

I VETTORI

Nell'insieme $R^n = R \times R \times \dots \times R$ (n volte) si

consideri la *n-pla ordinata*

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $x_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Tale n-pla, che indichiamo con $\underline{x}$, si chiama

VEETTORE di componenti x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

o PUNTO di coordinate x_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

NB : un vettore si scrive

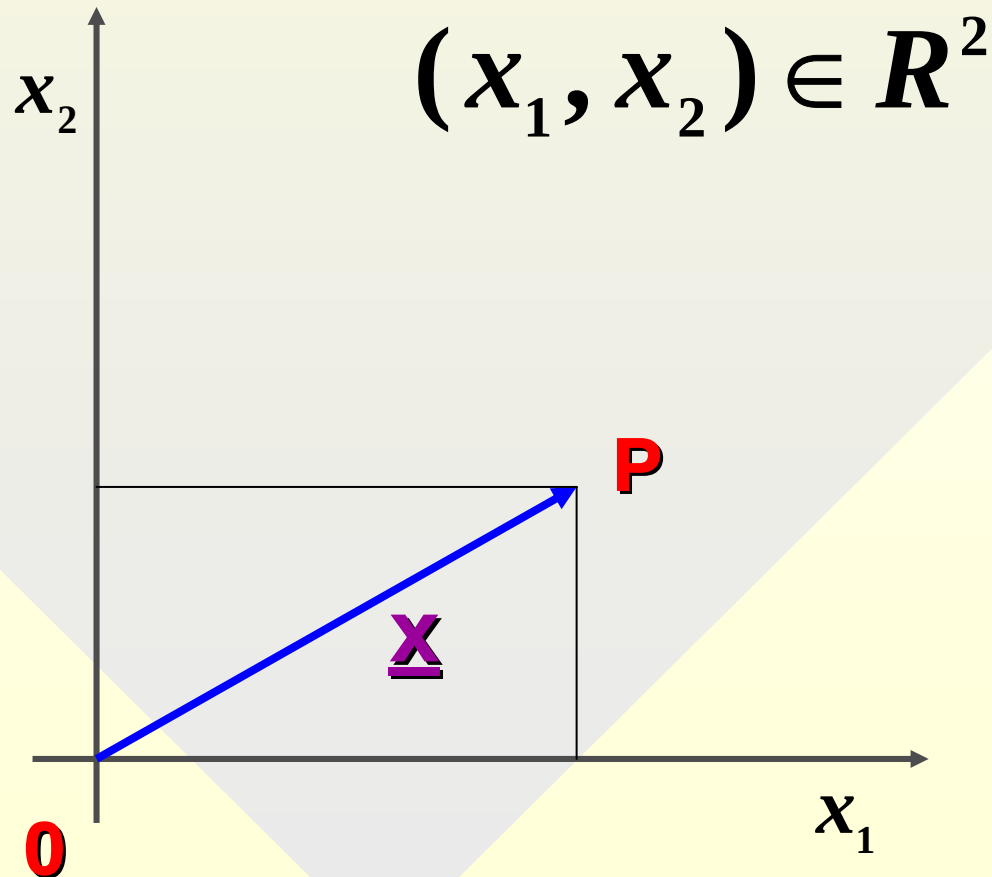
sia come vettore riga $(x_1, \dots, x_n)$

sia come vettore colonna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dato un sistema di assi cartesiani, la coppia ordinata (x_1, x_2) individua nel piano un **punto** di coordinate (x_1, x_2) o, equivalentemente, un **vettore** di componenti x_1, x_2

Il suddetto vettore si rappresenta mediante il **segmento orientato** **OP** avente il secondo estremo coincidente con il punto $P(x_1, x_2)$



ESEMPIO

In un determinato negozio sono in vendita **n articoli** che possono essere indicati mediante il vettore **x**

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

mentre la lista dei **prezzi** unitari può essere indicata con il vettore **p**

$$\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

OPERAZIONI TRA VETTORI

1) ***ADDIZIONE***

2) ***MOLTIPLICAZIONE SCALARE***

3) ***PRODOTTO INTERNO***

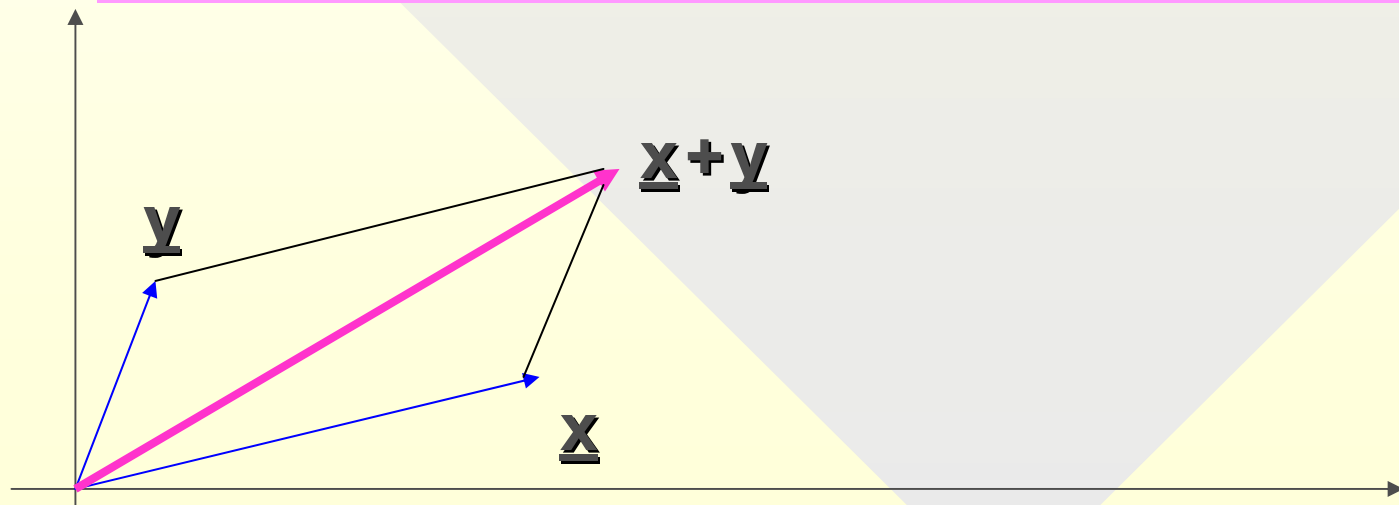
1) *ADDIZIONE*

Dati i vettori

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad \underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

il **vettore somma** è dato per definizione

da $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$



PROPRIETA'

1) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x} \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ (p. commutativa)

2) $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) \quad \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ (p. associativa)

3) $\exists!$ Elemento neutro dell'addizione che è il vettore nullo $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ Infatti:

$$\underline{x} + \underline{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

4) $\exists!$ Opposto di $\underline{x}$, $-\underline{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ infatti:

$$\underline{x} + (-\underline{x}) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

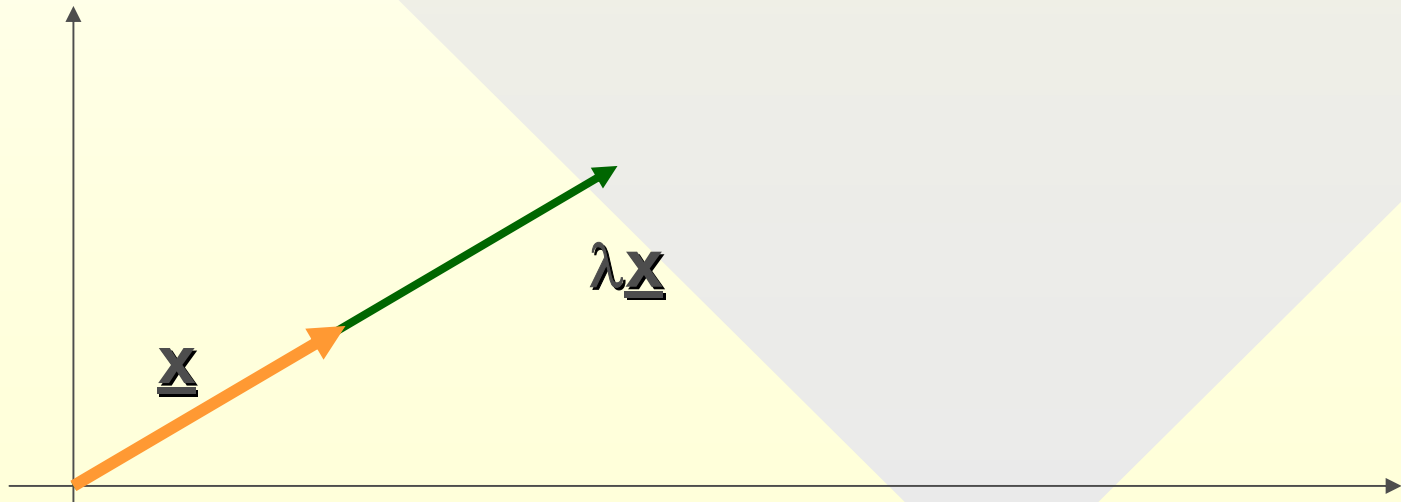
2) ***MOLTIPLICAZIONE SCALARE***

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ ed il vettore $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

il **prodotto** $\lambda \underline{x}$ è dato per definizione

da

$$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$



PROPRIETA'

$$1) (u+\lambda)\underline{\mathbf{x}}=u\underline{\mathbf{x}}+ \lambda\underline{\mathbf{x}}$$

$$\forall u,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$$

$$2) \lambda(\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}})= \lambda\underline{\mathbf{x}}+\lambda\underline{\mathbf{y}}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^n$$

$$3) \lambda(u\underline{\mathbf{x}})=(\lambda u)\underline{\mathbf{x}}$$

$$\forall u,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$$

$$4) 1\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{x}}$$

$$\forall \underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$$

L'insieme R^n munito delle
operazioni fra vettori sopra
definite acquisisce la
STRUTTURA di

SPAZIO
VETTORIALE

ESEMPIO 1

Consideriamo *due magazzini* che contengono *quattro merci* nelle quantità indicate dai **DUE VETTORI** $\underline{x}$ e $\underline{y}$:

$$\underline{x}=(10,50,75,100) \quad \underline{y}=(23,14,2,19)$$

Il *complesso dei due magazzini* conterrà quindi le quantità delle quattro merci indicate dal **VETTORE SOMMA** $\underline{x}+\underline{y}$

$$\underline{x}+\underline{y}=(33,64,77,119)$$

ESEMPIO 2

Consideriamo una **operazione finanziaria** che alle **scadenze $1, 2, \dots, n$** implica movimenti di cassa (con segno positivo per le entrate e negativo per le uscite) di ammontare rispettivamente $x_1, x_2, \dots, x_n$

Con il **VETTORE** $\underline{x} = (-500, 200, 700)$ si potrebbe quindi descrivere un **titolo** che oggi si acquista a 500, tra un anno pagherà 200 e tra due anni 700.

... continua

IL VETTORE $3\underline{x}=(-1500,600,2100)$

contiene uscite e entrate derivanti
dall'*acquisto di tre titoli* mentre

IL VETTORE $-5\underline{x}=(2500,-1000,-3500)$

contiene le entrate presenti e le minori
entrate future derivanti dalla *vendita di
cinque titoli*

COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI

Siano $\underline{v}_i \in \mathbb{R}^n$ ($i=1,2,3,\dots,m$)

II VETTORE

$$\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_m \underline{v}_m$$

si chiama **combinazione**
lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ **con**
coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

... osservazione

Ogni vettore $\underline{x} \in R^n$ è combinazione lineare dei **vettori fondamentali**

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad \underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0) \quad \dots$$

$$\underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Infatti:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1)$$

dove i coefficienti della combinazione lineare sono le componenti del vettore

SOTTOSPAZIO DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Dati i vettori $\underline{v}_i \in R^n$ ($i=1,2,3,\dots,m$)

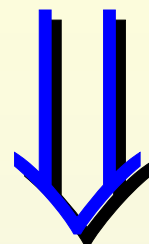
$$V = \{a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_m \underline{v}_m;$$

$$a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

In particolare V è chiuso rispetto alla
somma e alla *moltiplicazione scalare*

definite in R^n





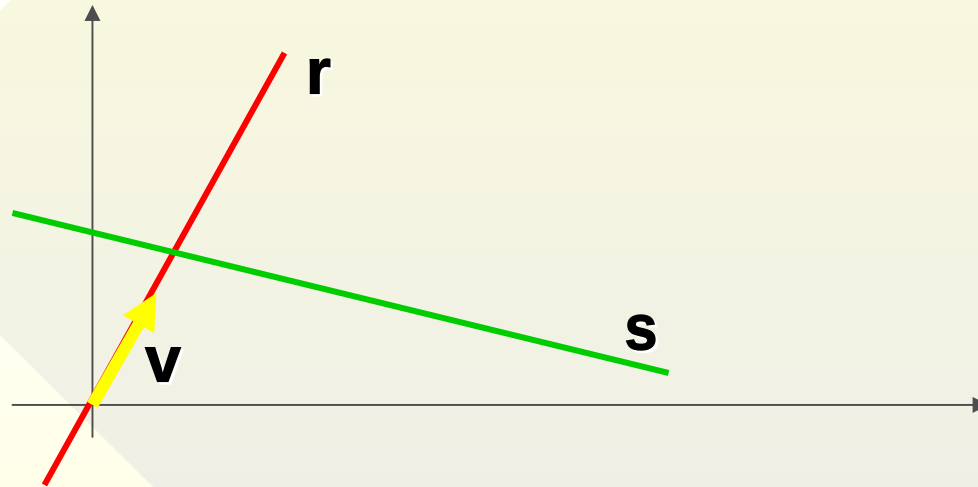
V è un sottospazio di R^n

$$\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \}$$

**Sono una famiglia di
GENERATORI di V o un
SOSTEGNO**

ESEMPIO

Siano $\underline{v} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ ed $r = c\underline{v}$, $c \in \mathbb{R}$



La retta r ***È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE*** di $\mathbb{R}^2$

La retta s è sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ ma ***NON È SOTTOSPAZIO VETTORIALE*** di $\mathbb{R}^2$ (per es. $\underline{v} \in s$ ma $0 \cdot \underline{v} \notin s$) poiché s non è chiusa rispetto alla moltiplicazione scalare.

... osservazione

E' interessante notare che per ogni sottospazio $V \in R^n$ è possibile determinare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ che generi V

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

Def. I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$
sono **LINEARMENTE DIPENDENTI**
se, e solo se, è possibile scrivere

$$(*) \quad \sum_{m=1}^k c_m \underline{x}_m = \underline{0} \quad (c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + \dots + c_k \underline{x}_k = \underline{0})$$

con almeno un coefficiente $c_m \neq 0$

Def. I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** se, e solo se, la (*) vale solo con i coefficienti tutti nulli
equivalentemente

Def. I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ sono **LINEARMENTE DIPENDENTI** se, e solo se, uno di essi può essere espresso come *combinazione lineare* degli altri
IN CASO CONTRARIO SI DICONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

ESEMPIO 1

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$$2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$$

linearmente dipendenti

$$\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$$

ATT. In generale se i vettori sono linearmente dipendenti non è detto che ognuno di essi possa essere scritto come combinazione lineare degli altri (almeno uno)

Per esempio,

i vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

sono ***linearmente dipendenti***, infatti

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ma } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ non può essere}$$

scritto come combinazione lineare degli altri

ESEMPIO 2

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{v}_3 = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 \Rightarrow$ i vettori sono
linearmente dipendenti

Osservazione: Se una famiglia di vettori contiene il **vettore nullo**, questi sono sicuramente **linearmente dipendenti** infatti il vettore nullo può essere sempre scritto come combinazione lineare degli altri :
basta prendere i coefficienti tutti nulli

ESEMPIO 3

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1 \Rightarrow$ i vettori sono **linearmente dipendenti** ($\underline{v}_2$ può essere scritto come combinazione lineare di $\underline{v}_1$)

Osservazione: Due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se hanno le ***componenti proporzionali***

ALCUNE PROPRIETÀ'

(1)

Se ad un insieme di **(senza dimostrazione)**

vettori linearmente dipendenti si
aggiungono altri vettori,
la dipendenza lineare si conserva

Se ad un insieme di

vettori linearmente indipendenti
si tolgono dei vettori,
l'indipendenza lineare si conserva

ESEMPIO 1

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono **linearmente dipendenti**



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono ancora

linearmente dipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono **linearmente**

indipendenti



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono ancora

linearmente

indipendenti

Dato un insieme di vettori

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$$

linearmente dipendenti, se ad uno di essi si sostituisce un suo multiplo, la dipendenza lineare si conserva.

Con multipli non nulli, lo stesso vale se i vettori sono linearmente indipendenti

ESEMPIO 2

sono **linearmente dipendenti**



sono ancora

linearmente dipendenti

sono **linearmente indipendenti**



sono ancora

linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dato un insieme di **vettori**

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$$

linearmente dipendenti, se ad uno di essi si somma una **combinazione lineare degli altri**, la **dipendenza lineare si conserva**.

Lo stesso vale se i **vettori** sono **linearmente indipendenti**

ESEMPIO 2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono **linearmente
dipendenti**



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + c_1 + 2c_2 \\ 1 + 2c_1 + 4c_2 \\ 0 + c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono ancora
linearmente dipendenti

Se i **vettori**

(4)

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$$

sono linearmente indipendenti,
allora

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

sono linearmente dipendenti,

se, e solo se, **$\underline{y}$ può essere preso come
COMBINAZIONE LINEARE di**

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$$