

Università degli Studi di Macerata
Facoltà di Scienze Politiche

Corso di Statistica Esercitazioni

Cristina Tortora
a.a.: 2011/2012

Esercizio1

Si consideri la prova consistente nel lancio di una moneta tre volte:

1. Definire l'insieme degli eventi elementari;
2. Calcolare la probabilità di ottenere almeno una volta testa.

Esercizio1: soluzione

Si consideri la prova consistente nel lancio di una moneta tre volte:

1. Definire l'insieme degli eventi elementari;

$$\Omega = \{(T, T, T); (TTC); (TCT); (CTT); (CCT); (CTC); (TCC); (CCC)\}$$

2. Calcolare la probabilità di ottenere almeno una volta testa.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Esercizio2

Sia data una prova consistente nel lancio di un dado e si considerino i seguenti tre eventi:

1. A = si ottiene un punteggio maggiore di 2;
2. B = si ottiene un punteggio dispari;
3. C = si ottiene un punteggio divisibile per 3 o per 5.

Si calcoli:

1. La probabilità degli eventi A , B , C ;
2. La probabilità $P(C|A)$.

I tre eventi sono indipendenti?

Esercizio2: soluzione

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

1. La probabilità degli eventi A, B, C;

$$P(A) = \frac{4}{6} = 0,6; P(B) = \frac{3}{6} = 0,5;$$

$$P(C) = P(\text{punteggio divisibile per 3}) + P(\text{punteggio divisibile per 5}) - P(\text{punteggio divisibile per 3 e per 5}) \\ = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{3}{6} = 0,5$$

2. La probabilità $P(C|A)$:

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

I tre eventi sono indipendenti?

$$P(C \cap B) = \frac{2}{6} \neq \frac{3}{6} * \frac{3}{6} = P(C) * P(B)$$

Esercizio3

Una ditta vuole verificare l'efficacia di una campagna pubblicitaria per un nuovo prodotto. Per ogni prodotto venduto, viene chiesto all'acquirente se ha effettuato l'acquisto in seguito all'annuncio pubblicitario oppure in modo indipendente. Da un'indagine precedente è noto che la probabilità che il potenziale acquirente abbia visto l'annuncio è 0,8 e che la probabilità che la vendita si realizzi con successo, posto che l'individuo abbia visto la pubblicità, è 0,7, mentre la probabilità che la vendita si realizzi, posto che il soggetto non abbia visto l'annuncio, è pari a 0,3.

Si calcoli la probabilità che un acquirente scelto a caso effettui l'acquisto.

Esercizio3: soluzione

$S = \{\text{evento il cliente ha visto l'annuncio pubblicitario}\}$

$A = \{\text{evento il cliente ha effettuato l'acquisto}\}$

$$P(S) = 0,8 \quad P(\bar{S}) = 0,2$$

$$P(A|S) = 0,7 \quad P(A|\bar{S}) = 0,3$$

$$P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap \bar{S}) = P(S) \times P(A|S) + P(\bar{S}) \times P(A|\bar{S}) = 0,8 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3 = 0,62$$

Esercizio4

Un'inchiesta sulla popolazione di una certa città ha fornito i seguenti dati: il 10% della popolazione è ricco, il 5% è famoso e il 3% è ricco e famoso. Per una persona scelta a caso da suddetta popolazione:

- 1) qual è la probabilità che la persona non sia ricca?
- 2) qual è la probabilità che sia ricca ma non famosa?
- 3) qual è la probabilità che sia ricca o famosa?
- 4) se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa sia anche ricca?
- 5) se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa non sia ricca?

Esercizio4: soluzione

$F = \{\text{la persona è famosa}\}; F^c = \{\text{la persona non è famosa}\}$

$R = \{\text{la persona è ricca}\}; R^c = \{\text{la persona non è ricca}\}$

I dati del problema si traducono in:

$$p(R) = 0,10; \quad p(F) = 0,05; \quad p(R \cap F) = 0,03$$

- 1) qual è la probabilità che la persona non sia ricca?
 $p(R^c) = 1 - p(R) = 1 - 0,10 = 0,90$
- 2) qual è la probabilità che sia ricca ma non famosa?
 $p(R \cap F^c) = p(R) - p(R \cap F) = 0,10 - 0,03 = 0,07$
- 3) qual è la probabilità che sia ricca o famosa?
 $p(R \cup F) = p(R) + p(F) - p(R \cap F) = 0,10 + 0,05 - 0,03 = 0,12$
- 4) se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa sia anche ricca?
 $p(R|F) = p(R \cap F)/P(F) = 0,03/0,05 = 0,6$
- 5) se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa non sia ricca?
 $p(R^c |F) = 1 - p(R|F) = 1 - 0,6 = 0,4$

Esercizio4: soluzione

Osserviamo che le probabilità totali possono essere inserite in una matrice in cui la somma estesa a tutti i suoi elementi è pari a 1:

	F	F ^c	Tot.
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R ^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot.	$p(F)$	$p(F^c)$	$p(\Omega)$

	F	F ^c	Tot.
R	0,03	0,07	0,10
R ^c	0,02	0,88	0,90
Tot.	0,05	0,95	1

Esercizio4: soluzione

- 1) qual è la probabilità che la persona non sia ricca?

	F	F ^c	Tot.
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R ^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot.	$p(F)$	$p(F^c)$	$p(\Omega)$

	F	F ^c	Tot.
R	0,03	0,07	0,10
R ^c	0,02	0,88	0,90
Tot.	0,05	0,95	1

$$p(R^c) = 1 - p(R) = 1 - 0,10 = 0,90$$

Esercizio4: soluzione

2) qual è la probabilità che sia ricca ma non famosa?

	F	F ^c	Tot.
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R ^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot.	$p(F)$	$p(F^c)$	$p(\Omega)$

	F	F ^c	Tot.
R	0,03	0,07	0,10
R ^c	0,02	0,88	0,90
Tot.	0,05	0,95	1

$$p(\mathbf{R} \cap \mathbf{F}^c) = p(\mathbf{R}) - p(\mathbf{R} \cap \mathbf{F}) = 0,10 - 0,03 = 0,07$$

Esercizio4: soluzione

3) qual è la probabilità che sia ricca o famosa?

	F	F ^c	Tot.
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R ^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot.	$p(F)$	$p(F^c)$	$p(\Omega)$

	F	F ^c	Tot.
R	0,03	0,07	0,10
R ^c	0,02	0,88	0,90
Tot.	0,05	0,95	1

$$p(\mathbf{R} \cup \mathbf{F}) = p(\mathbf{R}) + p(\mathbf{F}) - p(\mathbf{R} \cap \mathbf{F}) = 0,10 + 0,05 - 0,03 = 0,12$$

Esercizio4: soluzione

4) se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa sia anche ricca?

	F	F ^c	Tot.
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R ^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot.	$p(F)$	$p(F^c)$	$p(\Omega)$

	F	F ^c	Tot.
R	0,03	0,07	0,10
R ^c	0,02	0,88	0,90
Tot.	0,05	0,95	1

$$p(R|F) = p(R \cap F)/P(F) = 0,03/0,05 = 0,6$$

Esercizio4: soluzione

5) se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa non sia ricca?

	F	F ^c	Tot.
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R ^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot.	$p(F)$	$p(F^c)$	$p(\Omega)$

	F	F ^c	Tot.
R	0,03	0,07	0,10
R ^c	0,02	0,88	0,90
Tot.	0,05	0,95	1

$$p(R^c | F) = 1 - p(R | F) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$p(R | F) = p(R \cap F) / P(F) = 0,03 / 0,05 = 0,6$$

Esercizio5

Il responsabile dell'ufficio fidi di un istituto di credito ha rilevato che la probabilità di insolvenza delle imprese del settore terziario è pari al 15%, mentre per le imprese di altri settori è pari al 9%. E' noto, inoltre, che le imprese del settore terziario costituiscono il 32% del totale. Sulla propria scrivania il responsabile ha un fascicolo di un'impresa insolvente, qual è la probabilità che l'impresa appartenga al settore terziario?

Esercizio5: soluzione

I: {evento l'impresa è insolvente}

T: {evento l'impresa è del settore terziario}

$$P(I|T)=0,15 \quad P(I|\bar{T})=0,09$$

$$P(T)=0,32 \quad P(\bar{T})=1-0,32=0,68$$

$$P(T|I) = \frac{P(I|T)P(T)}{P(I)}$$

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I \cap T) + P(I \cap \bar{T}) = P(T) \times P(I|T) + P(\bar{T}) \times P(I|\bar{T}) = \\ &= 0,32 \times 0,15 + 0,68 \times 0,09 = 0,1092 \end{aligned}$$

$$P(T|I) = \frac{P(I|T) \cdot P(T)}{P(I)} = \frac{0,048}{0,1092} = 0,4396$$