



Metodi matematici
per l'economia e la finanza
Prof.ssa Cristiana Mammana



PROGRAMMA DEL CORSO

1. Programmazione Lineare

Definizione del problema ed applicazioni economico-finanziarie

2. Introduzione a Matlab

Lavorare con vettori e matrici

Grafici di funzioni di una e due variabili

Functions ed m-file

3. Programmazione Lineare (segue)

Due variabili d'azione:

- il metodo geometrico
- il metodo del simplesso
- il metodo delle due fasi

n variabili d'azione:

- il metodo grafico
- la tavola del simplesso

Cenno alla teoria della dualità:

- teoremi sulla dualità
- interpretazione economica

Analisi di sensitività

4. PL con Matlab

- Metodo grafico
- Comando linprog

5. Ottimizzazione libera e vincolata

Massimi e minimi liberi di una funzione di più variabili

Condizioni del primo ordine e condizioni del secondo ordine

Massimi e minimi vincolati con vincoli di disuguaglianza

Applicazioni economiche e finanziarie

(utilità e domanda, profitto e costo, ottimo paretiano, economia del benessere, modelli di risparmio ottimale, applicazioni al marketing)

6. Ottimizzazione con Matlab

Utilizzo del “Toolbox optimization”
comandi `fminsearch`, `fmincon` ...

LA PROGRAMMAZIONE LINEARE

Si consideri il seguente **problema di programmazione matematica**:

$$\min_{\underline{x}} f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

tale che (1)

$$h_i(\underline{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$g_j(\underline{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

f è detta **funzione obiettivo**,

$h_i \leq 0, g_j(\underline{x}) = 0, \underline{x} \geq \underline{0}$ sono i **vincoli**.

NB: Se f è lineare e h_i, g_j sono lineari $\forall i, \forall j$
allora (1) è un **problema di programmazione lineare**

OSSERVAZIONE:

Il problema : $\max_{\underline{x}} f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

tale che

$$h_i(\underline{x}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$g_j(\underline{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$$x_l \geq \beta_l, \quad l = 1, \dots, n$$

è EQUIVALENTE al problema (1) in quanto:

- i problemi $\max_{\underline{x}} f(\underline{x})$ e $\min_{\underline{x}} [-f(\underline{x})]$ sono **equivalenti**,
- vincoli con $\geq$ si riconducono a $\leq$ cambiando segno ai due membri
- il vincolo $x_l \geq \beta_l$ si traduce nel vincolo $x'_l \geq 0$ ponendo $x'_l = x_l - \beta_l$

Possiamo considerare, quindi, problemi di PL formalizzati come in (1)

Problema di PL

Un **problema di programmazione lineare** può essere formalizzato in una delle seguenti forme:

Forma canonica

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

o in forma
matriciale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A \underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right.$$

A matrice $m \times n$,

$$\underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$$

Forma standard

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

o in forma
matriciale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A \underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right.$$

A matrice $m \times n$,
 $\underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$

Forma mista

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j = e_i, \quad i = 1, \dots, k \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

o in forma
matriciale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\underline{x}} \underline{c}^T \underline{x} \\ A \underline{x} \leq \underline{b} \\ D \underline{x} = \underline{e} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right.$$

A matrice $m \times n$,

D matrice $k \times n$,

$$\underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \underline{e} \in \mathbb{R}^k$$

dove:

- ◆
$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

è la **funzione obiettivo**,

- ◆
$$x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

sono le **variabili d'azione o decisionali**,

- ◆
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$
$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \dots + d_{in}x_n = e_i, \quad i = 1, \dots, k$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

sono i **vincoli**.

NB: Dato un problema di PL è sempre possibile passare da una forma all'altra,

Infatti:

- un eventuale **vincolo di uguaglianza** si trasforma in **due vincoli di disuguaglianza**
(per **esempio** il vincolo $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$ è equivalente alla coppia di vincoli $2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6$ e $2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6$)

- Viceversa: un vincolo di disuguaglianza si trasforma in uno di uguaglianza:

Se i vincoli sono del tipo $\underline{Ax} \leq \underline{b}$,
si può introdurre un vettore $\underline{s}$ di componenti:

$$s_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

dette **variabili slack (scarto)**,
che rappresenta la quantità in difetto al primo membro.

Il vincolo viene trasformato in :

$$\underline{Ax} + I_m \underline{s} = \underline{b}$$

➡ ogni problema di PL è riconducibile alla forma standard

Esempio 1: PROBLEMA DEL CONSUMATORE

- Sia x_i ($i = 1, \dots, n$) la **quantità domandata** del bene i –esimo,
- sia p_i il **prezzo** del bene i –esimo,
- sia $R \in \mathbb{R}^+$ il **reddito disponibile** dell'individuo,
- sia $U(\underline{x})$ la **funzione di utilità del consumatore**, LINEARE

Il problema della ricerca della **massima utilità**
con il vincolo di bilancio è dato da:

$$\max_{\underline{x}} U(\underline{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\text{t.c. } x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \leq R$$

$$x_i \geq 0, \forall i$$

ed è un **problema di PL in forma canonica** !

Esempio 2: PROBLEMA DEL TRASPORTO

- Sia x_{ij} la **quantità da spedire** dall'origine i alla destinazione j ,
- sia c_{ij} il **costo unitario di spedizione** dall'origine i alla destinazione j ,
- sia q_j la **quantità richiesta** dalla destinazione j ,
- sia p_i la **quantità totale prodotta** nell'origine i .

Il problema della **minimizzazione dei costi di trasporto** è dato da:

$$\min_{\underline{x}} \underline{c}^T \underline{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = q_j$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq p_i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

ed è un **problema di PL**
in forma mista!

Esempio 3: PRODUCTION PLANNING

- sia x_i la quantità di prodotto pianificata per il mese i –esimo,
- sia y_i la quantità di prodotto che deve essere immagazzinata per il mese i –esimo,
- sia c_i il costo di produzione per unità di bene nel mese i –esimo e
- sia r_i il costo di immagazzinamento per unità di bene nel mese i –esimo,
- sia m_i la capacità produttiva massima dell'impianto nel mese i –esimo,
- sia d_i la domanda di prodotto nel mese i –esimo,
- sia M_0 la disponibilità iniziale di prodotto in magazzino

Il problema della **minimizzazione del costo complessivo di produzione e di immagazzinamento** può essere formalizzato come segue:

$$\min \sum_{i=1}^n (c_i x_i + r_i y_i)$$

con

$$x_i + y_{i-1} = d_i + y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_i \leq m_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$y_0 = M_0$$

$$x_i, y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

ed è un **problema di PL in forma mista!**

Esempio 4: GESTIONE DEL PORTAFOGLIO

Dati **tre titoli** che generano i seguenti **flussi finanziari** alle scadenze 1 e 2 per un euro investito:

Scadenza	Titolo 1	Titolo 2	Titolo 3
1	10 %	110 %	0
2	110 %	-	121 %

- Siano x_1, x_2, x_3 le **quantità investite** in ciascuno dei tre titoli.
- sia la **dotazione iniziale di capitale** pari a 3 euro.

Il problema della **massimizzazione dell'incasso finale** determinato dai flussi al tempo $t=2$,
- con il **vincolo** che in $t=1$ sia **disponibile almeno 1 euro**
- e con il **vincolo di bilancio**,
si può formalizzare come segue:

$$\max_{\underline{x}} 1, 1x_1 + 1, 21x_3$$

con

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$0, 1x_1 + 1, 1x_2 \geq \mathbf{1}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

ed è un **problema di PL in forma mista!**

Esercizio

Si trasformi il seguente problema di PL nella forma standard:

$$\max_{\underline{x}} 3x_1 + 5x_2$$

tale che

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- ♦ Il problema può essere **ricondotto alla forma canonica**:

$$\min_{\underline{x}} -3x_1 - 5x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- ♦ e dalla forma canonica si passa alla **forma standard**,
introducendo **due variabili slack**:

$$\min_{\underline{x}} z = -3x_1 - 5x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 18$$

$$3x_1 + x_2 + s_2 = 12$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Alcune definizioni

- ◆ Si definisce **soluzione ammissibile** di un problema di PL ogni $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa i vincoli, cioè t.c. $A\underline{x}_0 \leq \underline{b}$ e $\underline{x}_0 \geq \underline{0}$
- ◆ Si definisce **soluzione ammissibile ottimale** di un problema di PL ogni soluzione ammissibile in corrispondenza della quale la funzione obiettivo assume il valore minimo.
- ◆ Si definisce **regione ammissibile** l'insieme delle soluzioni ammissibili.

Due variabili d'azione

Il metodo geometrico

- ♦ La **regione ammissibile (o dominio dei vincoli)** è un **poligono convesso** (perché intersezione di semipiani), **chiuso** ma **non necessariamente limitato**.
- ♦ Le **curve di livello $z=k$** della funzione obiettivo **sono rette**.

Soluzione per via grafica del problema:

1. si rappresenta sul piano la **regione ammissibile**,
2. si traccia la **retta di livello $z=0$** , le linee di livello sono un fascio di rette parallele,
3. dall'andamento delle rette di livello (**direzione in cui la quota aumenta**) si deduce se la funzione ammette minimo.

Il punto di minimo, se esiste, è sui vertici del poligono

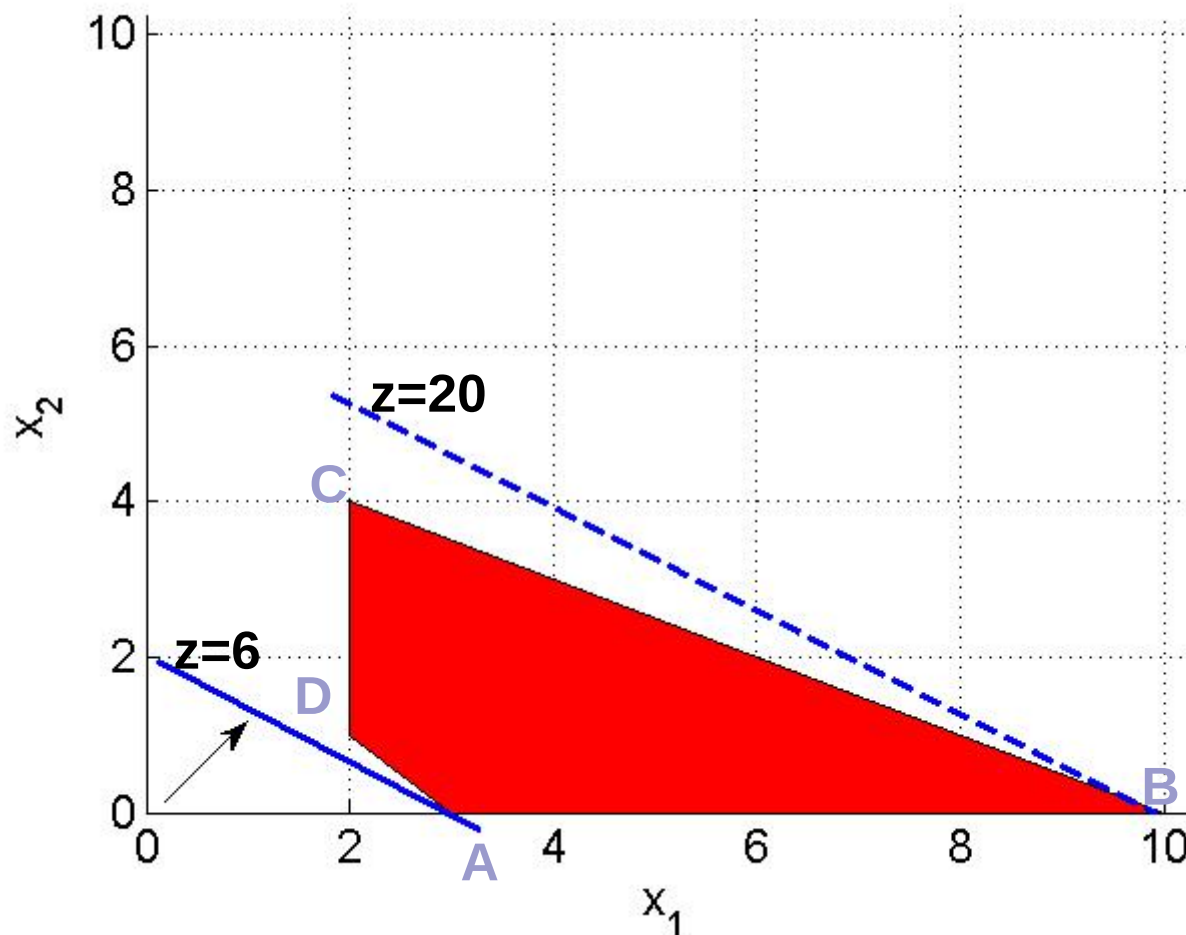
Per determinare il punto di minimo si calcola il valore della funzione obiettivo nei vertici del poligono,
il minimo di questi valori è il minimo della funzione.

Esempio 1: unica soluzione

Consideriamo la **funzione**: $z = 2x_1 + 3x_2$ **con**

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\x_1 + x_2 &\geq 3 \\x_1 &\geq 2, \quad x_2 \geq 0\end{aligned}$$

se ne vuole determinare il minimo.



Nella figura sono rappresentate le **rette** che soddisfano i vincoli con il segno di uguaglianza

La regione ammissibile è il **poligono convesso** di vertici

$$A(3,0), B(10,0), C(2,4), D(2,1)$$

I vertici sono i punti di intersezione dei lati che delimitano il poligono

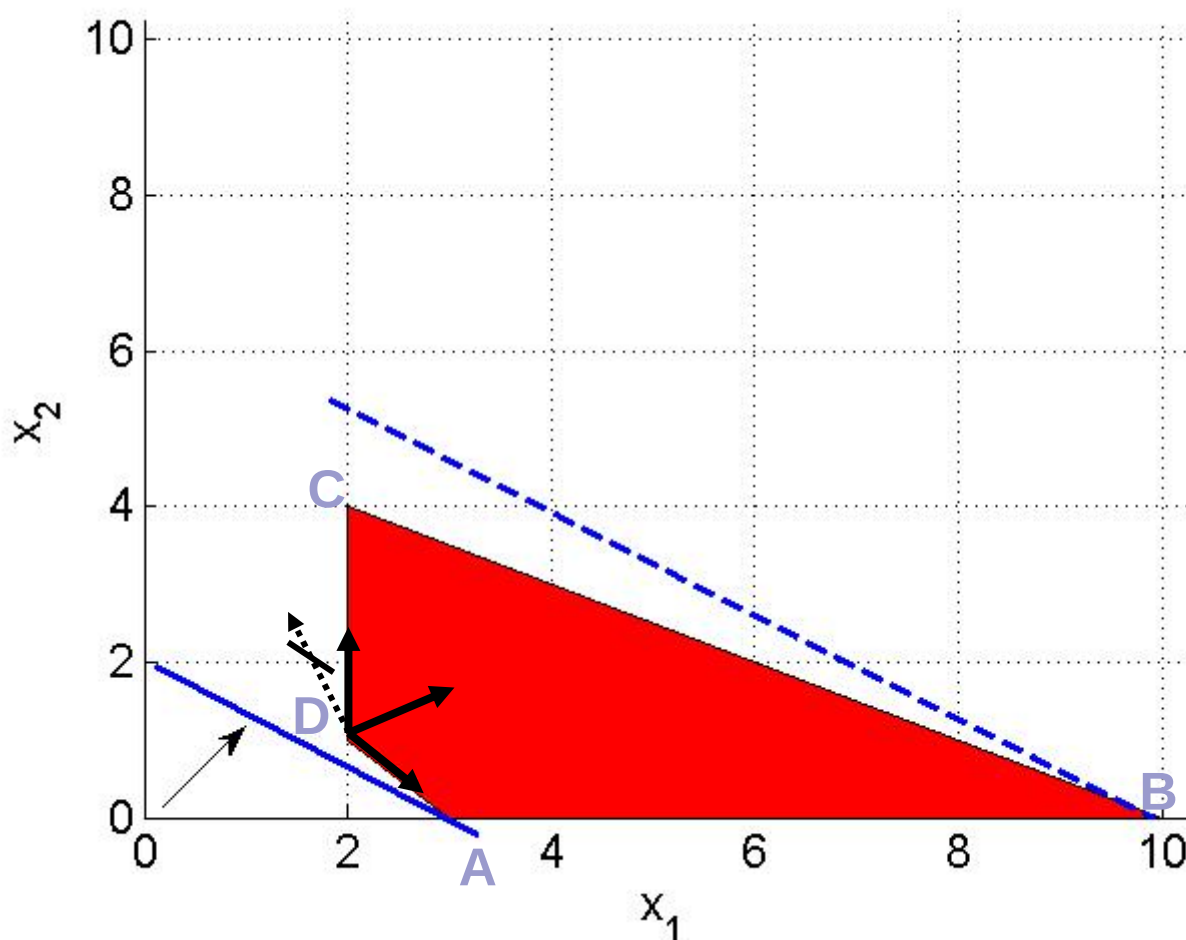
le rette di livello $z=k$ sono date da

$$x_2 = \frac{k}{3} - \frac{2}{3} x_1$$

cioè sono **rette decrescenti** che **si allontanano dall'origine al crescere di k**
(la freccia indica la direzione in cui la quota aumenta).

NB: L'intersezione tra le rette di livello e la regione ammissibile è non vuota.

La **direzione ammissibile** è un vettore uscente da un vertice che “punta” verso la regione ammissibile:



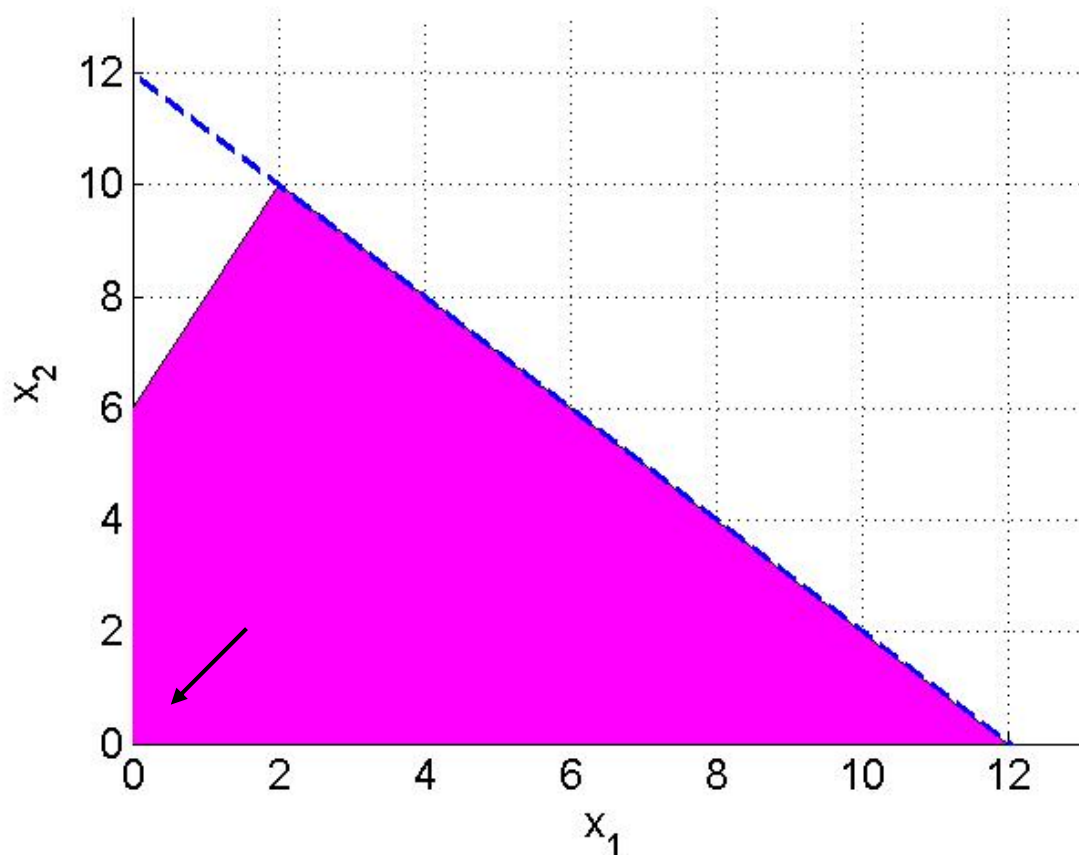
Riprendendo l'esempio, **la funzione assume il minimo in $A(3,0)$**
al quale corrisponde il valore **$z=6$** .

In questo caso esiste un'unica soluzione

Infatti: nessun lato del poligono è parallelo alle rette di livello,
quindi il minimo è un vertice della regione ammissibile, punto
di intersezione di due vincoli.

Esempio 2: infinite soluzioni

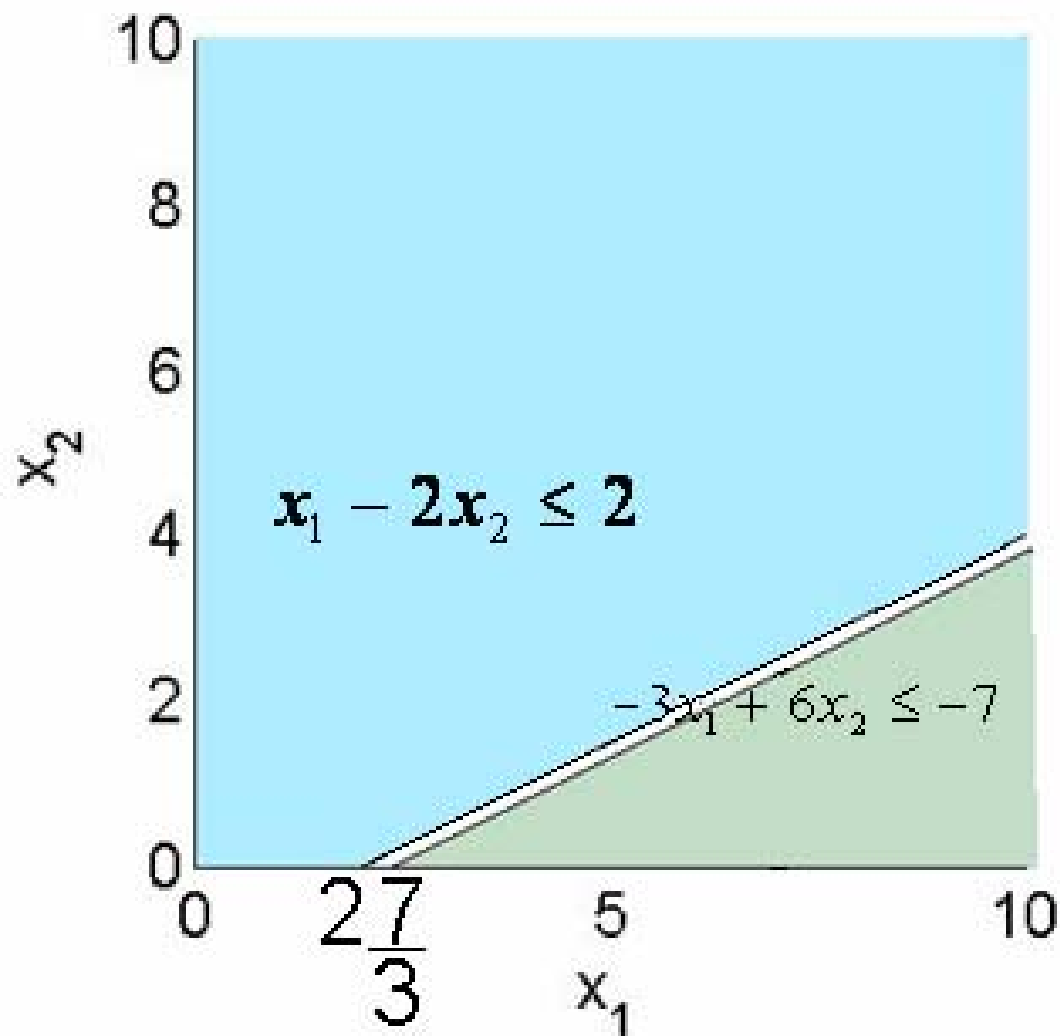
Al contrario: se un lato del poligono è parallelo ad una retta di livello, allora la funzione ha **infiniti minimi o massimi** (in tutti i punti del lato)



Esempio grafico di infiniti minimi

Esempio 3: problema impossibile

Consideriamo il **problema**: $\min_{\underline{x}} 2x_1 - 5x_2$ tale che

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ -3x_1 + 6x_2 &\leq -7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$


Il **dominio dei vincoli** è costituito da
due **regioni che hanno intersezione vuota**,

non esiste quindi nessuna soluzione ammissibile.

Problemi di questo tipo si dicono **impossibili**

questi non ammettono soluzione
poiché **la regione ammissibile è vuota**

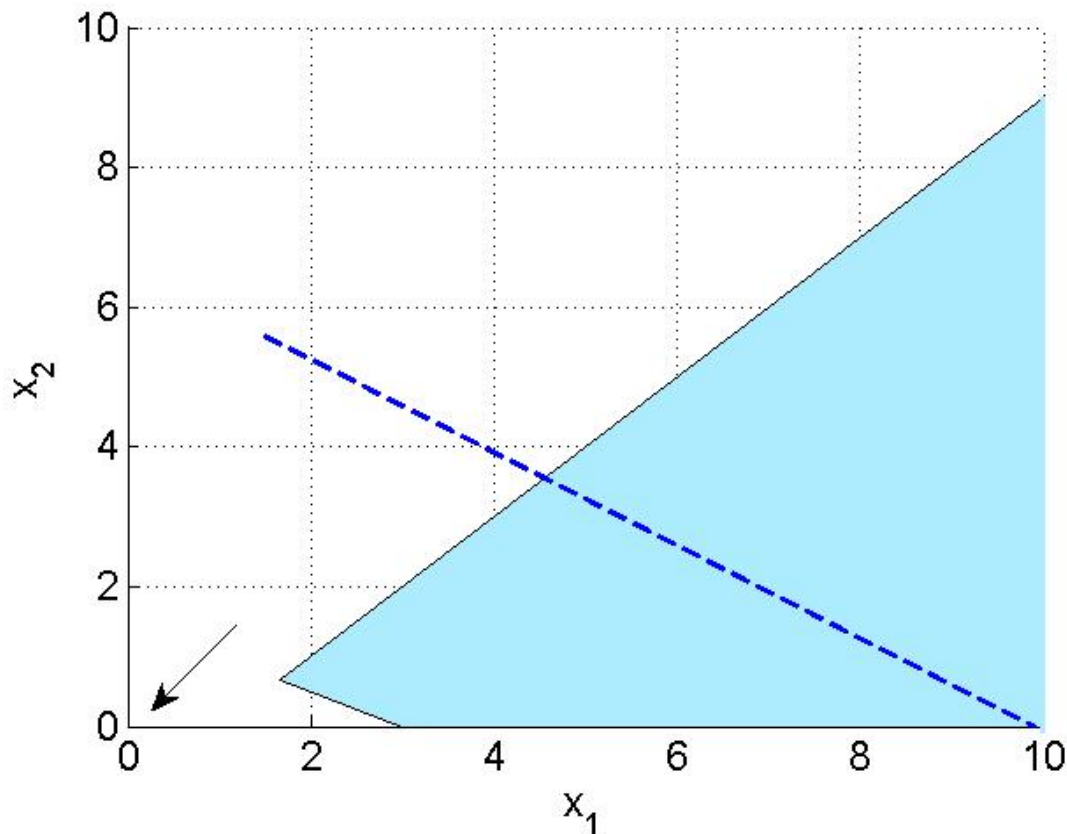
Esempio 4: problema illimitato

Consideriamo il **problema**: $\min z = -2x_1 - 3x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq -1$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



La regione ammissibile è **illimitata** ed **esistono soluzioni ammissibili** ma nessuna è ottima perché **la funzione obiettivo è illimitata inferiormente nella regione ammissibile.**

Problemi di questo tipo si dicono **illimitati**

questi non ammettono soluzione!

NB: se la regione ammissibile è illimitata:

- I vertici del poligono vengono detti **punti estremi**
- un vettore uscente da un punto estremo che appartiene al 'lato' illimitato del poligono viene detto **direzione estrema**

Esempio 5: regione illimitata, problema limitato

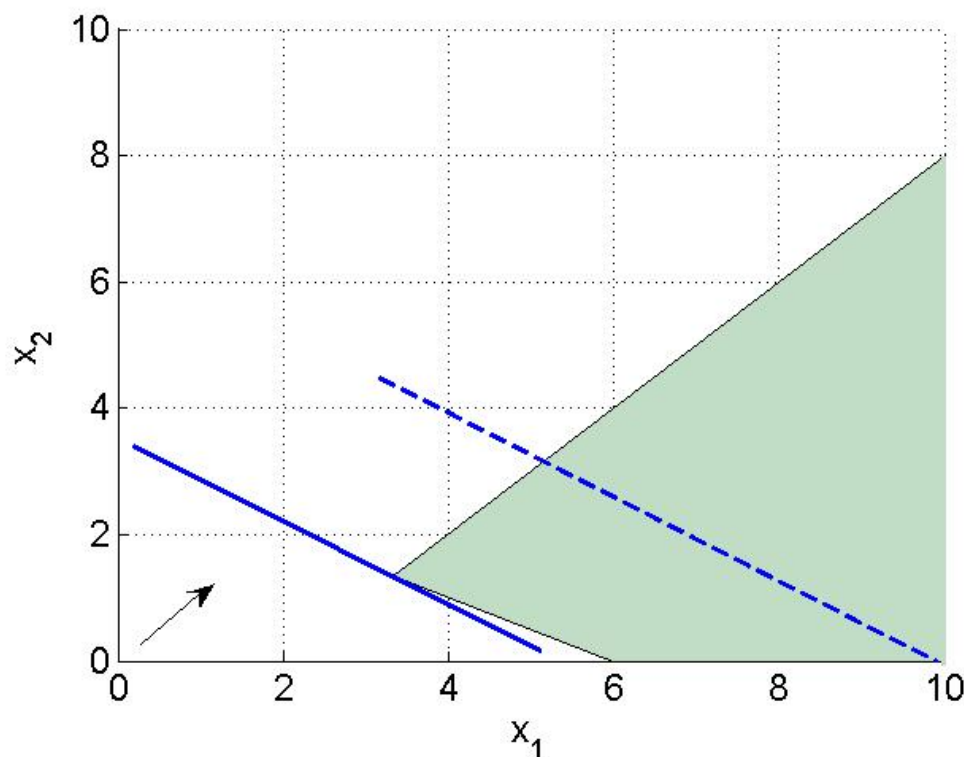
N.B. Se la regione ammissibile è illimitata allora non è necessariamente vero che il problema è illimitato.

Esempio $\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Il dominio dei vincoli è la **regione illimitata** avente per contorno una **spezzata aperta**.

I **punti estremi** sono:

$$A\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right), B(6,0)$$

La funzione ha minimo in A con valore

$$z = \frac{32}{3}$$

Il metodo del semplice

Il **metodo del semplice** è un **algoritmo iterativo** che permette di risolvere problemi di programmazione lineare nel caso in cui:

- il vettore dei termini noti ha tutte le componenti non negative
- i vincoli si presentano tutti con il segno “=”

Definizione

Una **soluzione ammissibile di base** è una **soluzione ammissibile** con $k-m$ variabili nulle, dove k è il numero di variabili (decisionali e ausiliarie) e m è il numero dei vincoli.

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\underline{x}$ sia punto estremo (**vertice**) della regione ammissibile è che sia soluzione di base ammissibile per

$$A\underline{x}=\underline{b}$$

Esempio: dato il seguente **problema in forma standard**:

$$z = -10x_1 - 16x_2$$

$$x_1 - x_2 + s_1 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Per il teorema precedente, si **individua una soluzione ammissibile di base** e se ne cerca **un'altra in corrispondenza della quale il valore assunto dalla funzione obiettivo non risulti superiore al precedente**.

Assegnando il valore **zero alle variabili decisionali**, si determinano i valori delle **variabili di slack (o variabili ausiliarie)**:

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 12$$

 **(0,0,2,12) è una soluzione ammissibile di base iniziale**

Il valore della funzione obiettivo corrispondente a questa soluzione è
 $z=0$

Risolvendo rispetto alle variabili ausiliarie, si ottiene:

$$s_1 = 2 - x_1 + x_2$$

$$s_2 = 12 - x_1 - 4x_2$$

Un sistema scritto in questa forma si chiama **dizionario**
le variabili che sono a sinistra sono le **variabili di base**
le altre **variabili non di base**.

N.B. Le variabili non di base hanno valore corrente zero.

Considerando la funzione obiettivo $z = -10x_1 - 16x_2$

si vede che **incrementando una delle variabili decisionali** il valore di z diminuisce:

- Le **variabili decisionali** sono quindi **candidate ad entrare in base**,
- le **variabili ausiliarie** (di slack) sono **candidate ad uscire**.

La **variabile entrante** è quella che nell'espressione della funzione obiettivo ha coefficiente negativo di massimo modulo,

la **variabile uscente** è quella che impone la limitazione più stretta alla crescita della variabile entrante:

variabile entrante : x_2

variabile uscente : s_2

Il nuovo dizionario è

$$\begin{aligned} s_1 &= 5 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}s_2 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}s_2 \end{aligned}$$

La **nuova soluzione ammissibile di base** è:

$$x_1 = 0, x_2 = 3, s_1 = 5, s_2 = 0$$

Il corrispondente valore della funzione obiettivo è **z=-48** poiché

$$z = -10x_1 - 16\left(3 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}s_2\right) = -48 - 6x_1 + 4s_2$$

che è migliorato!

...Procedendo in modo analogo, **all'iterazione successiva** risulta:

variabile entrante x_1

variabile uscente s_1

La nuova **soluzione ammissibile di base** è

$$x_1 = 4, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0$$

e le **equazioni** diventano

$$x_1 = 4 - \frac{4}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2 \quad x_2 = 2 + \frac{1}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2$$

La **funzione obiettivo** è data da $z = -72 + \frac{24}{5}s_1 + \frac{26}{5}s_2$

Non è possibile migliorare ancora la funzione obiettivo in quanto tutte le variabili presenti hanno coefficienti positivi!

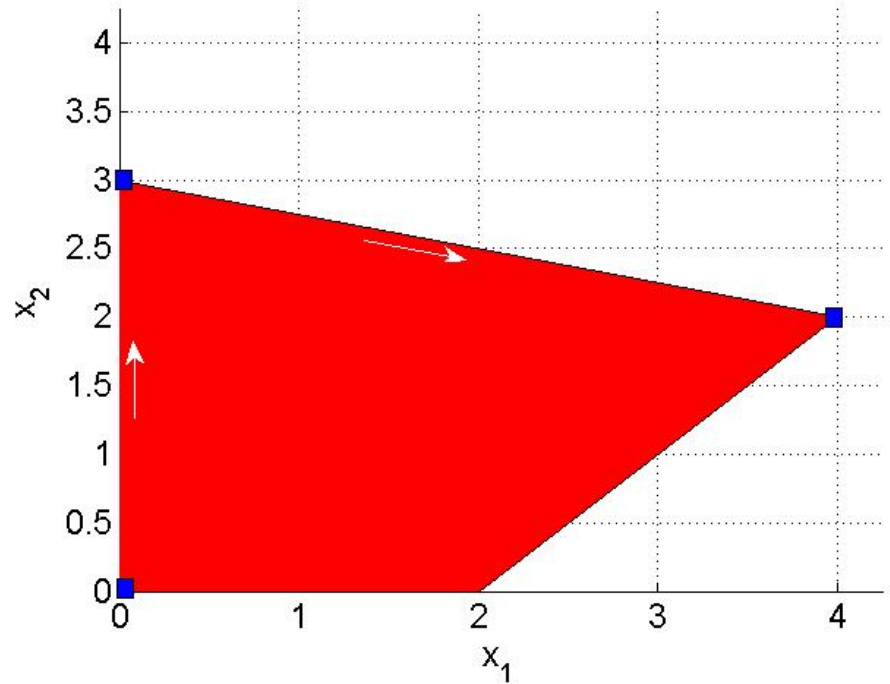
quindi la **soluzione ottima** è

$$x_1 = 4, x_2 = 2$$

con **valore della funzione obiettivo**

$$z = -72$$

Regione ammissibile del problema considerato



- La **prima soluzione ammissibile di base** corrisponde all'**origine** e il valore della funzione obiettivo è zero.
- **Dopo la prima iterazione** abbiamo trovato **un'altra soluzione ammissibile di base con valore minore della funzione obiettivo**, a cui corrisponde il vertice $(0,3)$
(la linea di livello che passa per quel punto corrisponde ad una quota minore).
- **L'iterazione successiva** ci porta su **un altro vertice** e arriviamo alla soluzione ottima (**arresto**).

I **passi fondamentali** del metodo del simplesso sono:

- 1) **passo di inizializzazione** scelta di una soluzione ammissibile di base da cui partire
- 2) **passo di iterazione** scelta della variabile entrante e di quella uscente e applicazione dell'algoritmo.

- La **variabile entrante** è una variabile (non di base) che ha coefficiente negativo nell'espressione della funzione obiettivo.
Se più variabili sono candidate ad essere entranti, si sceglie quella con coefficiente più grande in valore assoluto.

Se non esistono variabili entranti (perché nessuna variabile ha coefficiente negativo), allora **la soluzione trovata è ottima** e l'algoritmo si arresta (**criterio d'arresto**).

- La **variabile uscente** è quella che impone la limitazione più stretta alla crescita della variabile entrante.

Se non esistono variabili uscenti allora **il problema è illimitato**.

3) **passo di arresto** verificare se la soluzione trovata è ottima.

Osservazione

Si noti che il software matematico **MATLAB** sceglie la variabile entrante e la variabile uscente in base alla **regola del più piccolo indice**:

se più variabili sono candidate ad essere entranti (o uscenti), si sceglie quella con indice più piccolo.

Il metodo delle due fasi

Se l'origine non è ammissibile si presenta il problema di determinare una soluzione di base iniziale.

Dato il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ & A \underline{x} \leq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

se qualche componente del vettore dei termini noti è negativa, allora l'origine non corrisponde a una soluzione ammissibile e quindi non può essere scelta come soluzione iniziale

Il problema viene risolto con il **metodo delle due fasi**

Si introduce un **problema ausiliario**:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \underline{x}_i^a \\ & \left(\begin{array}{cc} A & I_m \end{array} \right) \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^a \end{bmatrix} = \underline{b} \\ & \underline{x}, \underline{x}^a \geq 0 \end{aligned}$$

Le componenti del vettore

$$\underline{x}^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m^a \end{pmatrix}$$

si chiamano **variabili artificiali**

Si noti che se il problema iniziale ha n variabili e m vincoli, quello ausiliario ha m variabili artificiali e m vincoli

Prima di introdurre il problema ausiliario, occorre:

- trasformare il problema iniziale in forma standard
- ricondursi a

$$\underline{b} \geq \underline{0}$$

Vale il seguente:

Teorema *Il problema originale ha una soluzione ammissibile se e solo se il problema ausiliario ha una soluzione ottima con tutte le variabili artificiali uguali a zero.*

Per il problema ausiliario esiste sempre una soluzione di base ammissibile iniziale:

$$\underline{x} = \underline{0} \text{ e } \underline{x}^a = \underline{b}$$

Il valore ottimo del problema ausiliario è sempre maggiore o uguale a zero, è zero se e solo se esiste una soluzione ammissibile per il problema originario.

I fase si risolve il problema ausiliario

II fase se il problema ausiliario ha una soluzione ottima con valore zero, allora questa è una soluzione ammissibile di base per il problema originario e si può applicare il metodo del simplesso. Altrimenti il problema è **impossibile**.

Esempio

$$\min -2x_1 - x_2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Si trasforma il problema in forma standard e si moltiplica la seconda equazione per -1:

$$z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 - 2x_2 + s_1 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - s_2 = +3$$

$$\min z = x_1^a + x_2^a$$

Il problema ausiliario è:

$$x_1 - 2x_2 + s_1 + x_1^a = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 - s_2 + x_2^a = 3$$

$$\underline{x}, \underline{s}, \underline{x}^a \geq \underline{0}$$

da cui

$$x_1^a = 3 - x_1 + 2x_2 - s_1$$

$$x_2^a = 3 + 2x_1 - 3x_2 + s_2$$

$$z = 6 + x_1 - x_2 - s_1 + s_2$$

risolviamo con il **metodo del simplesso**

variabile entrante x_2 , variabile uscente x_2^a

$$x_1^a = 5 + \frac{1}{3}x_1 - s_1 + \frac{2}{3}s_2 - \frac{2}{3}x_2^a$$

$$x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{3}x_2^a$$

$$z = 5 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2^a - s_1 + \frac{2}{3}s_2$$

variabile entrante s_1 , variabile uscente x_1^a

$$\begin{aligned}s_1 &= 5 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}s_2 - x_1^a - \frac{2}{3}x_2^a \\ x_2 &= 1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{3}x_2^a\end{aligned}$$

$$z = x_1^a + x_2^a$$

soluzione ottima con $x_1^a = 0, x_2^a = 0$

Il problema originale ammette, quindi, una soluzione ammissibile

Per individuarla, cancelliamo dalle equazioni trovate le variabili artificiali (perché hanno esaurito il loro ruolo) e scriviamo la funzione obiettivo rispetto alle variabili non in base:

$$\begin{aligned}s_1 &= 5 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}s_2 \\ x_2 &= 1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}s_2\end{aligned}$$

$$z = -1 - \frac{8}{3}x_1 - \frac{1}{3}s_2$$

Non esistono variabili uscenti, il problema è pertanto illimitato.

n variabili d'azione ($n > 2$)

Il metodo grafico

Un problema di PL in n variabili è riconducibile a un problema di PL in due variabili se nel sistema dei vincoli compaiono $n - 2$ equazioni dalle quali ricavare $n - 2$ variabili in funzione delle restanti due.

Esempio

Gli stabilimenti O_1 e O_2 producono $300q$ e $500q$ di merce che viene inviata ai depositi D_1, D_2, D_3 . Le capienze di D_1, D_2, D_3 sono: $200q, 150q, 450q$.

Data la seguente matrice dei costi di trasporto per quintale, determinare il piano di trasporto ottimo

	D_1	D_2	D_3
O_1	10	15	20
O_2	16	13	12

Siano :

- x_1, x_2, x_3 le quantità prodotte in O_1 e inviate a D_1, D_2, D_3

- y_1, y_2, y_3 le quantità prodotte in O_2 e inviate a D_1, D_2, D_3

il problema ammette il seguente modello matematico :

$$\min z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 16y_1 + 13y_2 + 12y_3$$

$$x_1 + y_1 = 200$$

$$x_2 + y_2 = 150$$

$$x_3 + y_3 = 450$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 500$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{y} \geq \underline{0}$$

Da cui

$$\min z = 12950 - 14x_1 - 6x_2$$

con

$$x_1 \leq 200$$

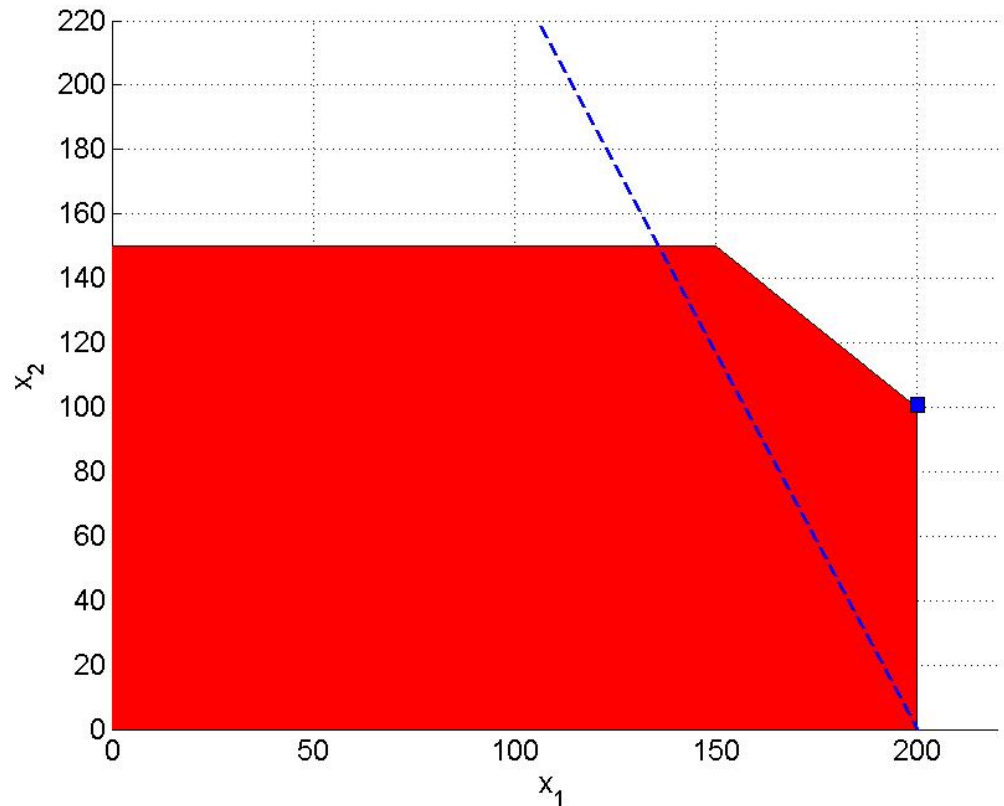
$$x_2 \leq 150$$

$$x_1 + x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 + 150 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Risolviamo con il
metodo geometrico



La regione ammissibile è il poligono di vertici:
 $O(0,0)$, $A(200,0)$, $B(200,100)$, $C(150,150)$, $D(0,150)$

z assume il minimo valore in **B** , con $z(\mathbf{B})=9550$