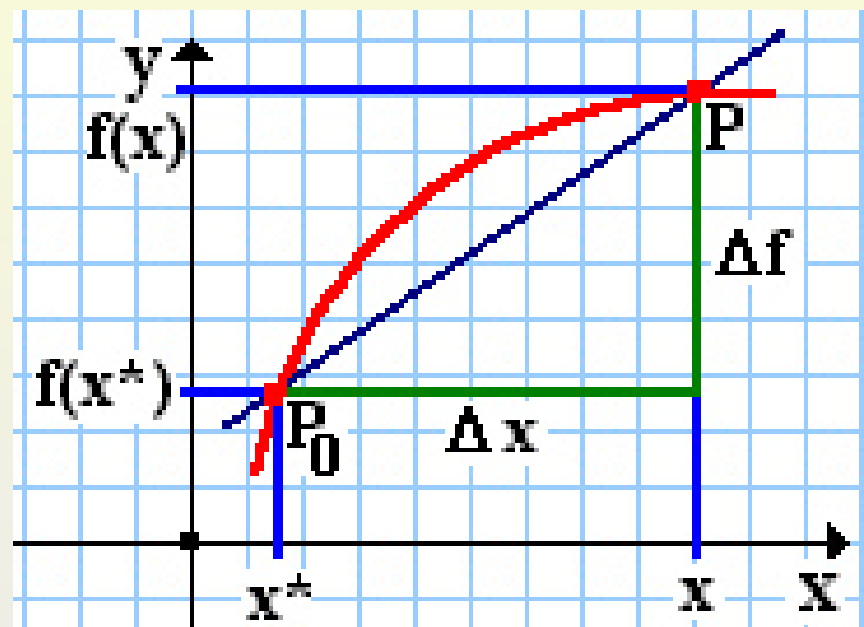


DERIVATA di una funzione

Sia $f : A \rightarrow R$ e $x^* \in A$
 punto di accumulazione
 di A



$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$ è il **RAPPORTO INCREMENTALE**

Il **rapporto incrementale** di f calcolato in x^*
 rappresenta il coefficiente angolare della secante
 passante per i punti P_0 e P

Se **esiste** ed è **finito** il

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$$

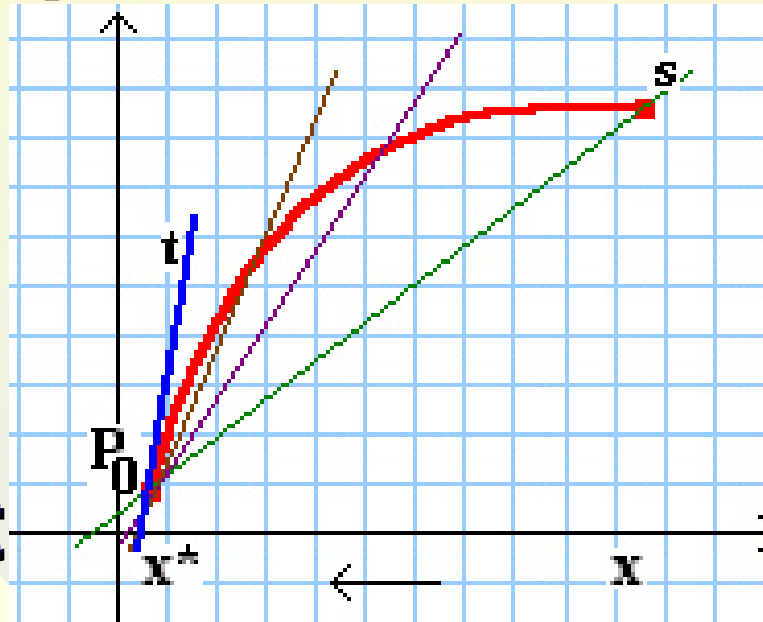
allora **f è derivabile in x***;

il valore finito del limite si chiama **DERIVATA** di f in x* e si indica con

$$f'(x^*) \quad \text{o} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*}$$

Significato GEOMETRICO della derivata

f derivabile in x^*



$x \rightarrow x^*$ $\Rightarrow$ **$s \rightarrow t$**



$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = m_s \rightarrow m_t$$

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \rightarrow f'(x^*)$$



$$f'(x^*) = m_t$$

La derivata di f in x^* rappresenta
il **coefficiente angolare** della
retta tangente alla curva nel
punto $P^* = (x^*, f(x^*))$

Sia $f : A \rightarrow R$ e $x^* \in A$

Se f è derivabile in x^* , la curva $y=f(x)$
è dotata di retta tangente nel punto

$P^* = (x^*, f(x^*))$ e **l'equazione di tale retta è**

$$y = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$$

ESEMPIO

$$C=C(q)$$

Costo che un'impresa deve sostenere per produrre una certa quantità q di merce (costo in funzione della quantità)

$$\frac{C(q) - C(q^*)}{q - q^*}$$

Rapporto incrementale di $C(q)$ cioè rapporto tra la variazione del costo di produzione e la variazione della quantità prodotta, quando l'impresa passa da una produzione q^* ad una produzione q (tasso di variazione dei costi)

$$C'(q^*) = \lim_{q \rightarrow q^*} \frac{C(q) - C(q^*)}{q - q^*}$$

Variazione di C relativa ad una variazione "infinitesima" di q (costo marginale in q^*)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x^* \in A$ punto di accumulazione di A

Si dice che f è **differenziabile in x^***

se $\exists a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - a(x - x^*)}{x - x^*} = 0$$

$a(x - x^*)$ si chiama **DIFFERENZIALE** di f in x^*

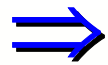
NB : f differenziabile $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} [f(x) - f(x^*) - a(x - x^*)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} [f(x) - f(x^*)] = \lim_{x \rightarrow x^*} a(x - x^*) = 0$$

f differenziabile $\Rightarrow f$ continua

f differenziabile in x^* $\Leftrightarrow$ f derivabile in x^*

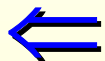


f differenziabile in x^* $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - a(x - x^*)}{x - x^*} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} \left[\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} - a \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = a \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f derivabile in x^* e $f'(x^*) = a$



f derivabile in x^* $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} - f'(x^*) \frac{x - x^*}{x - x^*} = 0 \Rightarrow$$

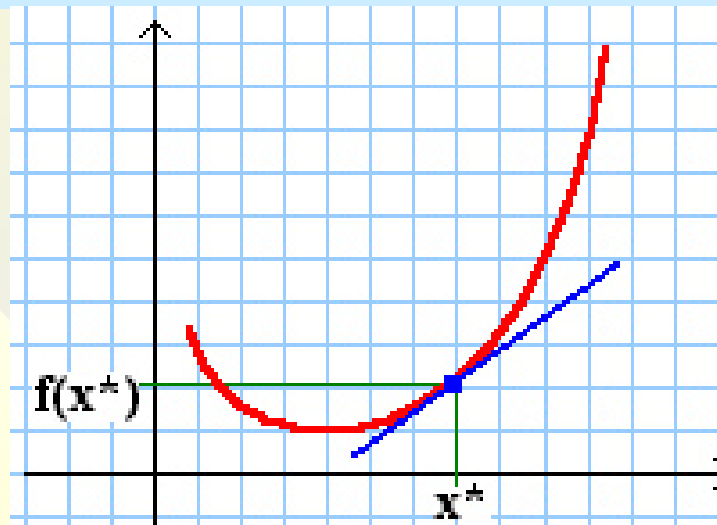
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*) - f'(x^*)(x - x^*)}{x - x^*} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f differenziabile in x^* e $a = f'(x^*)$

Se f è differenziabile in x^*



$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - \{f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)\}}{x - x^*} = 0$$



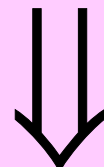
Da un punto di vista geometrico questo significa che se f è differenziabile in x^* , nei punti “vicini” ad x^* , la curva è ben approssimata dalla retta ad essa tangente in $(x^*, f(x^*))$

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x^* \in A$

f derivabile in x^*



f differenziabile in x^*

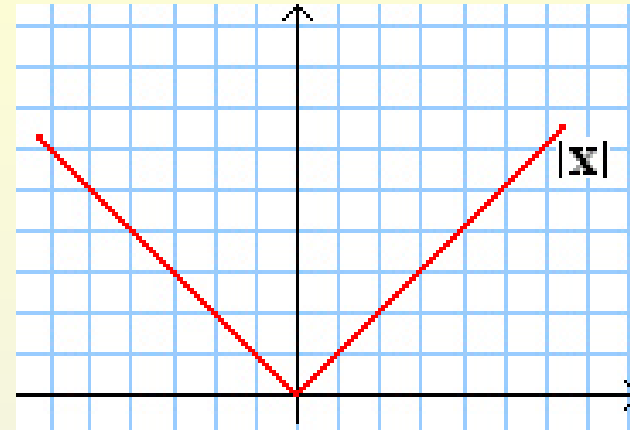


f continua in x^*

NB: f continua in x^* $\not\Rightarrow$ f derivabile in x^*

ESEMPIO 1

$$f(x) = |x|$$



$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow f(x) = |x|$ è continua in $x^* = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} \nexists \text{ infatti}$$

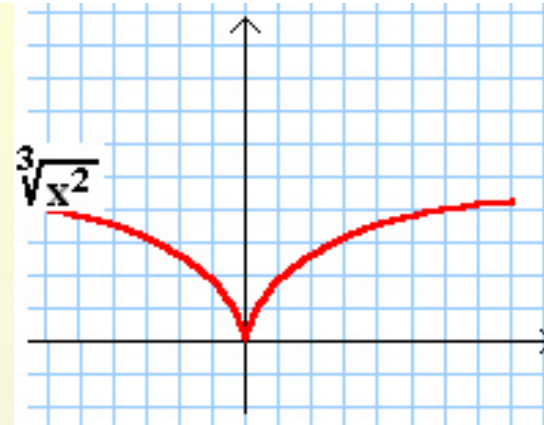
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$f(x) = |x|$ è continua in $x^* = 0$ ma non è derivabile in quel punto

Il punto $x^* = 0$ si chiama punto angoloso

ESEMPIO 2

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$



$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ è continua in $x^* = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \nexists \text{ infatti}$$

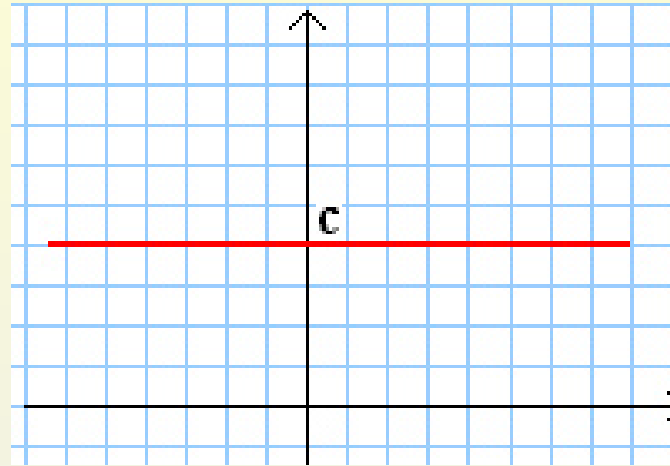
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ è continua in $x^*=0$ ma non è derivabile in quel punto

Il punto $x^*=0$ si chiama **cuspid**

Calcolo della derivata di alcune funzioni elementari

1) Sia $f(x)=c$
 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

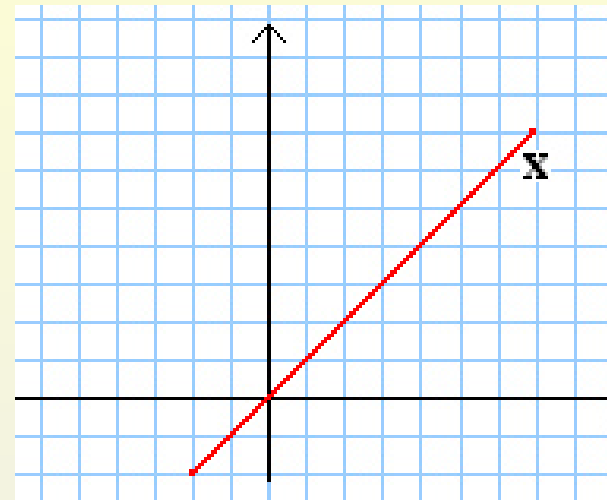


$$\forall x^* \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{c - c}{x - x^*} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{0}{x - x^*} = 0$$

f è derivabile $\forall x^* \in \mathbb{R}$ e la sua derivata è zero
 $\forall x^* \in \mathbb{R}$; resta quindi definita una **nuova**
funzione $f':\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, derivata di f : $f'(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Sia $f(x)=x$
 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$



$$\forall x^* \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{x - x^*}{x - x^*} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x^*} 1 = 1$$

f è derivabile $\forall x^* \in \mathbb{R}$

La funzione $f':\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, derivata di f è $f'(x)=1$

$\forall x \in \mathbb{R}$

3) Sia $f(x) = x^n$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x^* \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{x^n - (x^*)^n}{x - x^*} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{(x - x^*)(x^{n-1} + x^{n-2}x^* + \dots + (x^*)^{n-1})}{x - x^*} = n(x^*)^{n-1} \end{aligned}$$

f è derivabile $\forall x^* \in \mathbb{R}$

La funzione $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivata di f è

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

NB: una funzione $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

derivabile (differenziabile) in A

se è derivabile (differenziabile)

$\forall x^* \in A$

In maniera analoga alla precedente,

in base a definizione,

**si possono calcolare le derivate delle
altre funzioni elementari
e compilare la seguente**

**tabella riepilogativa
delle derivate di
funzioni elementari**

TABELLA DELLE DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	$x \in R$
x^n	nx^{n-1}	$x \in R, n \in Z - \{0\}$
x^c	cx^{c-1}	$x \in R_*^+, c \in R - \{0\}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in R, a \in R_*^+ - \{1\}$
e^x	e^x	$x \in R$
$\text{sen } x$	$\cos x$	$x \in R$
$\cos x$	$-\text{sen } x$	$x \in R$
$\text{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$x \in R - \{\pi/2 + k\pi, k \in Z\}$

REGOLE di derivazione (ricavate utilizzando la definizione di derivata)

Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ e derivabili in x^*

- $f \pm g$ è derivabile in x^* e

$$(f \pm g)'(x^*) = f'(x^*) \pm g'(x^*)$$
- $f \cdot g$ è derivabile in x^* e

$$(f \cdot g)'(x^*) = f'(x^*)g(x^*) + f(x^*)g'(x^*)$$
- se inoltre $g(x^*) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x^* e

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'(x^*) = \frac{f'(x^*)g(x^*) - f(x^*)g'(x^*)}{[g(x^*)]^2}$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x &= \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

DERIVATA di funzione inversa

Sia $f:I \rightarrow \mathbb{R}$, f invertibile e continua in I .

Se f è derivabile in x^* e $f'(x^*) \neq 0$,
allora

la sua inversa è derivabile in
 $y^* = f(x^*)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy} \log y &= \frac{1}{\left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=\log y}} = \\ &= \frac{1}{e^{\log y}} = \\ &= \frac{1}{y}\end{aligned}$$

In maniera analoga alla precedente,
**utilizzando la regola di
derivazione della funzione
inversa,**

si possono **aggiungere** alla tabella
delle derivate di funzioni elementari le
seguenti derivate

TABELLA DELLE DERIVATE DI ALTRE FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x)$	$f'(x)$	
$\log_a x $	$\frac{1}{x \log a}$	$x \in R_*, a \in R_*^+ - \{1\}$
$\log x $	$\frac{1}{x}$	$x \in R_*$
$\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

DERIVATA di funzione composta

**Sia definita la funzione $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$
e sia $x^* \in I$.**

**Se g è derivabile in x^* e f è
derivabile in $y^* = g(x^*)$, allora
 $f \circ g$ è derivabile in x^* e**

$$(f \circ g)'(x^*) = f'(g(x^*)) g'(x^*)$$

ESEMPIO

$$\text{Sia } h(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$\Rightarrow f(y) = \sqrt{y} \text{ e } g(x) = \sin x$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\sin x} = f'(g(x)) g'(x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x$$

ELASTICITA'

In molti *modelli economici*, per esempio quando si studia la **quantità di merce domandata in funzione del prezzo**, è più significativo considerare, *piuttosto che gli incrementi assoluti delle variabili dipendente e indipendente*, gli **incrementi relativi** (o percentuali) di queste:

$$\frac{x - x^*}{x^*} \quad \text{e} \quad \frac{f(x) - f(x^*)}{f(x^*)}$$

per **due motivi**:

1) l'incremento percentuale evidenzia meglio l'importanza delle variazioni considerate. Per es. se x rappresenta un prezzo, un aumento $x - x^* = 100$ ha un significato molto diverso a seconda che il prezzo iniziale sia $x^* = 500$ o $x^* = 10000$ (aumento del 20 % nel primo caso e del 1% nel secondo)

2) gli incrementi relativi sono numeri puri cioè non dipendono dalle unità di misura usate. Per es. se si considera la variazione del prezzo $x - x^* = 100$, il significato di tale incremento è diverso a seconda che tale prezzo sia calcolato in lire oppure in dollari mentre non importa quale sia l'unità di misura usata se consideriamo l'incremento relativo (il prezzo è aumentato del 10%)

Si chiama **ELASTICITA' D'ARCO** per una funzione f in un punto x^* , il rapporto tra gli incrementi relativi

$$\frac{\frac{f(x) - f(x^*)}{f(x^*)}}{\frac{x - x^*}{x^*}} = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \frac{x^*}{f(x^*)}$$

Se $x \rightarrow x^* \Rightarrow$ elasticità puntuale di f in x^*

$$E_f(x^*) = f'(x^*) \frac{x^*}{f(x^*)} = \frac{f'(x^*)}{\frac{f(x^*)}{x^*}}$$

ESEMPIO

Sia $q=q(p)$ la **funzione di domanda** di un bene rispetto al prezzo p

$$E_q(p) = q'(p) \frac{p}{q(p)}$$

- Se $E_q(p)=-2$ significa che *in corrispondenza di un aumento del prezzo del 10% si ha una diminuzione della domanda del 20%*
- Se $E_q(p)=-1/5$ significa che *in corrispondenza di un aumento del prezzo del 10% si ha una diminuzione della domanda del 2%*

DERIVATA E PUNTI DI MAX E DI MIN

Sia $f:I \rightarrow \mathbb{R}$, x^* punto interno di max
(o min) relativo, f derivabile in x^*



$$f'(x^*) = 0$$

NB: x^* punto interno di I significa, per definizione,
che $\exists I(x^*, r) \subset I$

Dimostrazione

x^* punto di max rel. $\Rightarrow \exists I(x^*, r) \subset I$ tc $\forall x \in I(x^*, r)$
 $f(x) \leq f(x^*)$

$$\text{se } x > x^* \text{ e } x \in I(x^*, r) \quad \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0$$

$$\text{se } x < x^* \text{ e } x \in I(x^*, r) \quad \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (x^*)^+} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (x^*)^-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0$$

Poiché f

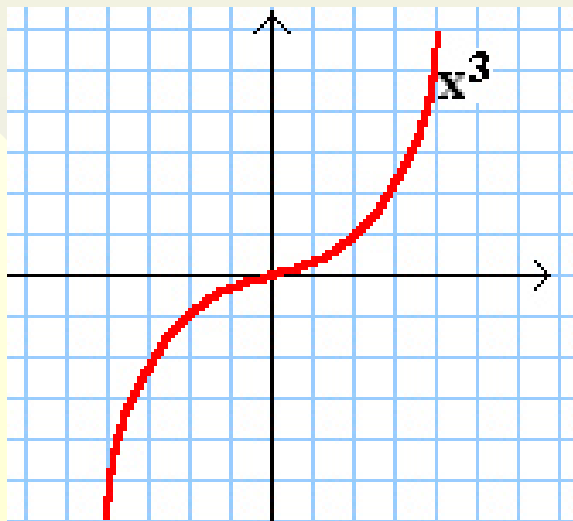
derivabile in x^* $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (x^*)^+} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow (x^*)^-} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = 0$$

NB: L'annullarsi della derivata prima in un punto interno di massimo o minimo relativo è **condizione necessaria ma non sufficiente**

$$Es : f(x) = x^3 \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$$



Come si vede dal grafico **x^* non è né di massimo né di minimo relativo**

**Alla luce del precedente risultato,
i punti di massimo o minimo relativo si
possono trovare:**

- **in corrispondenza di punti interni in cui si annulla la derivata prima**
- **in corrispondenza di punti di non derivabilità**
- **in corrispondenza degli estremi dell'intervallo di definizione**



$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ sono possibili massimi e minimi relativi

x_0 p.to di max rel (estremo dell'intervallo)

x_1 p.to di min rel (p.to di non derivabilità)

x_2 p.to di max rel (in cui $f'(x_2) = 0$)

x_3 nè di max nè di min rel

x_4 nè di max nè di min rel (p.to di non derivabilità)

x_5 p.to di min rel (estremo dell'intervallo)

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

Poiché un punto di **massimo** (minimo) **assoluto** è anche punto di **massimo** (minimo) **relativo**,

i punti di massimo (minimo) assoluto, se esistono, si possono trovare facendo un confronto fra i valori assunti dalla funzione in corrispondenza dei possibili punti di massimo (minimo) relativo

**Tornando al grafico precedente:
confrontando i valori**

$$\{ f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_5) \}$$

**si vede che $f(x_2)$ è il massimo
assoluto e**

$f(x_5)$ è il minimo assoluto di f

TEOREMA di Rolle

Sia $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$
e derivabile in (a,b) con
 $f(a)=f(b)$



$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Dimostrazione

Per il **T. di Weierstrass** $\Rightarrow$ f dotata di massimo e di minimo

I caso: il max M e il min m si hanno in corrispondenza degli estremi dell'intervallo

Poiché $f(a)=f(b) \Rightarrow m=M \Rightarrow f(x)$
costante $\Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$;

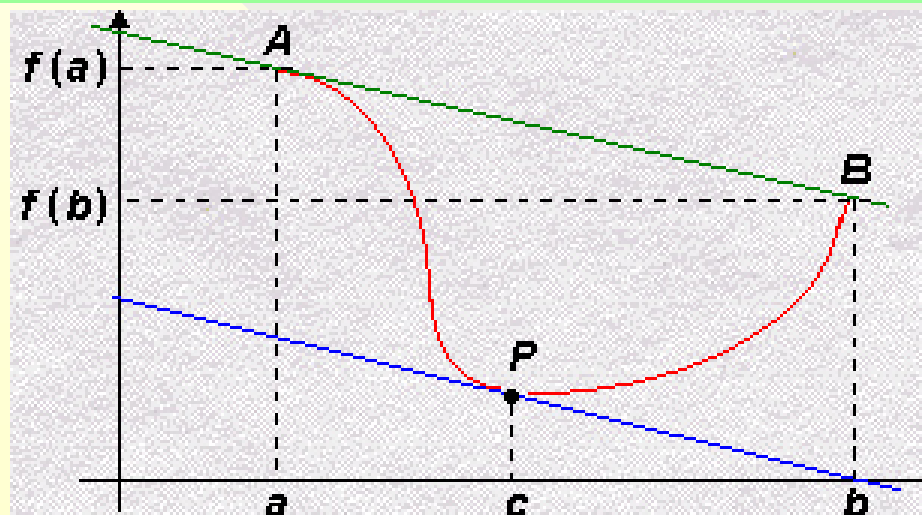
II caso: almeno uno dei due tra il max M e il min m si ha in corrispondenza di un punto interno. Per fissare le idee sia x^* p.to di max interno di $[a,b]$. Poiché la funzione è derivabile in (a,b) lo è in $x^* \Rightarrow f'(x^*)=0$

TEOREMA di Lagrange

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$
e derivabile in (a,b)



$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



TEOREMA di Cauchy

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) . Se $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$



$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

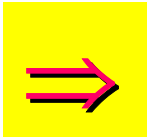
DERIVATA E CRESCENZA E DECRESCENZA

Sia $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabile in (a,b)

f **crescente** in $(a,b) \Leftrightarrow$
 $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

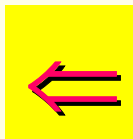
f **decresciente** in $(a,b) \Leftrightarrow$
 $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dimostrazione

 **f crescente in $(a,b) \Rightarrow$**

$$\forall x_0, x_1 \in (a, b), \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$



$\forall x_0, x_1 \in (a, b), \exists c \in (x_0, x_1) :$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c)$$

Poichè $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(c) \geq 0 \Rightarrow$

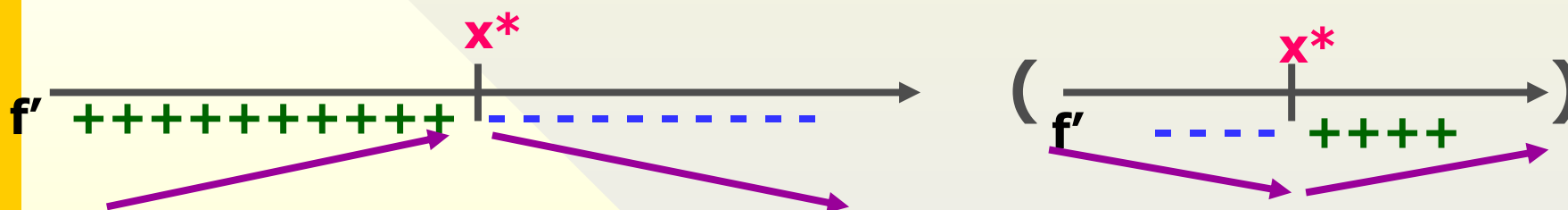
$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0 \Rightarrow \text{f crescente in } (a,b)$$

Dato un p.to x^* che potrebbe essere di max o di min relativo, ($f'(x^*)=0$ o x^* p.to di non derivabilità o x^* estremo dell'intervallo) come si fa a stabilire se esso è veramente di massimo o di minimo relativo?

Si analizza il comportamento di f nell'intorno del punto

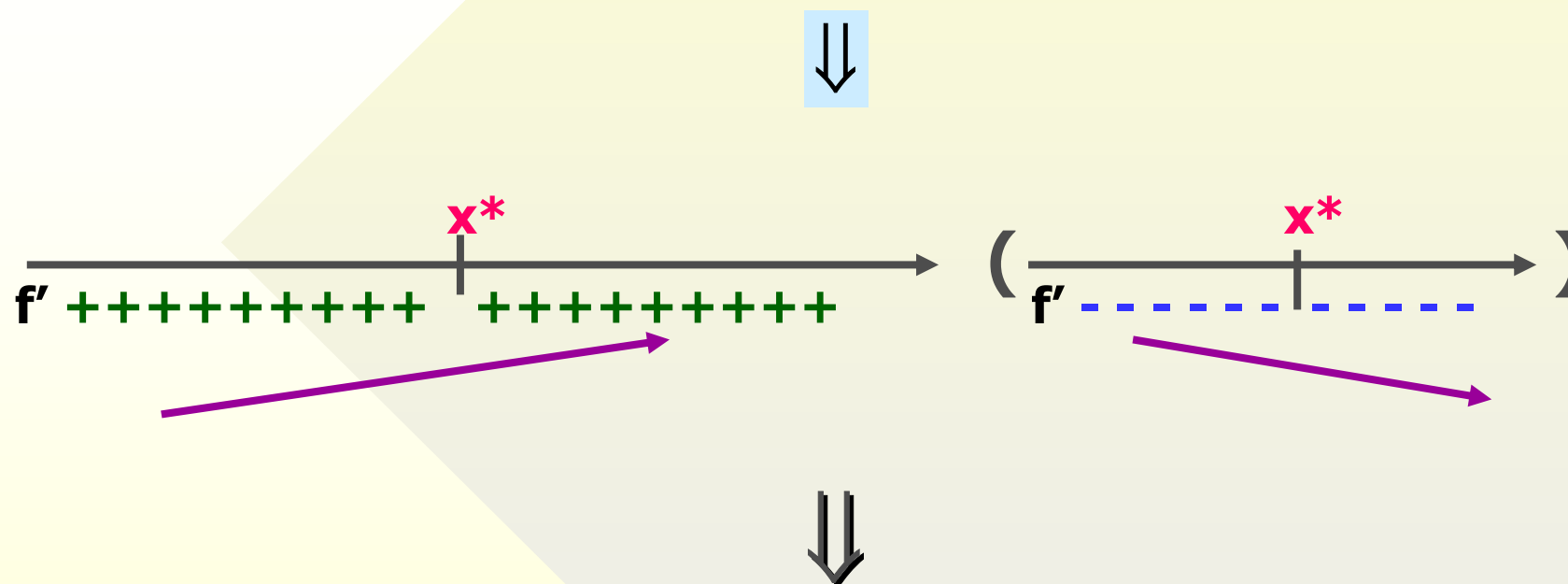
Se f è cont. in x^* e deriv. in $I(x^*) - \{x^*\}$

$\begin{cases} f'(x) \text{ positiva (negativa) nell'intorno sinistro di } x^* \\ f'(x) \text{ negativa (positiva) nell'intorno destro di } x^* \end{cases}$



x^* p.to di max (min) relativo

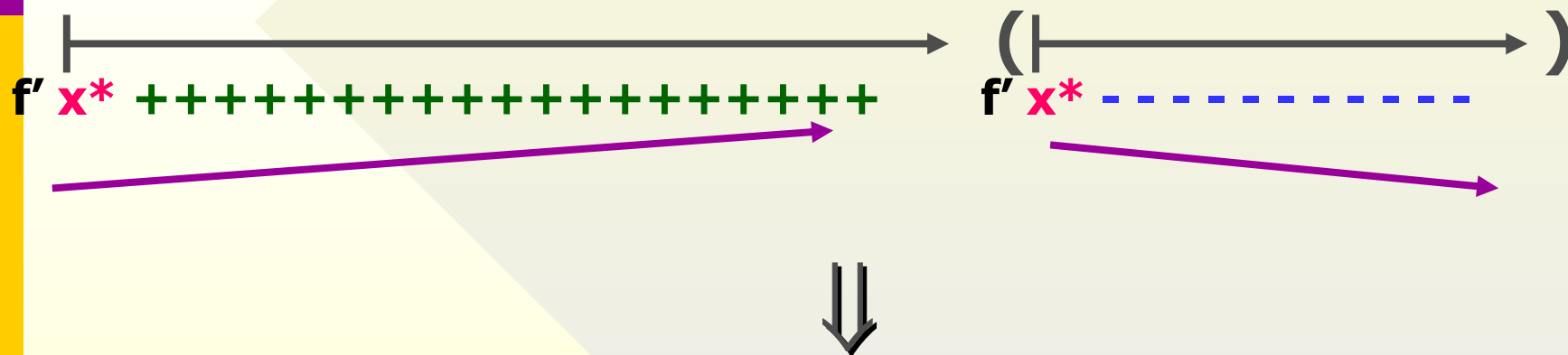
f' positiva (negativa) nell'intorno di $x^* - \{x^*\}$



**x^* p.to di crescita
(decrescenza)**

**Se $f'(x^*)=0 \Rightarrow x^*$ p.to di flesso a tangente
orizzontale**

NB: Se x^* è un estremo (ad es. quello inferiore), il segno della derivata nell'intorno destro permette di stabilire se il punto è di max (o di min) relativo



x^* p.to di minimo (massimo) relativo

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f dotata di derivata prima e seconda continue in I ($f \in C^2(I)$). Si dimostra che:

f convessa (concava) in $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in I$

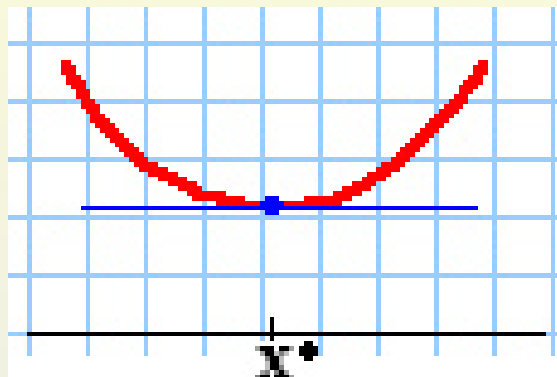


$\Leftrightarrow f'$ crescente
(decrescente) $\forall x \in I$

La **derivata seconda** fornisce informazioni determinanti per stabilire se un punto di f , x^* , in cui $f'(x^*)=0$ sia un punto di **max** o di **min relativo**

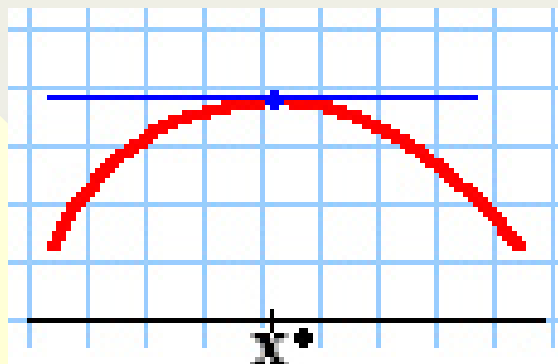
Se f è dotata di derivata prima e seconda continue nel punto x^*

$$\begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$



**x^* p.to
di min
relativo**

$$\begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



**x^* p.to
di max
relativo**

Se $f''(x^*)=0$?

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f dotata in x^* di derivate continue fino all'ordine n .

$$\text{Sia } f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$$

$$\text{e } f^n(x^*) > 0 \text{ } (< 0)$$

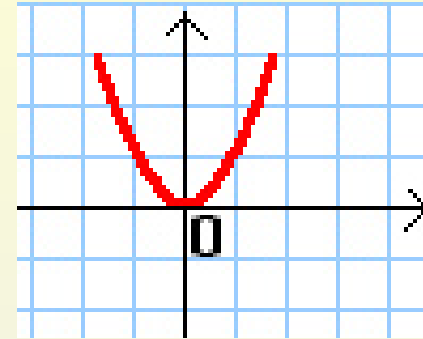


- se **n è pari**, x^* p.to di **min (max) relativo**
- se **n è dispari**, x^* p.to di crescita (decrescenza), x^* p.to di **flesso a tangente orizzontale**

Esempio

$$1) f(x) = x^2 \quad x^* = 0$$

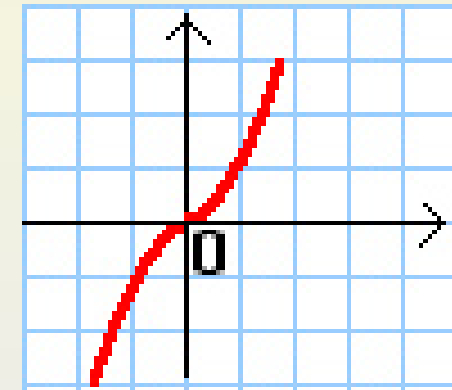
$$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 2 > 0$$



$$2) f(x) = x^3 \quad x^* = 0$$

$$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$$

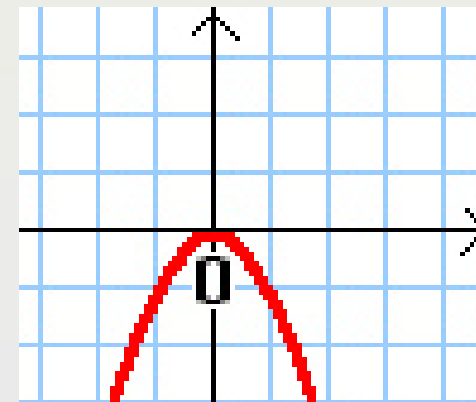
$$f'''(0) = 6 > 0$$



$$3) f(x) = -x^4 \quad x^* = 0$$

$$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = -24 < 0$$



Definizione

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Un p.to $x^* \in I$ in cui f sia derivabile si dice **p.to di flesso** se in corrispondenza di esso la funzione cambia la sua **convessità** (a sinistra concava e a destra convessa o viceversa)

La tangente alla curva in un p.to di flesso si chiama **tangente di flesso**

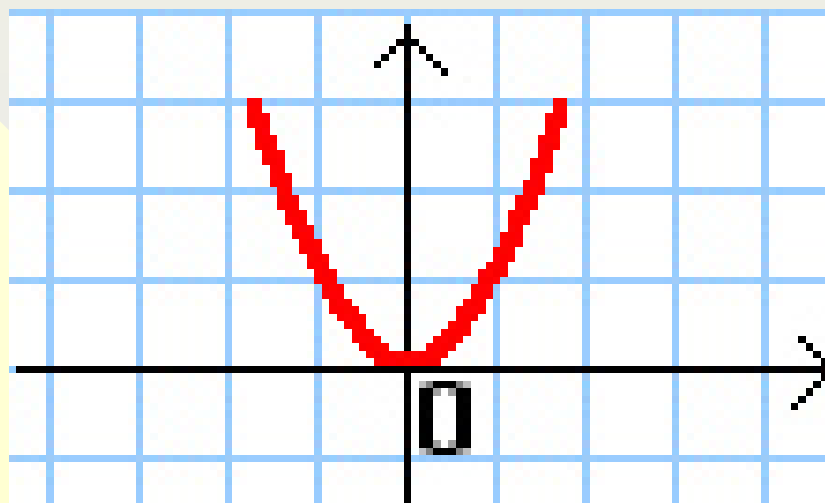


In base a definizione,
è evidente che **se x^* è di flesso**
ed **f è dotata di derivata seconda in x^***
allora

$$f''(x^*)=0$$

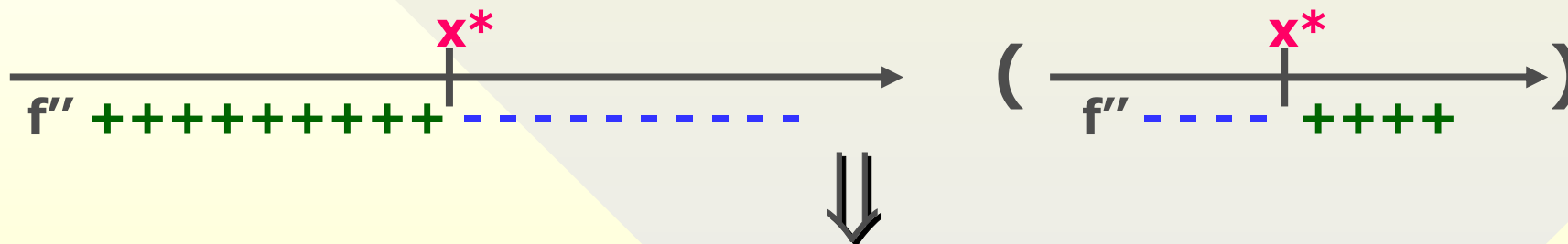
NB: non vale il viceversa. **Esempio:**

*per $f(x) = x^4$
si ha $f''(0) = 0$
ma $x^* = 0$
non è di flesso*

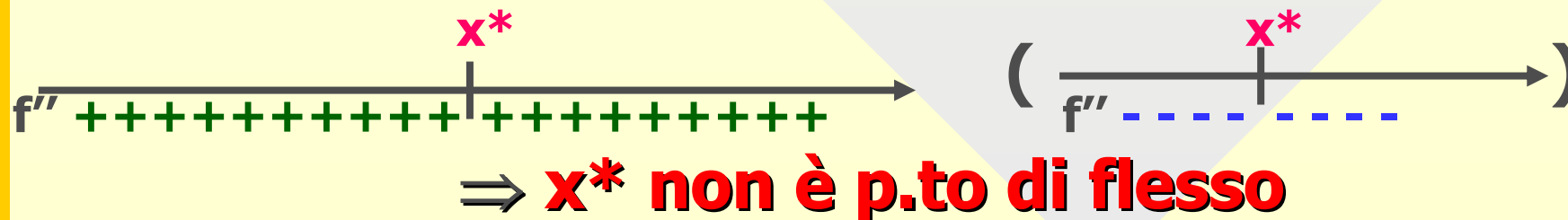


Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$

Come stabilire se $x^* \in I$
in corrispondenza del quale $f''(x^*) = 0$
sia un p.to di flesso?



x^* p.to di flesso



Esempio

La funzione $f(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 400, \quad x > 0$

rappresenta il **costo totale** di una certa merce in funzione della quantità prodotta x .

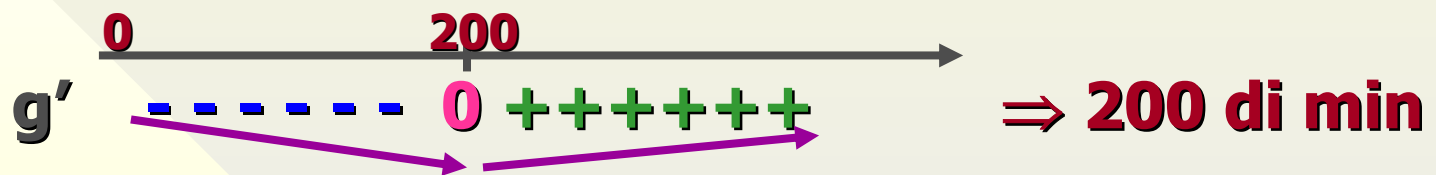
- 1) Scrivere l'espressione del **costo medio** $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
- 2) Calcolare il **minimo** e tracciare un **grafico qualitativo di g** .
- 3) Calcolare poi **l'elasticità** di f e controllare che nel p.to di **min essa è uguale ad 1**.

$$1) g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x}, \quad x > 0$$

$$2) \text{Dom } g = R_*^+ = \{x \in R : x > 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

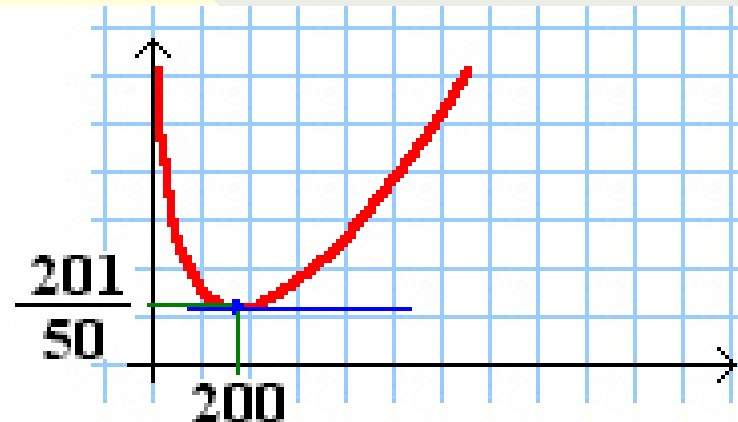
$$g'(x) = \frac{1}{100} - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 40000}{100x^2} \quad g'(x) = 0 \text{ per } x = \pm 200$$



$$g''(x) = \frac{800}{x^3}$$

Diagramma per la seconda derivata g'' :

Il diagramma mostra una retta orizzontale con punti marcati a 0 e 200. Per tutti i valori di x maggiori di 0, la seconda derivata è positiva (indicated by a plus sign), confermando che il punto critico in $x = 200$ è un minimo.



$$3) \quad E_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x}{50} + \frac{1}{50}}{\frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x}}$$

$$E_f(200) = \frac{4 + \frac{1}{50}}{2 + \frac{1}{50} + 2} = 1$$

In $x^*=200$ il costo marginale coincide con il costo medio.

Questo significa che se si ha un aumento della quantità del 10%, ad esempio, si avrà un aumento del costo pari anch'esso al 10%

ASINTOTI

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \pm\infty$$



$x=x^*$ è

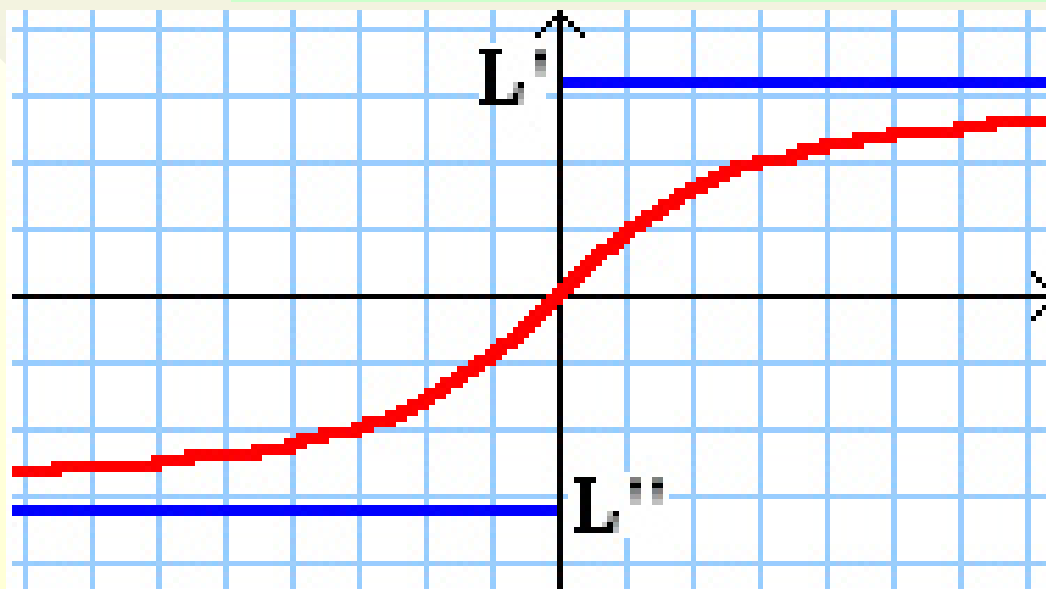
ASINTOTO VERTICALE



Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L'$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L'' \right)$$

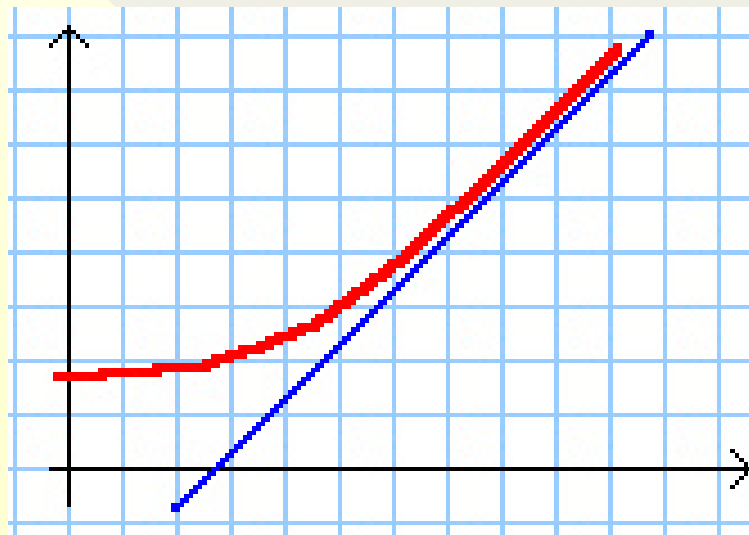


$y=L'$ (L'') è **ASINTOTO**
ORIZZONTALE destro (sinistro)

Una **retta** $y=mx+n$ si definisce **asintoto obliquo** destro (sinistro) di f se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{ f(x) - [mx + n] \} = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \{ f(x) - [mx + n] \} = 0 \right)$$



$$y=mx+n$$

è asintoto obliquo destro (sinistro) di $f(x)$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = n \right)$$

Esempio

Vediamo se la funzione $g(x) = \frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x}$, precedentemente considerata, **è dotata di asintoto obliquo destro.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{100} + \frac{1}{50x} + \frac{400}{x^2} = \frac{1}{100}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \frac{1}{100}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x} - \frac{x}{100} \right) = \frac{1}{50}$$

$\Rightarrow$ La funzione è dotata di asintoto obliquo $y = (1/100)x + (1/50)$

TEOREMA di de l'Hopital

Teorema 1

Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x^* \in (a, b)$. Sia

1) f, g derivabili in $(a, b) - \{x^*\}$,

2) $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^*} g(x) = 0$

3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) - \{x^*\}$,

4) $\exists \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema 2

Siano $f, g: (a, b) - \{x^*\} \rightarrow \mathbb{R}$,

1) f, g derivabili in $(a, b) - \{x^*\}$,

2) $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x^*} g(x) = \pm\infty$

3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) - \{x^*\}$,

4) $\exists \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NB: per i Teoremi di de l'Hopital **non vale il viceversa** *Consideriamo*

$$f(x) = 2x + \sin x \text{ e } g(x) = 2x - \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

f e g sono derivabili e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} \quad \nexists$$

Cosa si può dire di $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Nulla a priori

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{2 - \frac{\sin x}{x}} = 1$$

Esempio: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - e^x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x + x}{x(1 - e^x)} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-e^x + 1}{1 - e^x - xe^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + 1}{1 - e^x - xe^x} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-e^x}{-e^x - e^x - xe^x} = \frac{-1}{-2 - x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$$