

La tavola del simplesso (metodo del pivot)

Esempio

$$\min z = -5x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 15$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Si trasforma il problema in forma standard:

$$\min z = -5x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + s_1 = 15$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + s_2 = 10$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{s} \geq \underline{0}$$

La soluzione ammissibile iniziale è $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 0, 0, 15, 10)$ con $z = 0$

Dato il problema:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x}} \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

$$\text{con } \underline{x}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n, A \in M(m \times n), \underline{b} \in \mathbb{R}^m$$

la tavola iniziale del simplesso è una matrice di $m+1$ righe e $n+m+1$ colonne:

$$\left(\begin{array}{cc|c} A & I_m & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 0 \end{array} \right)$$

- Le prime n colonne contengono i coefficienti delle variabili decisionali,
- le successive m colonne contengono i coefficienti delle variabili slack (o ausiliarie),
- l'ultima colonna è quella dei termini noti,
- le intestazioni delle prime m righe sono le **variabili di base** (inizialmente le variabili slack perché la soluzione ammissibile iniziale è l'origine),
- l'ultima riga contiene i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo cambiati di segno,
- in basso a destra si legge il valore corrente della funzione obiettivo

La tavola iniziale del simplesso associata al problema considerato è:

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ \hline 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Come **variabile entrante** si sceglie quella che nell'ultima riga ha il coefficiente positivo più grande, la variabile entrante individua la **colonna di pivot**,
- facendo i quozienti tra la colonna dei termini noti e la colonna di pivot, il più piccolo valore non negativo individua la **riga di pivot**, l'intestazione della riga di pivot è la **variabile uscente**,

Metodo del pivot: si dividono tutti gli elementi della riga di pivot per il pivot dell'iterazione e, mediante combinazioni lineari di questa riga con le altre, si fanno diventare zero tutti gli elementi della colonna del pivot (escluso il pivot che diventa uno).

Si trasforma così la tabella ottenendo una nuova soluzione ammissibile di base.

Si ripete il procedimento fino a raggiungere l'ottimo.

Prima iterazione

la colonna di pivot è la prima e la variabile entrante è x_1

la riga di pivot è la seconda e la variabile uscente è s_2

Il **pivot** dell'iterazione è l'entrata di posto (2,1)

Dopo aver diviso la riga di pivot per 2

1) si moltiplica la seconda riga per -1 e si somma alla prima

2) si moltiplica la seconda riga per -5 e si somma alla terza

La tavola del simplesso trasformata è la seguente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 10 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ \hline 0 & \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -25 \end{array} \right)$$

L'intestazione della prima riga è s_1 , mentre della seconda è x_1

La nuova soluzione di base è $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0, s_1 = 10, s_2 = 0$ con $z = -25$

Seconda iterazione

la colonna di pivot è la seconda e la variabile entrante è x_2

la riga di pivot è la prima e la variabile uscente è s_1

Il **pivot** dell'iterazione è l'entrata di posto (1,2)

Dopo aver diviso la riga di pivot per $5/2$

- 1) si moltiplica la prima riga per $1/2$ e si somma alla seconda
- 2) si moltiplica la prima riga per $-11/2$ e si somma alla terza

La tavola del simplesso trasformata è la seguente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 4 \\ 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 7 \\ \hline 0 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{7}{5} & -47 \end{array} \right)$$

L'intestazione della prima riga è x_2 , mentre della seconda è x_1

La nuova soluzione di base è $x_1 = 7, x_2 = 4, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$ con $z = -47$

Terza iterazione

la colonna di pivot è la terza e la variabile entrante è x_3

la riga di pivot è la seconda e la variabile uscente è x_1

Il **pivot** dell'iterazione è l'entrata di posto (2,3)

La tavola del simplesso trasformata è la seguente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 25 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 2 & 35 \\ \hline -9 & 0 & 0 & -4 & -5 & -110 \end{array} \right)$$

L'intestazione della prima riga è x_2 , mentre della seconda è x_3

La nuova soluzione di base è $x_1 = 0, x_2 = 25, x_3 = 35, s_1 = 0, s_2 = 0$ con $z = -110$

Criterio di arresto

Non esiste la variabile entrante quindi la soluzione trovata è ottima



N.B. Il metodo del simplesso permette di determinare una soluzione ottima ma può anche indicare se ne esistono altre.

Si ha l'ottimo quando tutti i coefficienti della riga della funzione obiettivo sono negativi o nulli.

Precisamente, sono nulli quelli corrispondenti alle variabili della base.

Se un coefficiente corrispondente a una variabile non appartenente alla base è nullo, allora esiste un'altra soluzione ottima che si ricava con il metodo del simplesso.

Il metodo delle due fasi

Se l'origine non è ammissibile, per determinare la soluzione ammissibile iniziale si ricorre al **problema ausiliario**.

Esempio

$$\min_{\underline{x}} z = -x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Poiché l'origine non è ammissibile, per determinare (se esiste) una soluzione ammissibile iniziale, applichiamo il metodo delle due fasi.

Consideriamo il problema ausiliario:

$$\min_{\underline{x}} z^a = x_1^a + x_2^a$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_1^a = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_2^a = 1$$

I FASE

risolviamo il problema ausiliario con il metodo del pivot:

La tavola iniziale del simplesso è :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Le intestazioni delle colonne sono : $x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a$

Le intestazioni delle prime due righe sono : x_1^a, x_2^a

La terza riga contiene i coefficienti delle variabili nell'espressione di z cambiati di segno

L'ultima riga contiene i coefficienti delle variabili nell'espressione di z^a cambiati di segno

La prima soluzione è $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_1^a = 1, x_2^a = 1$

Prima iterazione

la colonna di pivot è la prima e la variabile entrante è x_1

la riga di pivot è la prima e la variabile uscente è x_1^a

Il **pivot** dell'iterazione è l'entrata di posto (1,1)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

L'intestazione della prima riga è x_1 , mentre della seconda è x_2^a

La nuova soluzione di base è $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_1^a = 0, x_2^a = 0$ con $z^a = 0$

Nonostante un coefficiente sia positivo, la soluzione è ottimale per la prima fase perché non è possibile migliorare ancora la funzione obiettivo del problema ausiliario.

Per trovare una soluzione di base per il problema originario, dobbiamo però fare un'altra iterazione perché una sola variabile decisionale è in base.

Seconda iterazione

la colonna di pivot è la terza e la variabile entrante è x_3

la riga di pivot è la seconda e la variabile uscente è x_2^a

Il **pivot** dell'iterazione è l'entrata di posto (2,3)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

L'intestazione della prima riga è x_1 , mentre della seconda è x_3

La nuova soluzione di base è $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_1^a = 0, x_2^a = 0$ con $z^a = 0$

La soluzione è ottimale perché non esistono variabili entranti

Abbiamo trovato una soluzione ottima con variabili ausiliarie nulle, quindi esiste una soluzione ammissibile per il problema originale.

II FASE

Riprendiamo la tavola finale del simplesso ed eliminiamo l'ultima riga e le variabili ausiliarie perché hanno esaurito il loro ruolo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -3/2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

L'intestazione della prima riga è x_1 , mentre della seconda è x_3

La soluzione ammissibile di base iniziale è $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ con $z = -1$ ed è ottimale perché non esistono variabili entranti

Consideriamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x}} \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

$$\text{con } \underline{x}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n, A \in M(m \times n), \underline{b} \in \mathbb{R}^m$$

Assumiamo la seguente ipotesi:

$m < n$ e la matrice A ha rango m (le righe di A sono linearmente indipendenti)

Se $m \geq n$, possono presentarsi due casi:

- il rango di A è n , allora dal sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ si ottiene una sola soluzione o nessuna

oppure

- il rango di A è $r(A) < n$, allora il sistema non ha nessuna soluzione o le equazioni non utilizzate nel calcolo del rango sono ridondanti e si ritorna al caso $m < n$

Poiché il rango di A è $r(A)=m$ e $m < n$, è possibile scegliere m colonne linearmente indipendenti e far sì che esse siano le prime.

A può essere scritta come l'accostamento di due matrici:

$$A = [B : N]$$

dove $B \in M(m \times m)$, $N \in M(m \times k)$ (con $k = n - m$) e B è non singolare

Per il vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ si considerino le m variabili associate a B e le $n - m$ variabili associate a N :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \dots \\ \underline{x}_N \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_B \in \mathbb{R}^m, \underline{x}_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Risulta:

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} B & \vdots & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \cdots \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = \underline{b}$$

da cui:

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{x}_N$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \cdots \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ \cdots \\ I \end{bmatrix} \underline{x}_N$$

cioè il sistema ha ∞^{n-m} soluzioni

Definizione

La soluzione ottenuta ponendo $\underline{x}_N = 0$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \cdots \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

*è detta **soluzione di base***

*Le m variabili corrispondenti a $B^{-1}\underline{b}$ sono dette **variabili di base***

Una soluzione di base possiede almeno $n-m$ componenti nulle.

Una soluzione di base con più di $n-m$ componenti nulle è detta **soluzione di base degenera** e **B base degenera**

Teorema fondamentale della programmazione lineare

Dato un problema di PL in forma standard,

se esiste una soluzione ammissibile allora esiste una soluzione ammissibile di base,

se esiste una soluzione ammissibile ottimale allora esiste una soluzione ammissibile di base ottimale.

N.B. La ricerca della soluzione ottimale si effettua tra le soluzioni di base ammissibili, che sono in **numero finito** non superiore a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Interpretazione geometrica del problema

L'iperpiano definito da:

$$\left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a}^T \underline{x} = b \right\}$$

divide lo spazio in due semispazi dati da:

$$\underline{a}^T \underline{x} \geq b \text{ e } \underline{a}^T \underline{x} \leq b$$

L'intersezione di un numero finito di semispazi è un **poliedro**.

Un poliedro convesso, limitato e non vuoto è detto **politopo**.

Definizione *Un punto $\underline{x}$ di un insieme convesso C è un **estremo** se esso non è rappresentabile come combinazione lineare convessa in senso stretto di coppie di punti distinti di C , cioè*

$$\underline{x} \neq \lambda \underline{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \underline{x}^{(2)} \quad \forall \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)} \in C, \quad 0 < \lambda < 1$$

Gli **estremi di un poliedro** sono tutti e soli i suoi **vertici**

Teorema *Ogni soluzione di base ammissibile corrisponde ad un estremo dell'insieme definito dai vincoli e viceversa*

Il metodo del simplesso

Consideriamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min z &= \underline{c}^T \underline{x} \\ \begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \cdots \\ \underline{s} \end{bmatrix} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \\ \underline{s} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

con termini noti non negativi

Scelta di una soluzione ammissibile di base

La sottomatrice $B=I$ è invertibile, permutiamo le colonne della matrice e i coefficienti della funzione obiettivo e delle sue componenti in modo che le colonne linearmente indipendenti siano le prime:

$$\begin{aligned} \min z &= \underline{c}^T \underline{x} \\ \begin{bmatrix} I & \vdots & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{s} \\ \cdots \\ \underline{x} \end{bmatrix} &= \underline{b} \end{aligned}$$

La prima soluzione ammissibile di base è:

$$\begin{bmatrix} \underline{s} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

e il corrispondente valore della funzione obiettivo

$$z = \underline{0}^T \underline{s} + \underline{c}^T \underline{x} \quad \text{è zero.}$$

Controllo dell'ottimalità della soluzione

La funzione obiettivo si esprime come:

$$z = \underline{c}^T \underline{x} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B + \underline{c}_N^T \underline{x}_N = \underline{c}_B^T (B^{-1} \underline{b} - B^{-1} N \underline{x}_N) + \underline{c}_N^T \underline{x}_N = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + (\underline{c}_N^T - \underline{c}_B^T B^{-1} N) \underline{x}_N = \underline{c}_B^T \underline{x}_B^* + (\underline{c}_N^T - \underline{c}_B^T B^{-1} N) \underline{x}_N$$

le componenti del vettore

$$\underline{c}_N^T - \underline{c}_B^T B^{-1} N$$

si dicono **costi marginali ridotti**

Scelta di una nuova soluzione di base

Ogni soluzione ammissibile deve soddisfare il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, cioè

$$\left[\begin{array}{c|c} B & N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{x}_B \\ \dots \\ \underline{x}_N \end{array} \right] = \underline{b}$$

da cui:

$$\begin{aligned} B\underline{x}_B + N\underline{x}_N &= \underline{b} \\ \underline{x}_B &= B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{x}_N = \underline{x}_B^* - B^{-1}N\underline{x}_N \end{aligned}$$

ponendo $\underline{x}_N = 0$ si ottiene la soluzione attuale.

Se non è ottima, almeno una componente dei costi marginali è negativa, quindi un incremento della corrispondente componente del vettore $\underline{x}_N$ porta a una diminuzione della funzione obiettivo.

Il ciclo infinito

Per determinare una soluzione di base, si scelgono m variabili di base tra $m+n$ variabili complessive, si scelgono cioè m colonne indipendenti della matrice dei coefficienti

la soluzione dipende dalla scelta delle colonne

Poiché questa scelta può essere fatta in un numero finito di modi, se il metodo del simplesso non si arresta, deve tornare sulle stesse soluzioni.

In presenza di vertici degeneri, pur avendo trovato un dizionario diverso, potremmo avere la stessa soluzione, perché:

ad un vertice degenero corrispondono più basi diverse

(a differenza di un vertice non degenero a cui corrisponde una sola base)

In questo caso l'algoritmo potrebbe non cambiare il vertice su cui si trova e potrebbe nascere un **ciclo infinito**.

Teorema *Se più variabili sono candidate ad essere entranti (o uscenti), allora la regola del più piccolo indice arresta il metodo del simplesso in un numero finito di passi*

Cenno alla teoria della dualità

Consideriamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned} \quad \text{con } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Sia $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ un vettore non nullo,

moltiplichiamo per esso ambo i membri del vincolo :

$$\underline{y}^T A\underline{x} = \underline{y}^T \underline{b}$$

se scegliamo $\underline{y}$ tale che $\underline{y}^T A \leq \underline{c}^T$, allora $\underline{y}^T A\underline{x} \leq \underline{c}^T \underline{x}$,

quindi $\underline{y}^T \underline{b} = \underline{y}^T A\underline{x} \leq \underline{c}^T \underline{x}$

La quantità

$$\underline{y}^T \underline{b}$$

assume il significato di limite inferiore di ogni soluzione ammissibile e quindi dell'ottimo:

deve essere **massimizzata**

Si ottiene quindi il problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{y}^T \underline{b} \\ \underline{y}^T \underline{A} \leq & \underline{c}^T \\ \underline{y} \neq & \underline{0} \end{aligned}$$

che viene detto **problema duale** di quello di partenza.

Quest'ultimo viene chiamato **problema primale**

- Il **primale** è un **problema di minimo**, con n variabili e m vincoli, le componenti del vettore

$\underline{c}$

sono i coefficienti della funzione obiettivo

e il termine noto nel sistema dei vincoli è $\underline{b}$

- Il suo **duale** è un **problema di massimo**, con m variabili e n vincoli, le componenti del vettore

$\underline{b}$

sono i coefficienti della funzione obiettivo

e il termine noto nel sistema dei vincoli è $\underline{c}$

Dato il **problema primale**

$$\begin{aligned} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

Il **problema duale** è

$$\begin{aligned} \max \underline{y}^T \underline{b} \\ \underline{y}^T A &\leq \underline{c}^T \\ \underline{y} &\leq \underline{0} \end{aligned}$$

Teorema della dualità debole

Siano $\underline{x}$ e $\underline{y}$ soluzioni ammissibili rispettivamente del problema primale e duale, allora il valore della funzione obiettivo del primale in $\underline{x}$ non è inferiore al valore della funzione obiettivo del duale in $\underline{y}$

Segue che

se uno dei due problemi è illimitato allora l'altro è impossibile

N.B. non è vero il viceversa, infatti

se uno dei due problemi è impossibile, allora l'altro o è impossibile o è illimitato

Teorema di dualità

Se il problema primale ha una soluzione ottima $\underline{x}^*$ allora anche il problema duale ha una soluzione ottima $\underline{y}^*$ ed inoltre

$$\underline{c}^T \underline{x}^* = \underline{y}^{*T} \underline{b}$$

cioè i valori ottimali delle funzioni obiettivo dei due problemi coincidono

Il problema duale del duale è il problema primale

quindi

Il problema primale ha soluzione ottima se e solo se il problema duale ha soluzione ottima

Esempio

Un'impresa produce due beni. Gli impianti per la produzione sono due : ognuno può essere utilizzato r_1 e r_2 ore giornaliere.

La produzione di ogni unità del bene 1 richiede :

- a_{11} ore dell'impianto 1
- a_{12} ore dell'impianto 2

la produzione di ogni unità del bene 2 richiede :

- a_{21} ore dell'impianto 1
- a_{22} ore dell'impianto 2.

Il profitto lordo per unità del bene 1 è c_1 ,

il profitto lordo per unità del bene 2 è c_2 .

Siano x_1 e x_2 il valore per unità degli impianti 1 e 2.

Si vuole minimizzare il valore totale imputato alle risorse
(costo opportunità totale), rispettando il vincolo seguente :

il costo opportunità totale della produzione di un'unità di ciascun bene sia non inferiore al profitto lordo della sua produzione.

Il problema è formalizzato come segue:

$$\min_{\underline{x}} r_1 x_1 + r_2 x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq c_2$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Invertiamo il verso della disuguaglianza nei primi due vincoli:

$$\min_{\underline{x}} r_1 x_1 + r_2 x_2$$

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -c_1$$

$$-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -c_2$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Il **problema duale** di questo è

$$\max_{\underline{y}} -c_1 y_1 - c_2 y_2$$

$$-a_{11} y_1 - a_{21} y_2 \leq r_1$$

$$-a_{12} y_1 - a_{22} y_2 \leq r_2$$

$$\underline{y} \leq \underline{0}$$

Primale

$$\min_{\underline{x}} r_1 x_1 + r_2 x_2$$

$$-a_{11} x_1 - a_{12} x_2 \leq -c_1$$

$$-a_{21} x_1 - a_{22} x_2 \leq -c_2$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Duale

$$\max_{\underline{y}} c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 \leq r_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 \leq r_2$$

$$\underline{y} \geq \underline{0}$$



Nell'ottimo i valori delle funzioni obiettivo sono uguali

Poiché il significato del valore della funzione obiettivo del **primale** è di **costo opportunità totale**,

il significato del valore della funzione obiettivo del **duale** deve essere monetario

y_1 e y_2 possono essere interpretate come le **quantità dei due beni**

la funzione obiettivo assume il significato di **profitto lordo totale**

I **vincoli** indicano che non si può superare la capacità produttiva degli impianti

Analisi di sensitività

Per analisi della sensitività si intende

l'analisi delle variazioni dei valori di ottimo di un problema di PL dovute a cambiamenti dei dati del problema

Consideriamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

e il suo duale:

$$\begin{aligned} \max \underline{y}^T \underline{b} \\ \underline{y}^T A &\leq \underline{c}^T \\ \underline{y} &\neq \underline{0} \end{aligned}$$

Siano $\underline{x}^*$ e $\underline{y}^*$ le soluzioni ottimali del primale e del duale e z^* il valore della funzione obiettivo nell'ottimo.

Tramite una variazione $\Delta \underline{b}$ modifichiamo il vettore dei termini noti, che diventa $\underline{b} + \Delta \underline{b}$.

I vincoli del duale non cambiano, mentre il valore della funzione obiettivo diventa: $\underline{y}^{*T} (\underline{b} + \Delta \underline{b})$

Se $\underline{y}^*$ non è ottimale, allora indicando con z' il nuovo valore ottimale della funzione obiettivo, si ha:

$$z' \geq \underline{y}^{*T} (\underline{b} + \Delta \underline{b}) = z^* + \underline{y}^{*T} \Delta \underline{b}$$

$$z' - z^* \geq \underline{y}^{*T} \Delta \underline{b}$$

cioè **la variazione della funzione obiettivo è limitata inferiormente**

Una variazione del vettore dei termini noti non modifica i costi marginali

quindi la soluzione di base è ottima se e solo se $B^{-1}(\underline{b} + \Delta \underline{b}) \geq \underline{0}$

Valutiamo la soluzione

del problema perturbato: $\underline{x}_B + \Delta \underline{x}_B = B^{-1}(\underline{b} + \Delta \underline{b})$

$$\Delta \underline{x}_B = B^{-1} \Delta \underline{b}$$

e la variazione della
funzione obiettivo:

$$z' - z^* = \underline{c}_B^T (\underline{x}_B + \Delta \underline{x}_B) - \underline{c}_B^T \underline{x}_B = \underline{c}_B^T B^{-1} \Delta \underline{b} = \underline{y}^{*T} \Delta \underline{b}$$



Dal primo e ultimo membro segue che

La soluzione del duale rappresenta la **sensitività** del valore assunto dalla funzione obiettivo rispetto a variazioni del vettore dei termini noti

cioè

le variabili decisionali del duale rappresentano le derivate della funzione obiettivo rispetto al vettore

b

valutate in corrispondenza dell'ottimo

esse assumono lo stesso significato del **moltiplicatore di Lagrange**

Variazioni nei costi associati alle variabili

I coefficienti di costo marginale sono dati da :

$$\underline{c}_N^T - \underline{c}_B^T B^{-1} N = \underline{c}_N^T - \underline{y}^T N$$

Se il coefficiente c_j associato alla variabile x_j **non in base** subisce un incremento Δc_j , allora il coefficiente di costo ridotto diventa $c_j + \Delta c_j - \underline{y}^T \underline{a}_j$ e l'ottimo cambia solo se tale coefficiente è negativo.

Se il coefficiente c_j associato alla variabile x_j **in base** subisce un incremento Δc_j , allora i coefficienti di costo marginale cambiano tutti e possono diventare negativi.

Considerazioni simili valgono nel caso di modifiche nei coefficienti della matrice A.

Esempio

Un'azienda produce due tipi di vernice, una per interni (I) e una per esterni (E), usando due materie prime A e B.

La disponibilità giornaliera della materia prima A è di 6 tonnellate,

la disponibilità giornaliera della materia prima B è di 8 tonnellate.

La quantità di A e B consumata per produrre una tonnellata di vernice E ed I è riportata nella seguente tabella:

	E	I
A	1	2
B	2	1

Il prezzo di vendita per ton è di 3 euro per E e di 2 euro per I.

Si ipotizza che tutta la vernice prodotta venga venduta e che:

- la domanda giornaliera di I non supera mai di più di 1 ton quella di E
- la domanda massima giornaliera di I è di 2 ton

Si vogliono determinare le quantità delle due vernici che devono essere prodotte giornalmente per rendere **massimo il guadagno**.

Siano x_1 e x_2 le produzioni di vernici per esterni e per interni

Il modello matematico che descrive
il problema è:

$$\max_{\underline{x}} z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Consideriamo l'equivalente
problema di minimo:

$$\min_{\underline{x}} -3x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

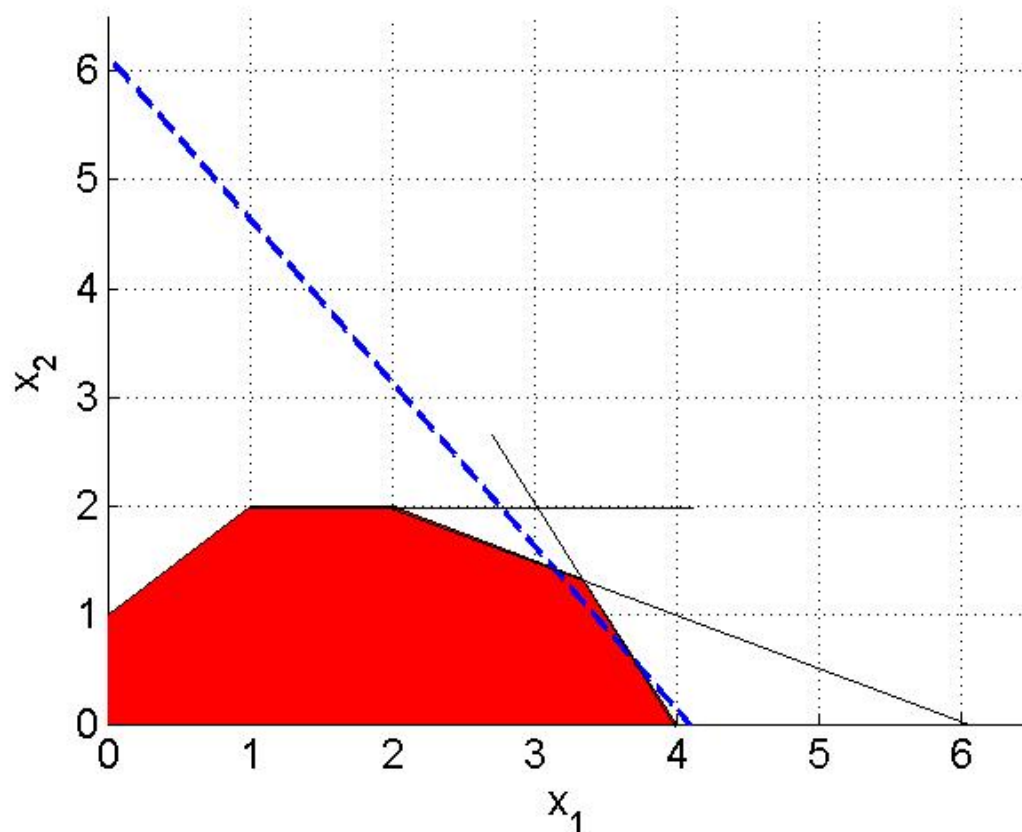
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



I vertici della regione ammissibile sono:

$O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,2)$, $C(2,2)$, $D(10/3, 4/3)$, $E(4,0)$

La soluzione ottimale è $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$ con valore ottimo della funzione obiettivo pari a $-38/3$. Il massimo profitto è pari a $38/3$

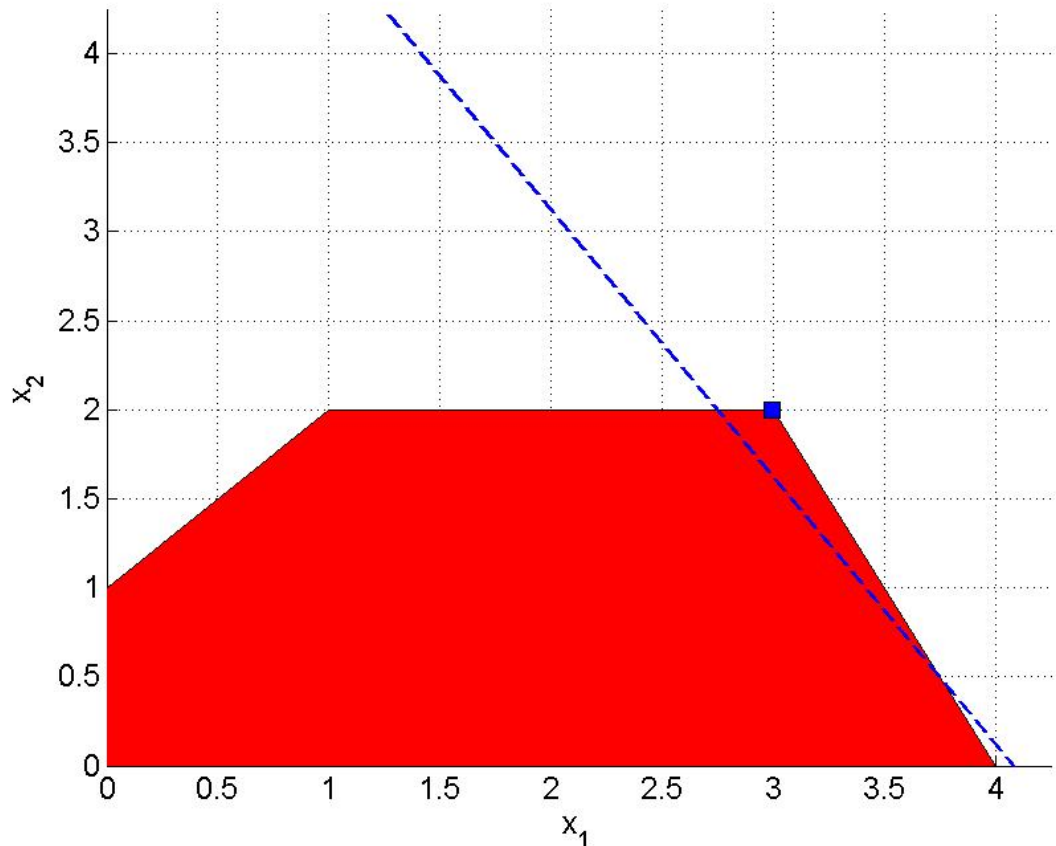
Variazioni rispetto la disponibilità delle risorse

Supponiamo di voler aumentare la disponibilità della risorsa A.

Dalla figura vediamo che oltre $K(3,2)$ (intersezione del secondo vincolo con il quarto) non ha più senso aumentare la risorsa A.

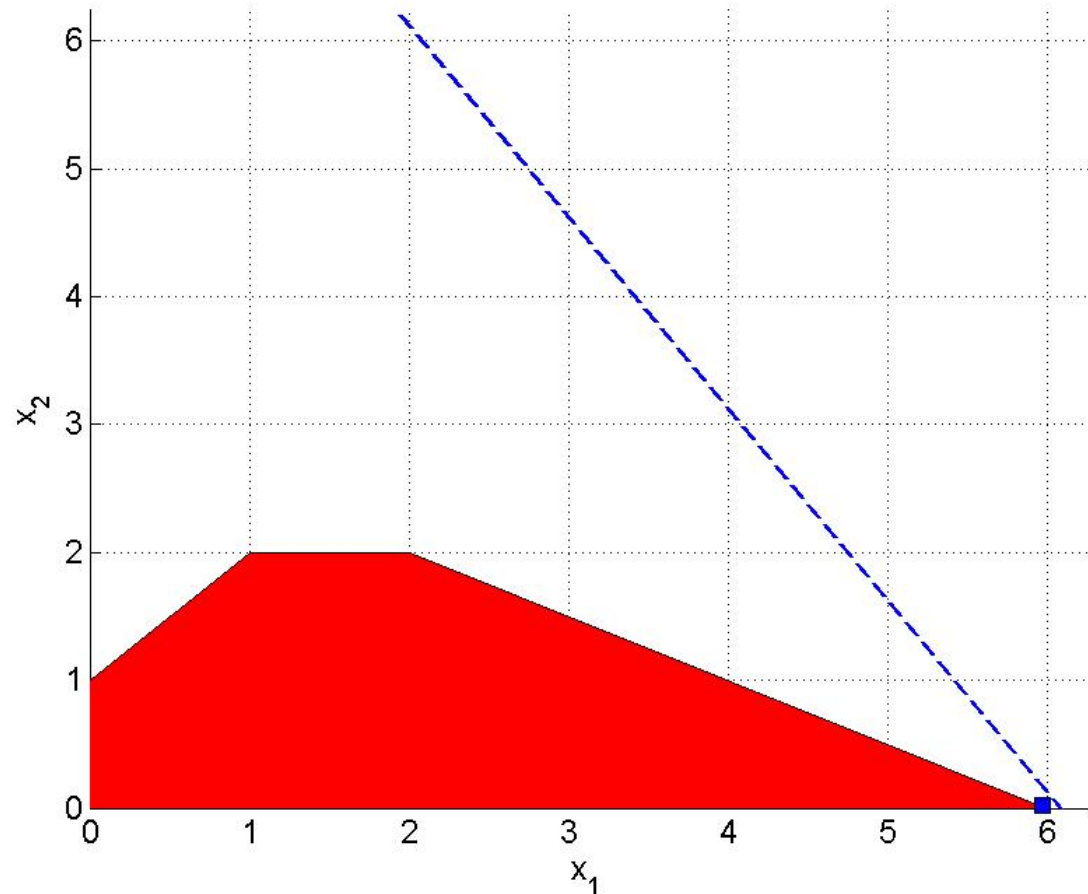
Si può quindi aumentare la risorsa in modo che il primo vincolo passi per il punto K.

Il nuovo valore di A è 7 e il nuovo punto di ottimo è $K(3,2)$ con massimo profitto $z=13$.



Supponiamo di voler aumentare la disponibilità della risorsa B.

Il secondo vincolo si sposta e cambia il punto di ottimo. Oltre $L(6,0)$ (intersezione del primo vincolo con il sesto) non ha più senso aumentare la risorsa B. Il nuovo valore di B è 12 e il nuovo punto di ottimo è $L(6,0)$ con massimo profitto $z=18$.



L'azienda potrebbe avere una limitata disponibilità finanziaria che vorrebbe far fruttare al meglio

è interessante sapere quale sia la risorsa che di più convenga aumentare

Valutiamo la sensibilità del valore assunto dalla funzione obiettivo rispetto a variazioni dei termini noti:

$$\begin{aligned} \text{per la risorsa A: } y_A &= \frac{\text{massima variazione di } z}{\text{massima variazione della risorsa A}} = \frac{13 - \frac{38}{3}}{7 - 6} = \frac{1}{3} \\ \text{per la risorsa B: } y_B &= \frac{\text{massima variazione di } z}{\text{massima variazione della risorsa B}} = \frac{18 - \frac{38}{3}}{12 - 8} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

y_A e y_B indicano di quanto aumenta l'obiettivo in corrispondenza dell'acquisizione di un'ulteriore quantità della risorsa A e della risorsa B.

All'azienda conviene acquisire per prima la risorsa B

Variazioni rispetto ai prezzi di vendita

Analizziamo entro quali limiti di tolleranza possono variare i prezzi di vendita senza alterare la soluzione ottima

Siano :

c_1 il prezzo di vendita per tonnellata per E

c_2 il prezzo di vendita per tonnellata per I

Variando c_1 e c_2 varia la pendenza della funzione obiettivo

Il punto D rimane soluzione ottima fino a quando la pendenza della funzione obiettivo diventa uguale a quella del primo vincolo o del secondo vincolo.

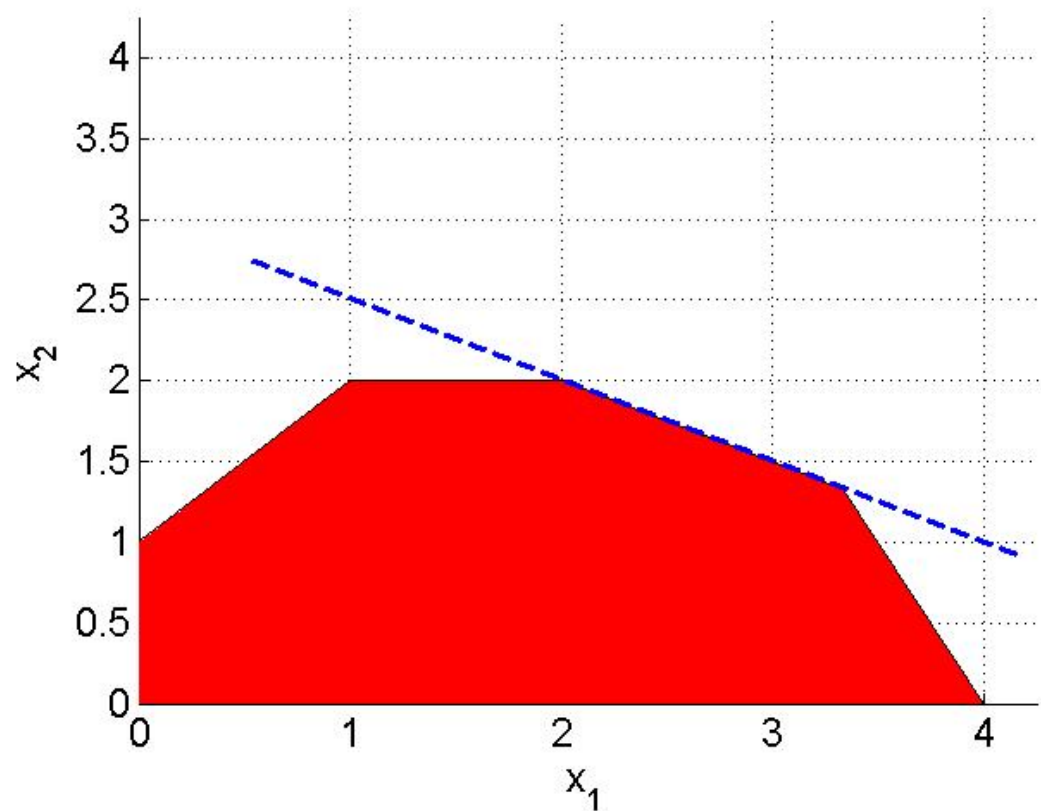
La pendenza è $-\frac{c_1}{c_2} = -\frac{3}{2}$

Variamo c_1 lasciando $c_2 = 2$

Casi limite

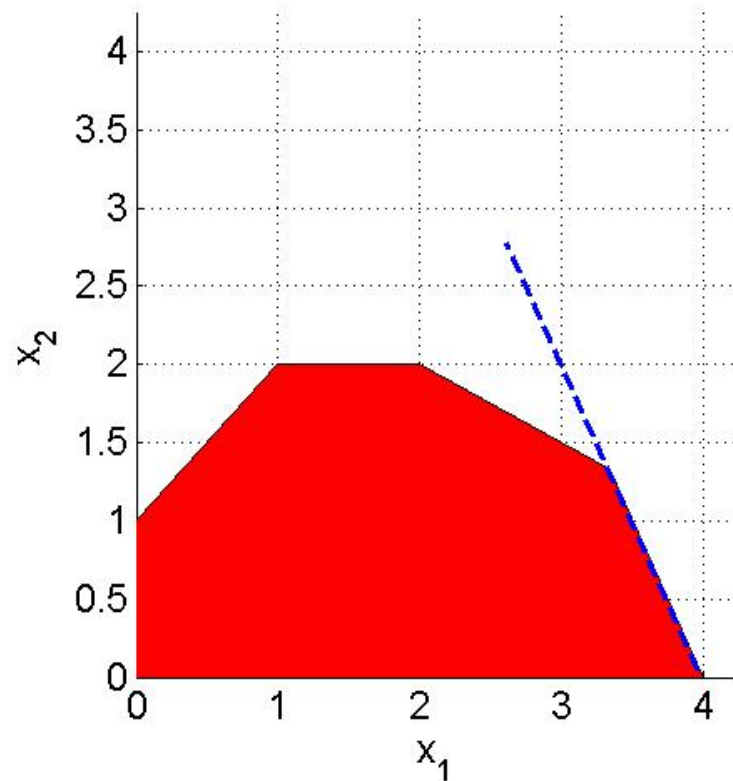
Pendenza della funzione obiettivo = pendenza del primo vincolo

$$-\frac{c_1}{2} = -\frac{1}{2}, c_1 = 1$$



Pendenza della funzione obiettivo = pendenza del secondo vincolo

$$-\frac{c_1}{2} = -2, c_1 = 4$$



quindi $1 \leq c_1 \leq 4$

Se $c_1 = 1$ il lato CD è di minimo. Quando c_1 scende sotto 1 solo C rimane punto di ottimo. Se $c_1 = 4$ il lato DE è di minimo. Quando c_1 supera 4 solo E rimane punto di ottimo.

Variamo c_2 lasciando $c_1 = 3$

Casi limite

Pendenza della funzione obiettivo = pendenza del primo vincolo

$$-\frac{3}{c_2} = -\frac{1}{2}, c_2 = 6$$

Pendenza della funzione obiettivo = pendenza del secondo vincolo

$$-\frac{3}{c_2} = -2, c_2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{quindi } \frac{3}{2} \leq c_2 \leq 6$$

Se $c_2 = \frac{3}{2}$ il lato DE è di minimo. Quando c_2 scende sotto $\frac{3}{2}$ solo E rimane punto di ottimo. Se $c_2 = 6$ il lato CD è di minimo. Quando c_2 supera 6 solo C rimane punto di ottimo.