

SUCCESSIONI

Una **successione** è una legge che associa **ad ogni numero naturale** uno, ed un solo, numero reale

$$: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a_n$$

Si tratta quindi di una funzione reale a valori reali avente come **DOMINIO** l'insieme **N** dei numeri naturali

Modi per indicare una successione:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \text{ oppure } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

In concreto, in genere *si assegna la regola* che permette di determinare $\forall n \in \mathbb{N}$, l'ennesimo termine della successione

Esempio 1

$$1 \rightarrow a_1 = 1$$

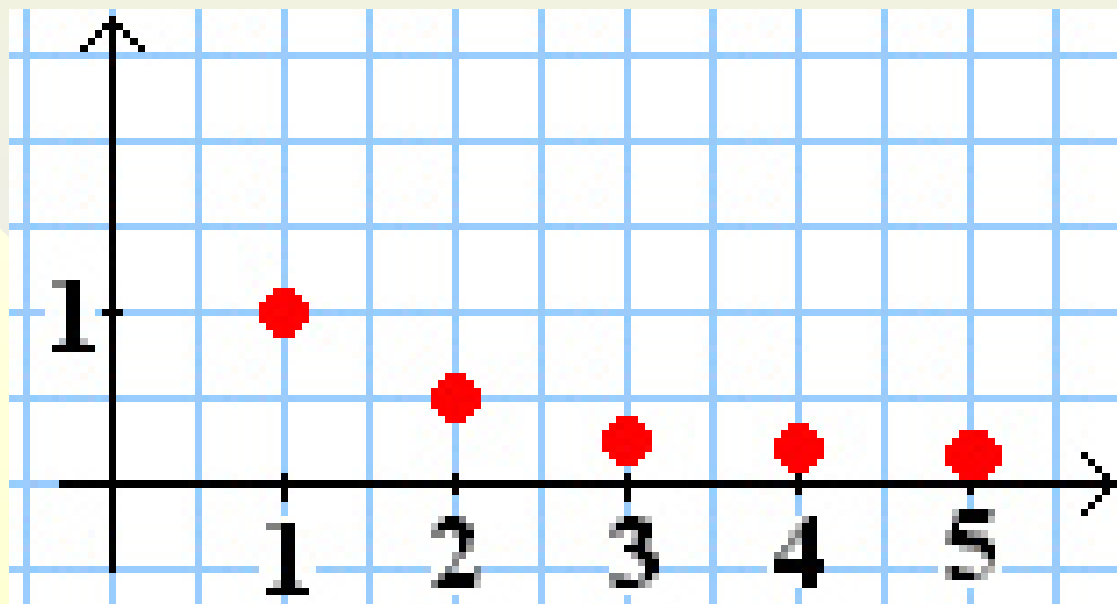
$$2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

...

$$n \rightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$



Esempio 2

Sia **C** un **capitale impiegato** per **n anni** in maniera tale che ogni anno maturi un **interesse** pari a **$I = iC$** ($i > 0$ *tasso d'interesse dell'impiego*). **A quanto ammonta dopo n anni la somma disponibile (montante)?**

$$a_1 = C + iC = C(1 + i);$$

$$a_2 = C + 2iC = C(1 + 2i);$$

$$a_3 = C + 3iC = C(1 + 3i); \quad \dots \quad ; a_n = C + niC = C(1 + ni)$$

$$a_n = C(1 + ni)$$

è quindi una **successione numerica** cioè
una **legge** che ad ogni anno dell'investimento
associa il valore finale del capitale

SUCCESSIONI definite per ricorrenza

- si assegna un **valore di partenza** ad a_0
- si dà una **legge** che permette di **ricavare** a_n **una volta conosciuto** a_{n-1}

Esempio 3: La successione dell'esempio precedente può essere **definita per ricorrenza**, infatti partendo da un **capitale iniziale** C , ogni anno il **capitale finale** si ottiene aggiungendo a quello dell'anno precedente l'interesse maturato $I = iC$

$$\begin{cases} a_0 = C \\ a_n = a_{n-1} + iC \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 = C; a_1 = C + iC = C(1 + i); a_2 = a_1 + iC = C(1 + i) + iC = C(1 + 2i);$$

$$\Rightarrow a_n = C(1 + ni)$$

SUCCESSIONI MONOTONE

$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ **crescente**

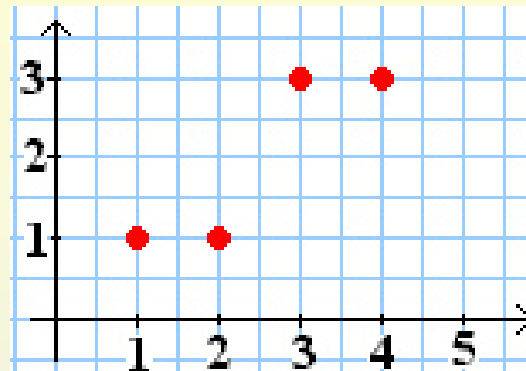
$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ **strett. crescente**

$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ **decescente**

$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ **strett. decrescente**

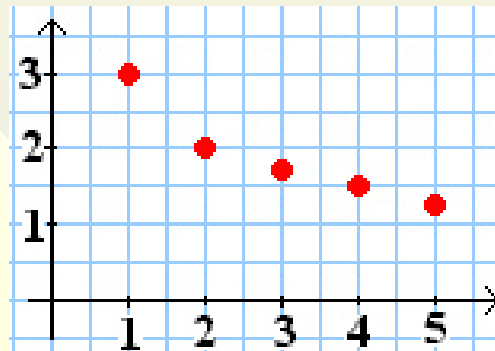
Esempio 4

$$a_n = \begin{cases} n & n \text{ dispari} \\ n-1 & n \text{ pari} \end{cases}$$



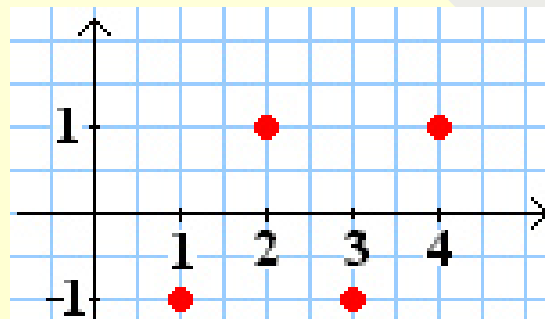
$\Rightarrow a_n$ crescente

$$a_n = 1 + \frac{2}{n}$$



$\Rightarrow a_n$ strettamente
decrescente

$$a_n = (-1)^n$$



$\Rightarrow a_n$ non monotona

SUCCESSIONI LIMITATE

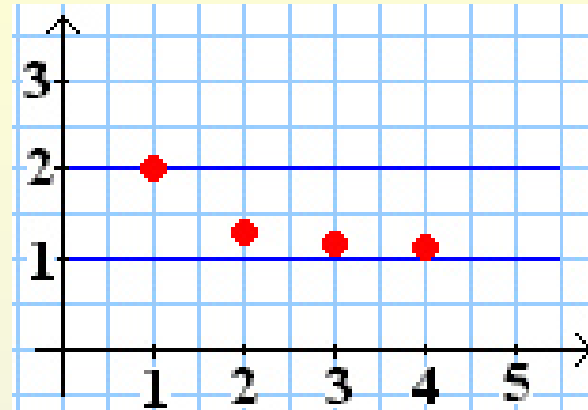
$\{a_n\}$ **limitata superiormente** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ **limitata inferiormente** $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R} : a_n \geq h \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ **limitata** $\Leftrightarrow \exists k, h \in \mathbb{R} : h \leq a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

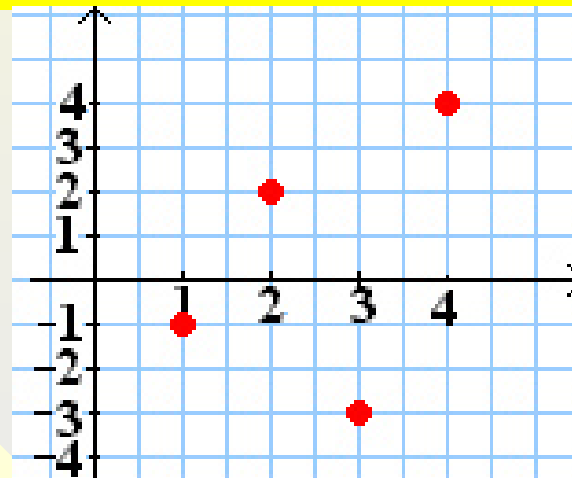
Esempio 5

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$



Poichè $1 < 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ limitata

$$a_n = (-1)^n n$$



Poichè $\forall k \in \mathbb{R} \exists n : a_n < k$ e $\forall h \in \mathbb{R} \exists n : a_n > h$

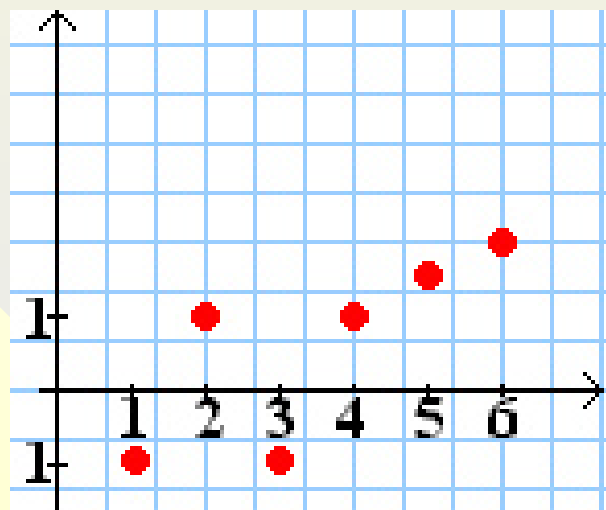


a_n non è limitata nè superiormente nè inferiormente

NB: per le successioni si parla di proprietà verificate definitivamente se queste sono **verificate** dai termini della successione **a partire da un certo indice in poi** (o equivalentemente se sono verificate da tutti i termini della successione tranne un numero finito)

Esempio 6

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n & 1 \leq n \leq 3 \\ \frac{n}{2} - 1 & n \geq 4 \end{cases}$$



**a_n è definitivamente monotona
(monotona per $n \geq 4$)**

LIMITI DI SUCCESSIONI

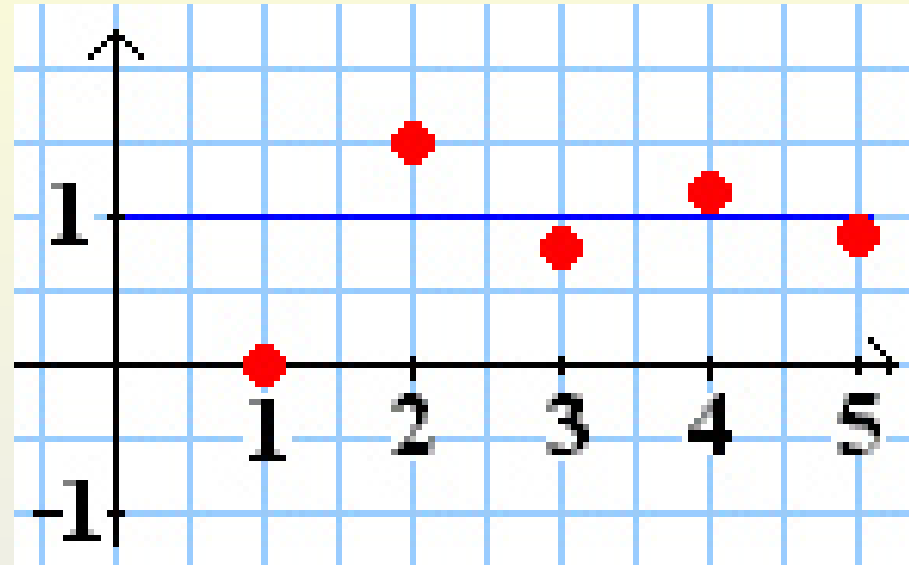
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} :$$

$$\text{se } n > \nu \text{ allora } |a_n - l| < \varepsilon$$

Esempio 6

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$|a_n - 1| = \left| \frac{(-1)^n}{n} + 1 - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ per } n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon \text{ per } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

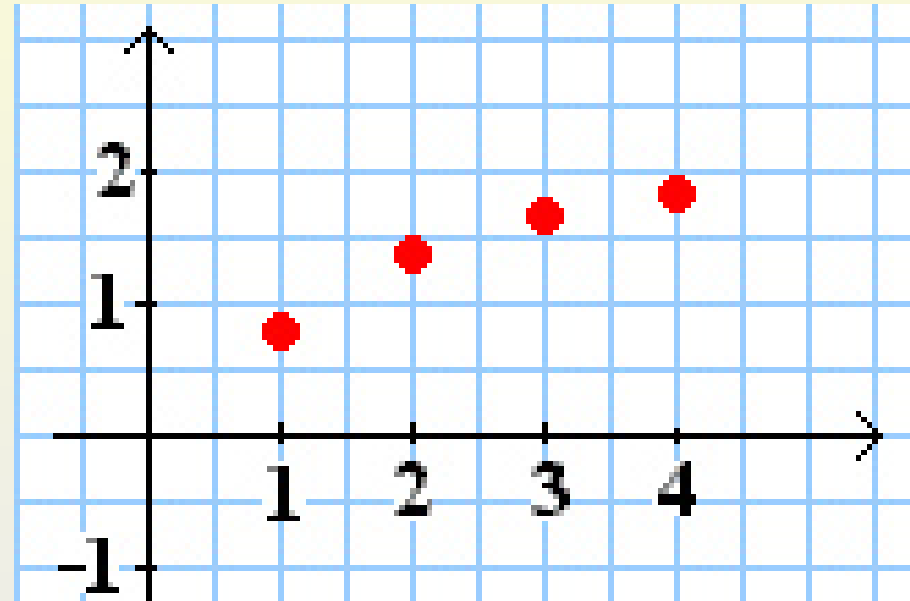
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$\forall k > 0 \exists v \in \mathbb{R} :$$

se $n > v$ allora $a_n > k$

Esempio 7

$$a_n = \log(n + 1)$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$\log(n + 1) > k \text{ per } n + 1 > e^k$$

$$\text{cioè per } n > e^k - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$\forall k < 0 \exists v \in \mathbb{R} :$$

se $n > v$ allora $a_n < k$

Esempio 8

$$a_n = 1 - n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$1 - n^2 < k \text{ per } n^2 > 1 - k \text{ cioè } n > \sqrt{1 - k}$$

$$\text{quindi se } n > \sqrt{1 - k}, 1 - n^2 < k$$

$$a_n \rightarrow \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow a_n \text{ regolare}$$

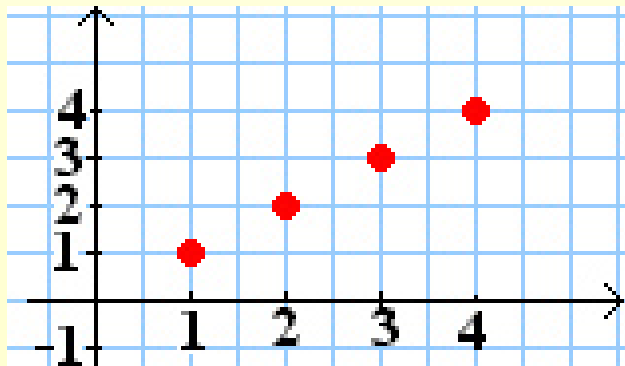
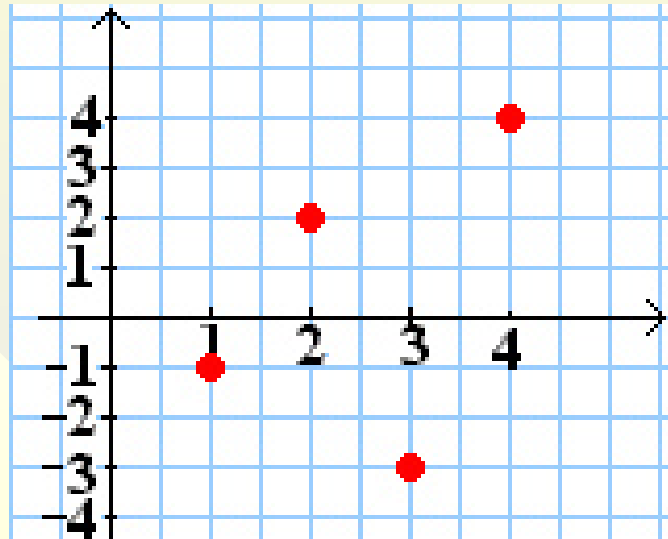
NB: non tutte le successioni sono dotate di limite

$a_n = (-1)^n$ come abbiamo visto è **LIMITATA**
ma **NONE' DOTATA DI LIMITE**

NB: si dimostra invece che a_n convergente $\Rightarrow a_n$ limitata

Esempio 9

$a_n = (-1)^n n \Rightarrow a_n$ non è dotata di limite



poichè $|a_n| = n \rightarrow +\infty$

si dice che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Data una successione a_n , in generale non è detto che questa sia regolare a meno che a_n non sia definitivamente monotona infatti:

a_n definitivamente monotona crescente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

a_n definitivamente monotona decrescente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Esempio 10

$$a_n = q^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

1) Se $q > 1$, $k > 0$, $q^n > k$ per $n > \log_q k$

$\Rightarrow \forall k > 0 \exists v = \log_q k : q^n > k$ per $n > v$

2) Se $q = 1$ si ha una successione costante $a_n = 1$

è quindi evidente che $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$

3) Se $q = -1 \Rightarrow a_n = (-1)^n$

successione non regolare

4) Se $q < -1$ si ha una successione oscillante divergente in modulo

$$a_n = (-1)^n |q|^n \Rightarrow |a_n| = |(-1)^n |q|^n| = |q|^n \quad (|q| > 1)$$

5) Se $|q| < 1$ si ha una successione oscillante convergente a zero

$$|a_n| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon \text{ se } n > \log_{|q|} \varepsilon$$

Alcuni limiti notevoli di successioni

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = 1 \quad (\text{NB: } n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ e } 0! = 1)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty \quad (\forall a > 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (\forall a > 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Per il calcolo di limiti di successioni si hanno teoremi relativi all'algebra dei limiti analoghi a quelli per le funzioni

Se $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$

1) $a_n + b_n \rightarrow a + b$

2) $a_n - b_n \rightarrow a - b$

3) $a_n b_n \rightarrow ab$

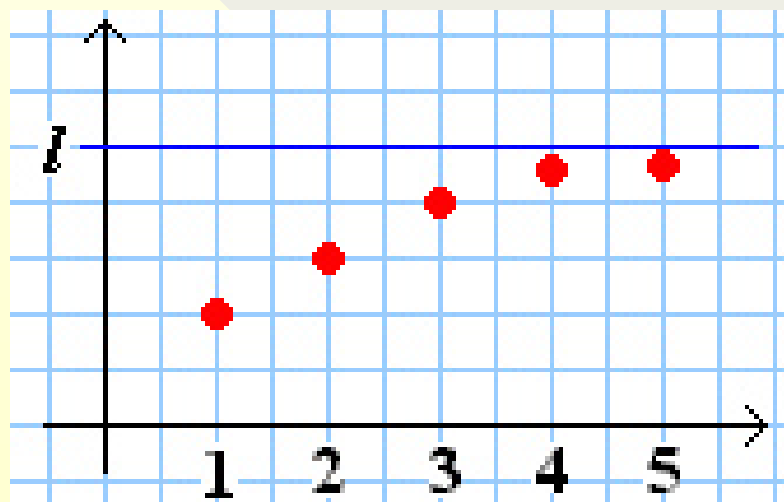
4) se $b_n \neq 0$ e $b \neq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

- 1) se $a_n \rightarrow +\infty$ e b_n è limitata inferiormente $\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$
- 2) se $a_n \rightarrow -\infty$ e b_n è limitata superiormente $\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow -\infty$
- 3) se $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow l > 0$ (< 0) $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ ($-\infty$)
- 4) se $a_n \rightarrow -\infty$ e $b_n \rightarrow l > 0$ (< 0) $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$ ($+\infty$)
- 5) se $a_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$
- 6) se $a_n \rightarrow 0$ e $|a_n| \neq 0$ ($> 0, < 0$) $\Rightarrow \frac{1}{|a_n|} \rightarrow +\infty$

**Nulla si può concludere per le forme
indeterminate**

$$+\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$

Per il calcolo di **limiti di successioni** possono essere utilizzati i risultati relativi ai **limiti di funzione** nel senso che: **se a_n è una successione ed f una funzione definita per tutti i numeri reali positivi tale che $f(n)=a_n \forall n$, allora se esiste finito o infinito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ allo stesso limite tende la successione a_n .**



Esempio 11Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt[n]{n} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt[n]{n} \right) = \infty \cdot 0 \text{ f.i.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x} \log x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x} \log x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\log x + 1) e^{\frac{1}{x} \log x}}{-1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt[n]{n} \right) = +\infty \end{aligned}$$