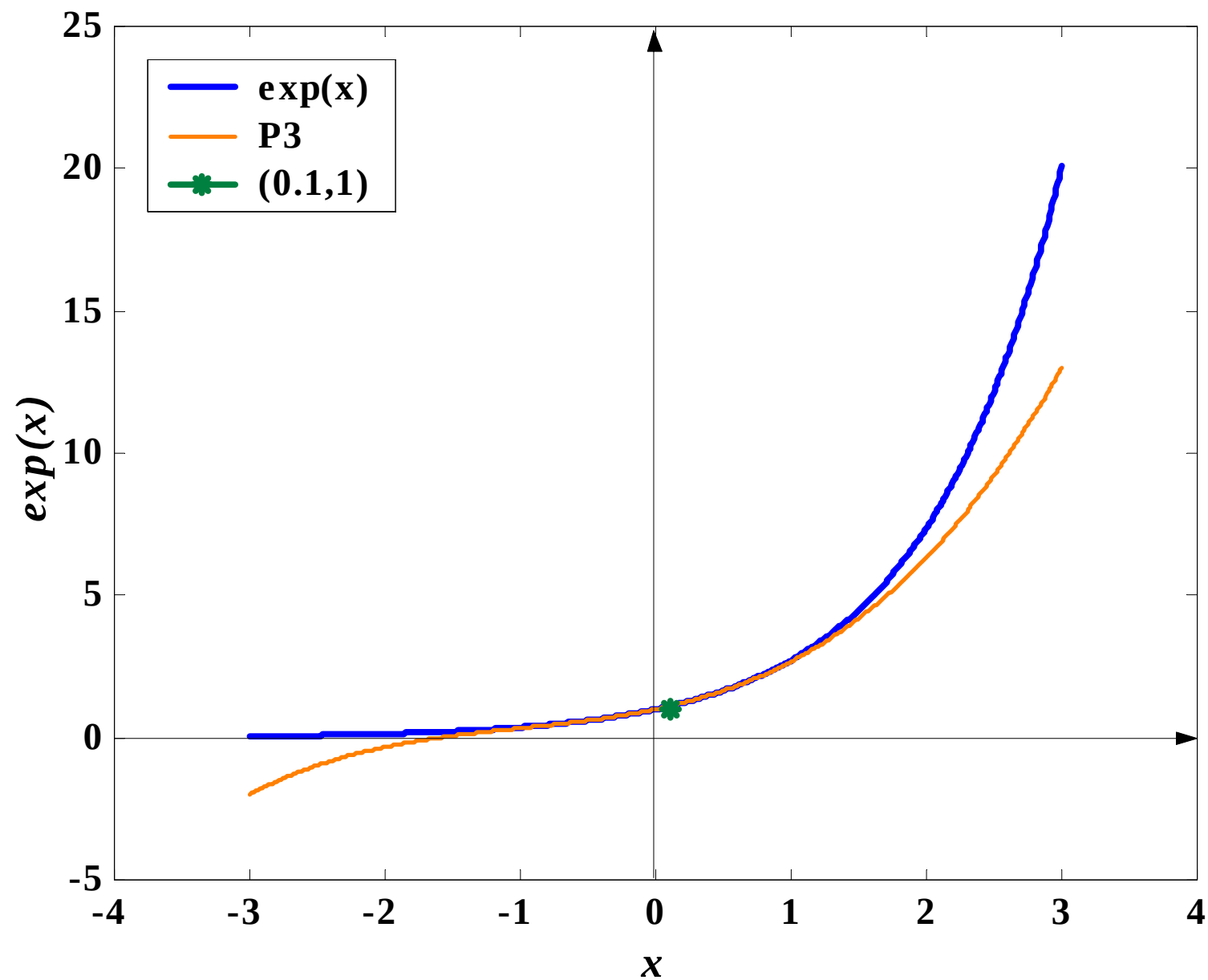
$$f(x) = e^x \quad \text{nel punto} \quad x_0 = 0.1$$

con il polinomio di Mc Laurin di grado 3

$$\Rightarrow P_3(x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\Rightarrow P_3(0.1, 0) = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!}$$

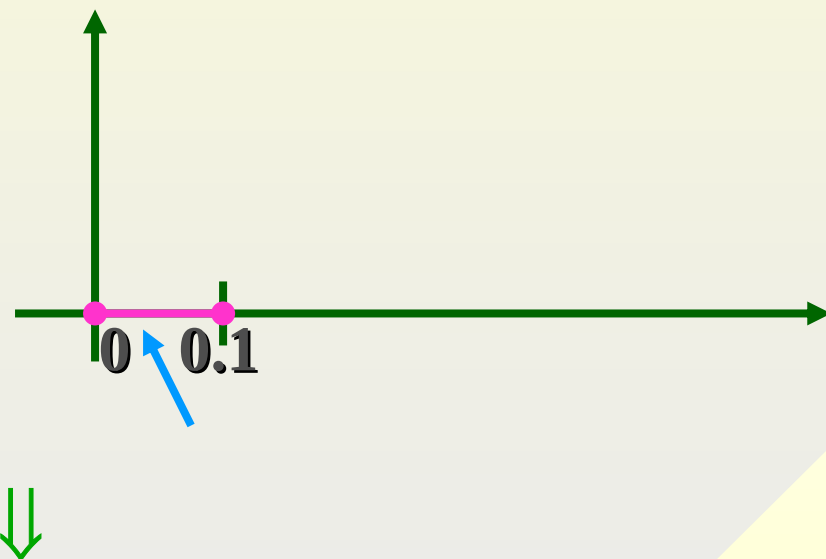
Grafico di $\exp(x)$ e del polinomio di Mc Laurin di grado 3



Utilizzando la formula di Lagrange per il resto $\Rightarrow$

$$R_3(0.1, 0) = e^{0.1} - P_3(0.1, 0) = \frac{e^{\xi}}{4!} (0.1)^4$$

con $\xi \in (0, 0.1)$



$$|R_3(0, 0.1)| = \left| \frac{e^{\xi}}{4!} (0.1)^4 \right| \leq \left| \frac{e^{0.1}}{4!} (0.1)^4 \right| \leq \frac{3}{4! 10^4} = \frac{1}{8000}$$