



Università di Macerata
Facoltà di Scienze Politiche - a.a. 2011-2012

Corso di

Statistica

La Probabilità

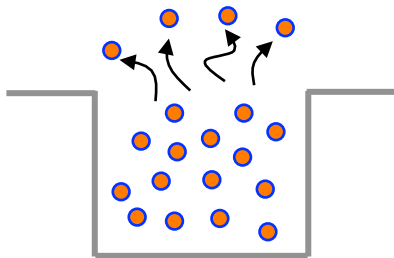
Lezione nove

Cristina Tortora

cristina.tortora@unina.it



La probabilità



La probabilità viene utilizzata per prendere decisioni in condizioni di incertezza

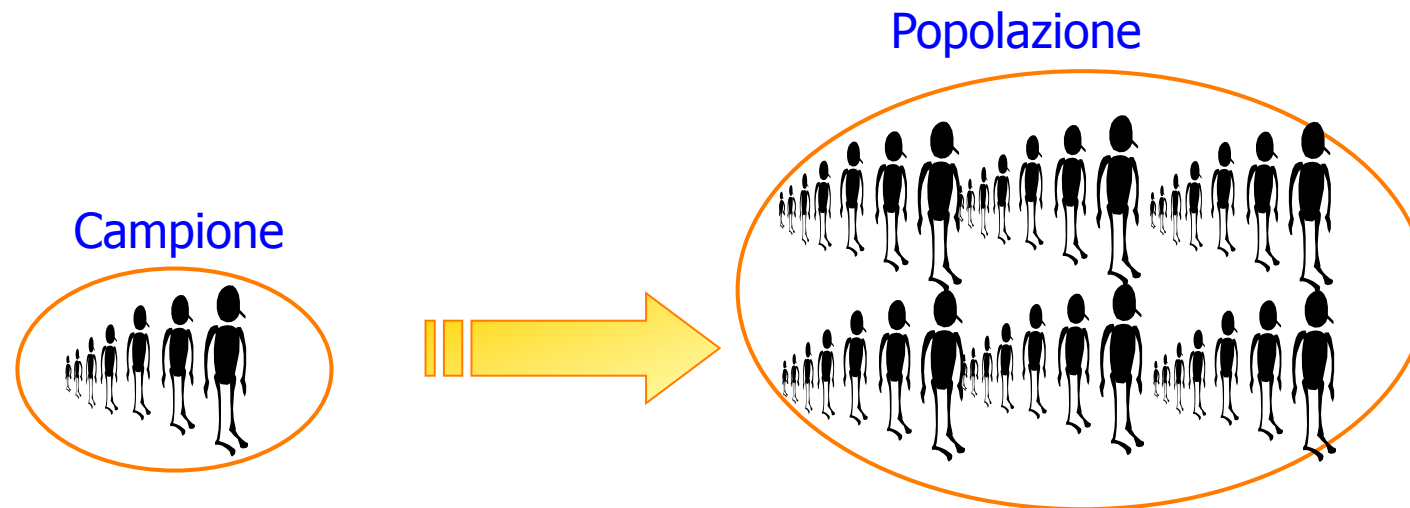


L' incertezza riguarda esperimenti con più di un risultato possibile

✦ La teoria della probabilità stabilisce i risultati che ci si può attendere dall' esecuzione di un esperimento

✦ L' inferenza statistica si serve dei risultati dell' esperimento per cercare di costruire o interpretare la legge che sta dietro ai risultati sperimentali ottenuti.

Il campionamento e l'inferenza

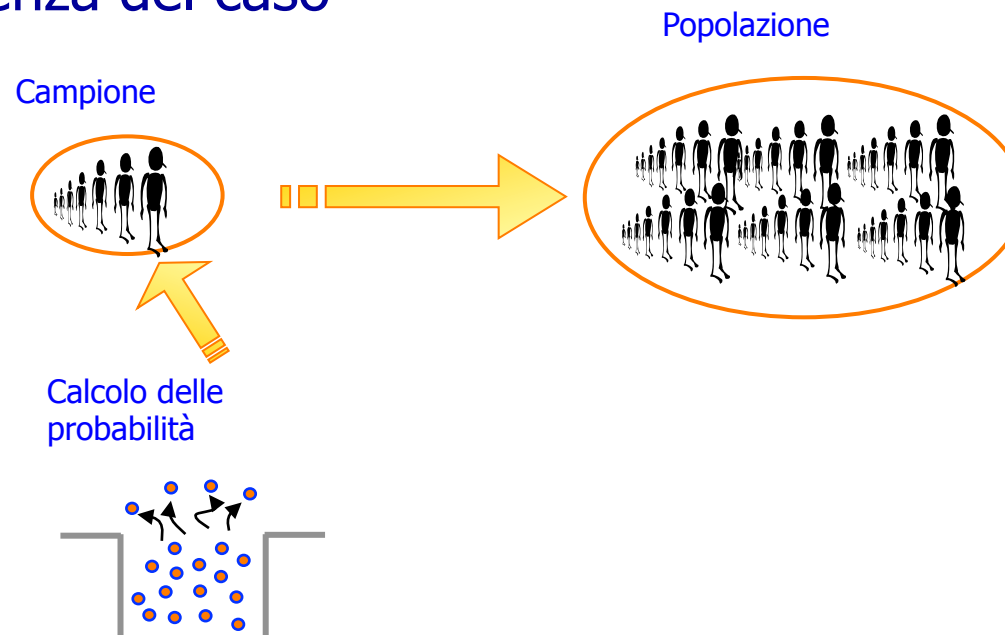


Dai dati osservati mediante scelta campionaria si giunge ad affermazioni che riguardano la popolazione da cui essi sono stati prescelti

L' inferenza e la probabilità

- Il campione deve essere rappresentativo della popolazione
 **campionamento casuale**

- Il calcolo delle probabilità esamina i risultati che si ottengono sotto l' influenza del caso



La probabilità

Esperimento o prova

Una qualsiasi operazione il cui risultato non può essere previsto con certezza

Evento elementare

Ogni risultato possibile di un esperimento

Spazio Campionario (Ω)

Insieme di tutti i possibili risultati dell' esperimento

Esperimento: Lancio di un Dado



Spazio Campionario:



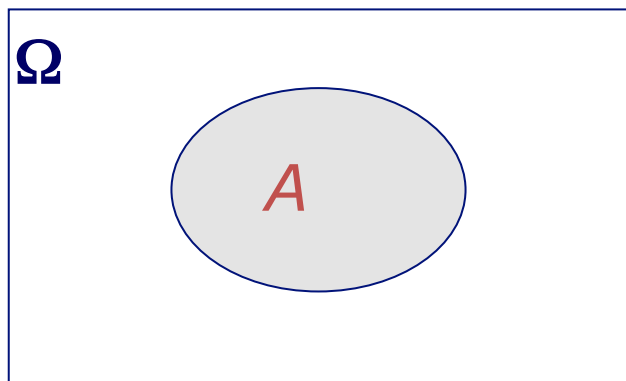
Evento Campionario E1: uscita faccia 1

Spazio Campionario:

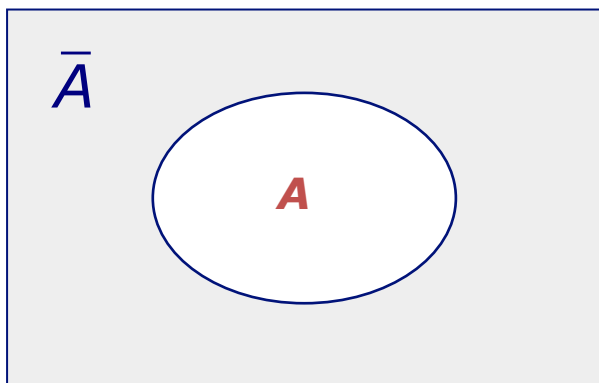


Evento Campionario E1: uscita di una faccia pari

L'Algebra degli Eventi e i diagrammi di Eulero-Venn

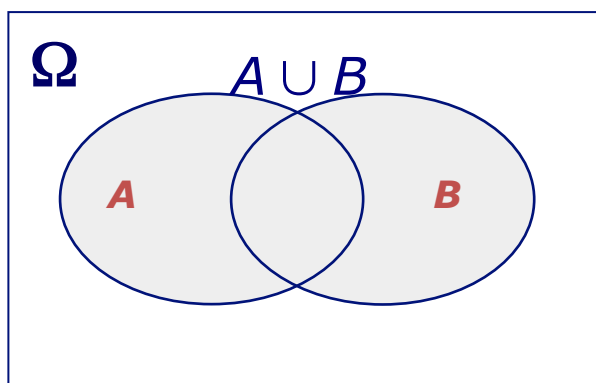


Evento A



Evento negazione di A

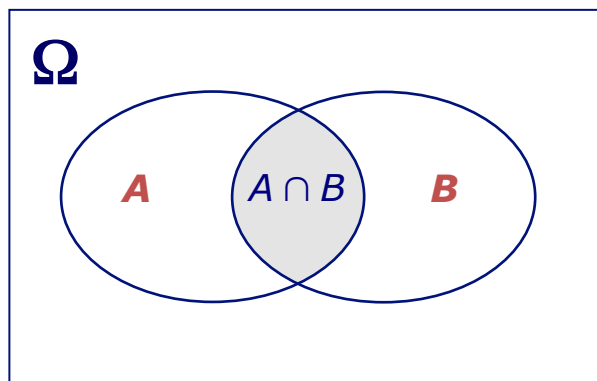
L'Algebra degli Eventi e i diagrammi di Eulero-Venn



1. Somma logica o Unione

$$C = A \cup B$$

Definiamo **UNIONE** tra due eventi A e B l'evento C che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi A e B ;



2. Prodotto logico o Intersezione

$$C = A \cap B$$

Definiamo **INTERSEZIONE** tra due eventi A e B l'evento C che si verifica se e solo se si verificano contemporaneamente sia A che B ;

Un esempio



Nell'ambito dell'esame di ammissione ad una Accademia teatrale, si considerino i seguenti eventi:

- A** il candidato ha meno di 35 anni;
- B** il candidato ha una buona dizione;
- C** il candidato ha già avuto esperienze nell'ambiente teatrale;

Assumendo a caso uno tra i candidati, si scrivano i seguenti eventi:

1. il candidato non ha una buona dizione; $\longrightarrow \bar{B}$
2. ha meno di 35 anni ed ha una buona dizione; $\longrightarrow A \cap B$
3. ha meno di 35 anni ma non ha una buona dizione; $\longrightarrow A \cap \bar{B}$
4. non ha una buona dizione ma ha già avuto esperienze; $\longrightarrow \bar{B} \cap C$
5. ha più di 35 anni, una buona dizione ed ha avuto esperienze; $\longrightarrow \bar{A} \cap B \cap C$
6. ha almeno una delle tre caratteristiche; $\longrightarrow A \cup B \cup C$

Eventi particolari

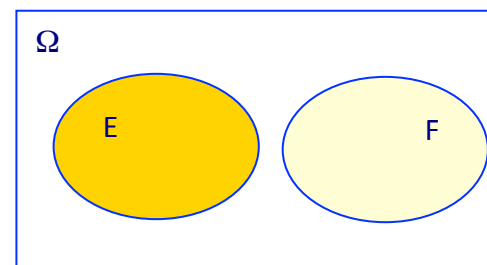


- **Evento Certo:** è l'evento che si verifica sempre
- **Evento Impossibile:** è l'evento che non può mai verificarsi
- **Eventi Indipendenti:** il verificarsi di uno di essi non ha alcuna influenza sulla probabilità del verificarsi degli altri

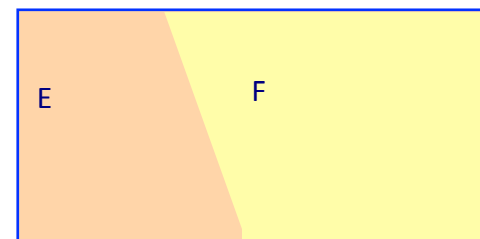
Relazioni tra Eventi



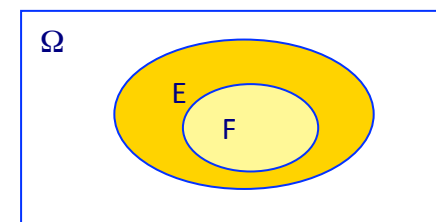
- **Incompatibilità:** il verificarsi di uno qualunque degli eventi esclude il verificarsi degli altri nella stessa prova $G = E \cap F = \emptyset$



- **Necessarietà:** in ogni prova almeno uno degli eventi verificarsi



- **Inclusione:** Il verificarsi dell'evento incluso implica il verificarsi dell'evento includente



La Probabilità



La probabilità è un concetto primitivo, perché innato e sempre presente nelle regole di comportamento dell'essere umano;

D'altra parte, la probabilità è una misura, perché associa al concetto primitivo una valutazione numerica;

Gli elementi che caratterizzano i diversi ambiti in cui è possibile applicare la probabilità riguardano:

① **Incertezza
del risultato**

② **Ripetibilità
dell'esperimento**

③ **Equiprobabilità
dei risultati**

Definizione classica → Condizioni 1, 2 e 3 (Esperimento in condizioni di perfetta uniformità)

La probabilità di un evento **A** è il *rapporto tra il numero di esiti favorevoli e il numero di esiti possibili*, posto che tutti i risultati siano ugualmente possibili.

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Definizione frequentista → Condizioni 1 e 2

In n esperimenti, tutti effettuati nelle medesime condizioni, la probabilità di un evento **A** è il *limite cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero di prove*.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{fr(A)}{n}$$

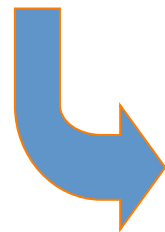
Definizione soggettivista → Condizione 1 (Esperimento per eventi futuri)

La probabilità di un evento **A** è una *misura del grado di fiducia che una persona ripone sul verificarsi di un dato evento*, avendo a disposizione informazioni sul fenomeno. Può essere quantificato nella somma che un individuo coerente è disposto a scommettere in un gioco equo nel quale, al verificarsi di **A**, egli riceve dal banco un importo unitario.

La definizione frequentista

- **Esperimento**: lancio di due dadi
- **Obiettivo**: calcolare le probabilità che si verifichino i diversi punteggi (somma dei numeri che appaiono sui due dadi dopo ogni gettata)

Spazio
campionario



Risultati dado 1

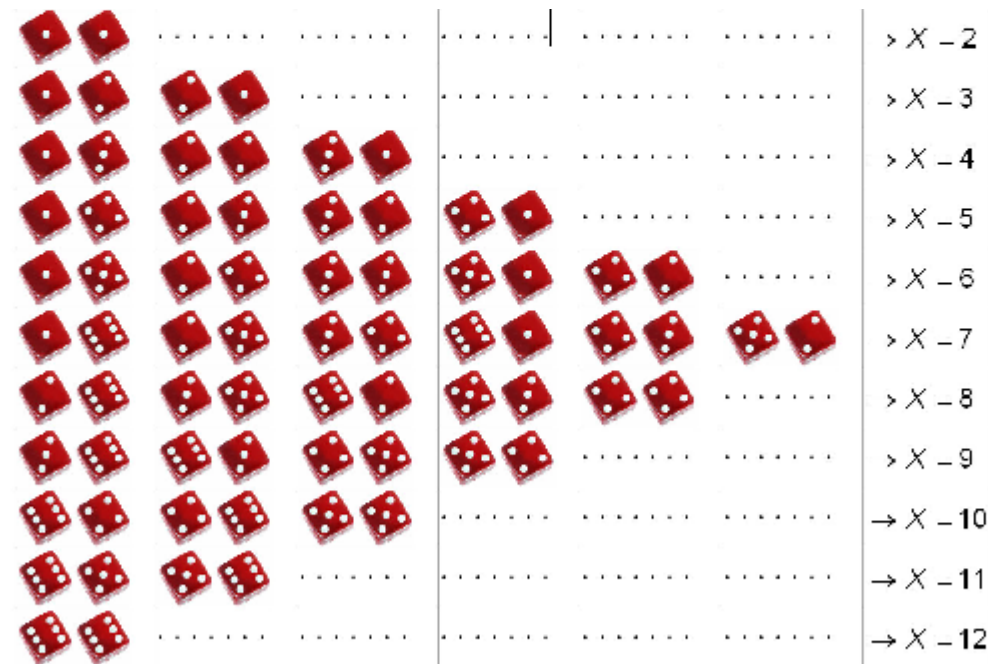
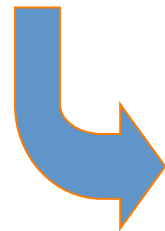
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Risultati dado 2

La definizione frequentista

- **Esperimento**: lancio di due dadi
- **Obiettivo**: calcolare le probabilità che si verifichino i diversi punteggi (somma dei numeri che appaiono sui due dadi dopo ogni gettata)

Spazio
campionario



La definizione frequentista

Somma dei punti	Prob. a priori	Freq. %	Freq. % dopo 100 lanci	Freq. % dopo 1000 lanci	Freq. % dopo 7000 lanci
2	1/36	2,8	5	3,5	2,4
3	2/36	5,6	11	6,7	4,6
4	3/36	8,3	4	9,2	7,8
5	4/36	11,1	14	11,5	11,1
6	5/36	13,9	6	13,1	14,1
7	6/36	16,7	13	14,4	16,0
8	5/36	13,9	18	13,9	13,9
9	4/36	11,1	9	10,3	12,0
10	3/36	8,3	12	9,4	9,5
11	2/36	5,6	5	5,5	5,7
12	1/36	2,8	3	2,5	2,9
totale	1	100	100	100	100

Gli assiomi della probabilità

1. $P(E_i) \geq 0 \quad \forall E_i \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $E_i \cap E_j = \emptyset \Rightarrow P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j)$

- La probabilità è un numero reale compreso tra 0 e 1 associato al presentarsi dell' evento

(evento impossibile $\rightarrow 0 \leq p \leq 1 \leftarrow$ evento certo)

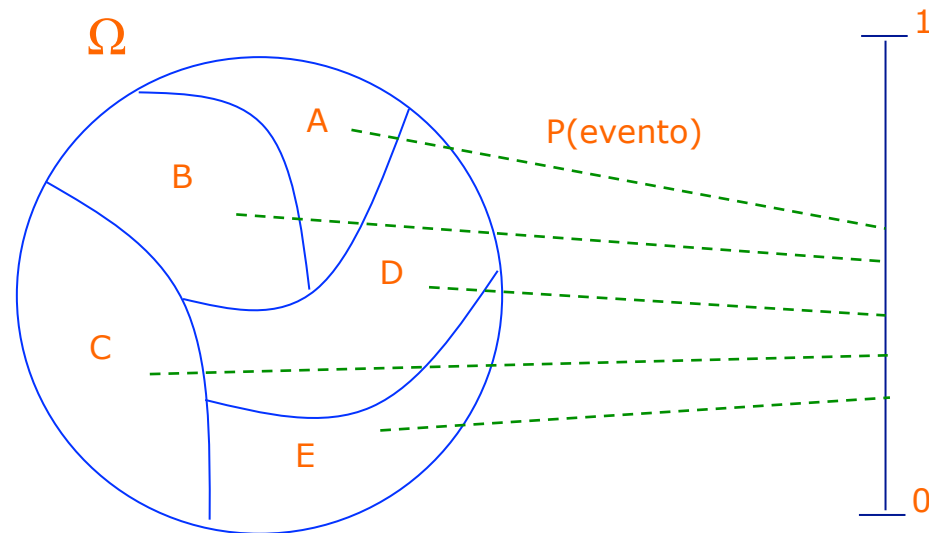
- La probabilità sull' intero spazio campionario è uguale a 1

Gli assiomi della probabilità

“La prova genera l’ evento con una certa probabilità”

Modello probabilistico

↳ L’ insieme costituito dallo spazio campionario di un esperimento e dalle probabilità associate.

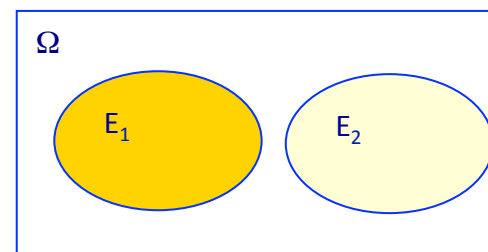


Il teorema delle probabilità totali

Consente di calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno tra due o più eventi

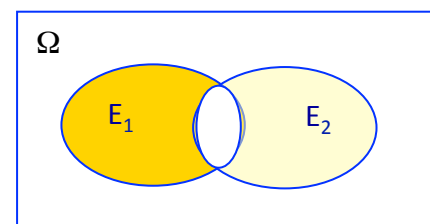
Eventi incompatibili:

$$P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } \dots \text{ o } E_s) = P(E_1 + E_2 + \dots + E_s) = \\ = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s) = P(E_1) + \dots + P(E_s)$$



Eventi compatibili:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$



Un esempio

Estraendo a caso una carta da un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità di ottenere un due o un sette?

- Esperimento: estrazione di una carta
- $E1$: evento “la carta estratta è un due”
- $E2$: evento “la carta estratta è un sette”
- $E1$ e $E2$ sono incompatibili

$$P(E1 \text{ o } E2) = P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13}$$

Un esempio

Estraendo a caso una carta da un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità di ottenere una carta di cuori o un sette?

- Esperimento: estrazione di una carta
- $E1$: evento “la carta estratta è di cuori”
- $E2$: evento “la carta estratta è un sette”
- $E1$ e $E2$ sono compatibili

$$P(E1 \cup E2) = P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52}$$

Il teorema delle probabilità composte

Consente di calcolare la probabilità che si verifichino tutti gli eventi considerati

Eventi indipendenti:

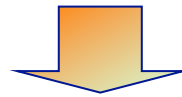
$$P(E_1 \text{ e } E_2 \text{ e } \dots \text{ e } E_s) = P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_s) = P(E_1) \cdot \dots \cdot P(E_s)$$

Eventi dipendenti:

$$P(E_1 \text{ e } E_2) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1)$$

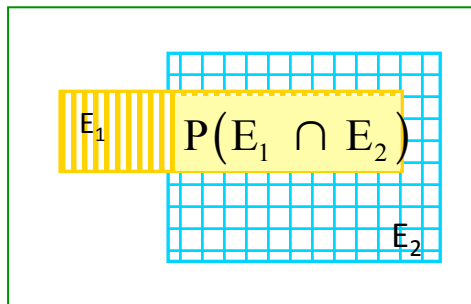
La probabilità condizionata

La probabilità di un evento dipende dalle circostanze sotto le quali l'esperimento viene condotto



Elementi condizionanti

Ω



$$P(E_1 \cap E_2)$$

Ω^*

Spazio campionario ridotto



Probabilità
condizionata

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

se $P(E_1) \neq 0$

Indipendenza

Due eventi E_1 e E_2 sono indipendenti se:

$$P(E_2 | E_1) = P(E_2)$$

✦ L'indipendenza è una relazione reciproca

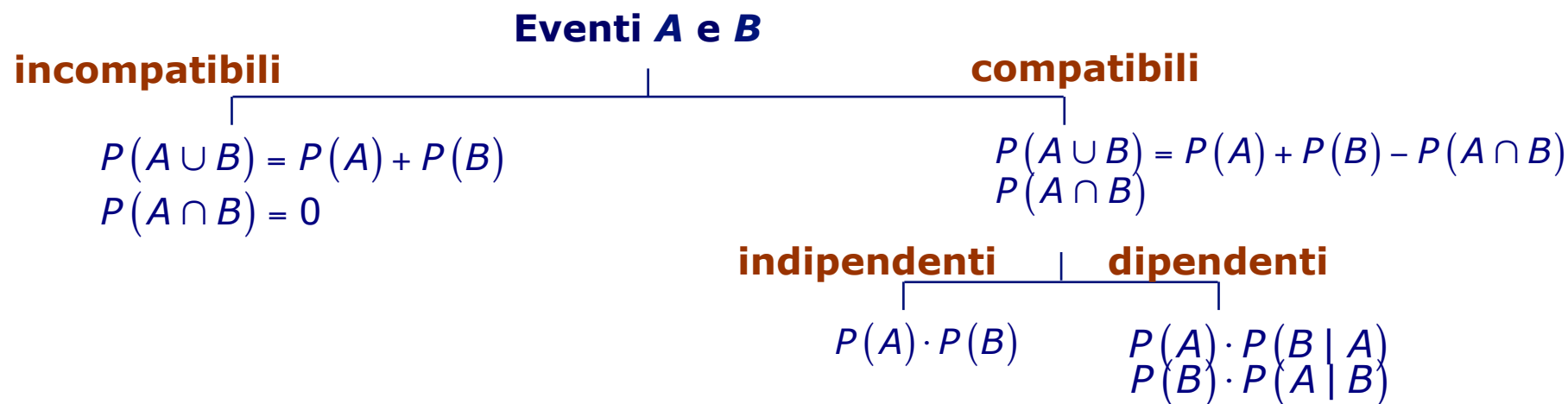
$$P(E_2 | E_1) = P(E_2) \iff P(E_1 | E_2) = P(E_1)$$

✦ Se due eventi sono indipendenti allora

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Schema logico per le applicazioni

1. Individuare correttamente la prova e gli eventi che essa genera
2. Distinguere gli eventi elementari
3. Esplicitare gli eventi complessi



Un esempio

Estraendo a caso due carte da un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità che entrambe siano regine?

- Esperimento: estrazione di due carta
- E1: evento “la prima carta estratta è una regina”
- E2: evento “la seconda carta estratta è una regina”

1. Estrazione senza ripetizione (eventi dipendenti)

$$P(E1 \text{ e } E2) = P(E1 \cap E2) = P(E1) \cdot P(E2 | E1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

Un esempio

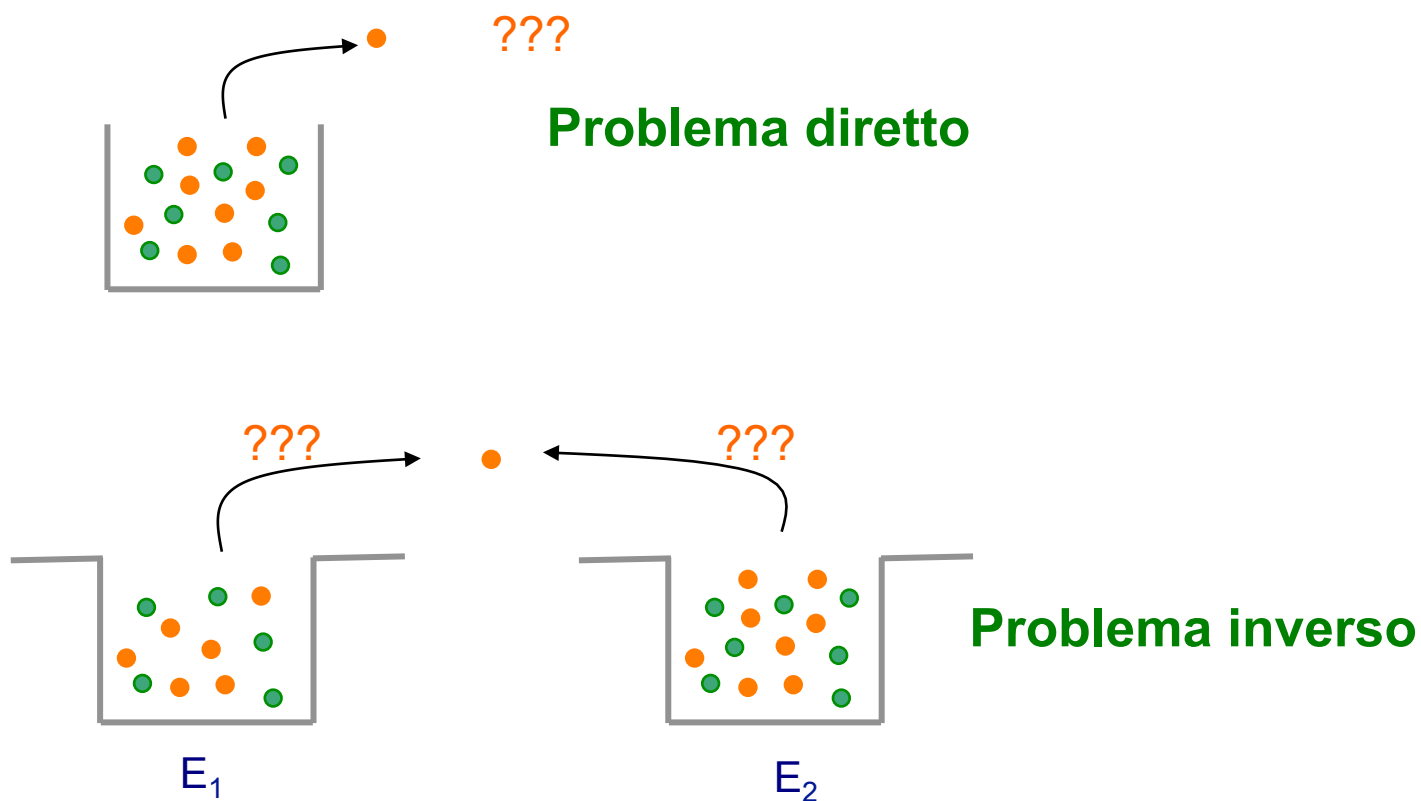
Estraendo a caso due carte da un mazzo di 52 carte, qual è la probabilità che entrambe siano regine?

- Esperimento: estrazione di due carta
- E1: evento “la prima carta estratta è una regina”
- E2: evento “la seconda carta estratta è una regina”

2. Estrazione con ripetizione (eventi indipendenti)

$$P(E1 \text{ e } E2) = P(E1 \cap E2) = P(E1) \cdot P(E2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}$$

Il Teorema di Bayes



Il Teorema di Bayes

Probabilità
note:

⚡ $P(E_1)$

⚡ $P(A | E_2)$

⚡ $P(E_2)$

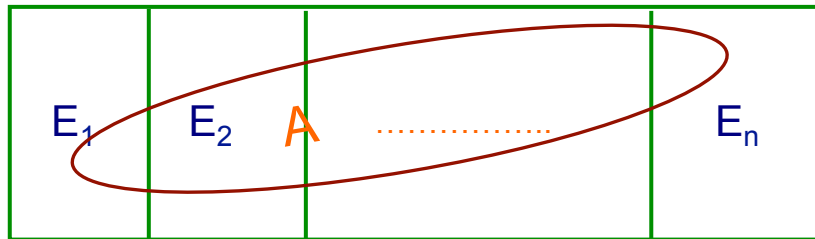
⚡ $P(A | E_2)$

Probabilità
a posteriori

⚡ $P(E_1 | A)$

⚡ $P(E_2 | A)$

Il Teorema di Bayes



- $E_1, \dots, E_n$: eventi necessari e incompatibili ($\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$) (Cause)
- A : evento incluso nello stesso spazio campionario ($A \subset \Omega$) (Effetto)

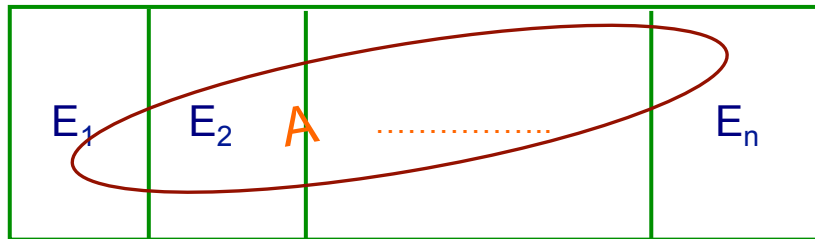
Probabilità note:

- $P(E_i)$ $\rightarrow$ Prob. a priori
- $P(A | E_i)$ $\rightarrow$ Prob. condizionate

Probabilità da determinare

- $P(E_i | A)$ $\rightarrow$ Prob. a posteriori

Il Teorema di Bayes



- $E_1, \dots, E_n$: eventi necessari e incompatibili ($\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$) (Cause)
- A : evento incluso nello stesso spazio campionario ($A \subset \Omega$) (Effetto)

$$P(E_i | A) = \frac{P(E_i \cap A)}{P(A)}$$

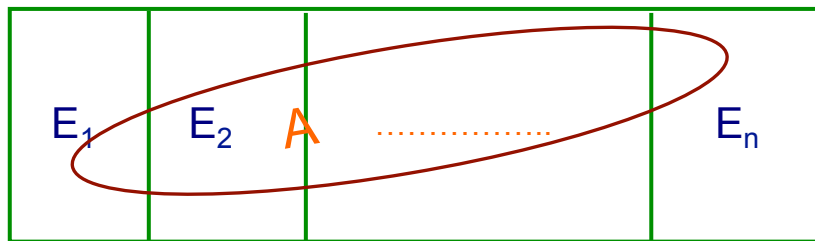
(Teorema delle prob. Composte)

$$P(E_i \cap A) = P(E_i)P(A|E_i)$$

(Teorema delle prob. Totali)

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(A|E_i)$$

Il Teorema di Bayes



- $E_1, \dots, E_n$: eventi necessari e incompatibili ($\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$) (Cause)
- A : evento incluso nello stesso spazio campionario ($A \subset \Omega$) (Effetto)

$$P(E_i | A) = \frac{P(E_i)P(A | E_i)}{\sum_{i=1}^n P(E_i)P(A | E_i)}$$

Un esempio

In una fabbrica di pneumatici ci sono tre turni di operai: un turno di giorno, uno di sera e uno di notte.

Secondo dati del passato, il 40% dei pneumatici prodotti dalla fabbrica furono prodotti dal turno di giorno, un altro 40% dal turno di sera e il restante 20% dal turno di notte.

Il 5% dei pneumatici prodotti dal turno di giorno erano difettosi, mentre la percentuale di prodotti difettosi era pari al 10% di quelli prodotti dal turno di sera e al 20% di quelli prodotti dal turno di notte.

Estraendo a caso un pneumatico, esso risulta difettoso. Il direttore del controllo della qualità vuole stabilire quale turno di produzione lo abbia prodotto.

Un esempio

In una fabbrica di pneumatici ci sono tre turni di operai: un turno di giorno, uno di sera e uno di notte.

Secondo dati del passato, il 40% dei pneumatici prodotti dalla fabbrica furono prodotti dal turno di giorno, un altro 40% dal turno di sera e il restante 20% dal turno di notte.

Il 5% dei pneumatici prodotti dal turno di giorno erano difettosi, mentre la percentuale di prodotti difettosi era pari al 10% di quelli prodotti dal turno di sera e al 20% di quelli prodotti dal turno di notte.

Estraendo a caso un pneumatico, esso risulta difettoso. Il direttore del controllo della qualità vuole stabilire quale turno di produzione lo abbia prodotto.

Evento S_1 : il pneumatico estratto è stato prodotto dal turno di giorno

Evento S_2 : il pneumatico estratto è stato prodotto dal turno di sera

Evento S_3 : il pneumatico estratto è stato prodotto dal turno di notte

Evento D_1 : il pneumatico estratto è difettoso

Evento D_2 : il pneumatico estratto non è difettoso

Un esempio

.....Secondo dati del passato, il 40% dei pneumatici prodotti dalla fabbrica furono prodotti dal turno di giorno, un altro 40% dal turno di sera e il restante 20% dal turno di notte.

Il 5% dei pneumatici prodotti dal turno di giorno erano difettosi, mentre la percentuale di prodotti difettosi era pari al 10% di quelli prodotti dal turno di sera e al 20% di quelli prodotti dal turno di notte....

$$P(S_1) = 0,40 \quad P(D | S_1) = 0,05$$

$$P(S_2) = 0,40 \quad P(D | S_2) = 0,10$$

$$P(S_3) = 0,20 \quad P(D | S_3) = 0,20$$

$$P(S_1 | D) = \frac{P(D | S_1) \cdot P(S_1)}{P(D | S_1) \cdot P(S_1) + P(D | S_2) \cdot P(S_2) + P(D | S_3) \cdot P(S_3)} =$$

$$= \frac{0,05 \cdot 0,40}{0,05 \cdot 0,40 + 0,10 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,20} = \frac{0,02}{0,10} = 0,20$$

Un esempio

.....Secondo dati del passato, il 40% dei pneumatici prodotti dalla fabbrica furono prodotti dal turno di giorno, un altro 40% dal turno di sera e il restante 20% dal turno di notte.

Il 5% dei pneumatici prodotti dal turno di giorno erano difettosi, mentre la percentuale di prodotti difettosi era pari al 10% di quelli prodotti dal turno di sera e al 20% di quelli prodotti dal turno di notte....

$$P(S_1) = 0,40 \quad P(D | S_1) = 0,05$$

$$P(S_2) = 0,40 \quad P(D | S_2) = 0,10$$

$$P(S_3) = 0,20 \quad P(D | S_3) = 0,20$$

$$P(S_2 | D) = \frac{P(D | S_2) \cdot P(S_2)}{P(D | S_1) \cdot P(S_1) + P(D | S_2) \cdot P(S_2) + P(D | S_3) \cdot P(S_3)} =$$

$$= \frac{0,10 \cdot 0,40}{0,05 \cdot 0,40 + 0,10 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,20} = 0,40$$

Un esempio

.....Secondo dati del passato, il 40% dei pneumatici prodotti dalla fabbrica furono prodotti dal turno di giorno, un altro 40% dal turno di sera e il restante 20% dal turno di notte.

Il 5% dei pneumatici prodotti dal turno di giorno erano difettosi, mentre la percentuale di prodotti difettosi era pari al 10% di quelli prodotti dal turno di sera e al 20% di quelli prodotti dal turno di notte....

$$P(S_1) = 0,40 \quad P(D | S_1) = 0,05$$

$$P(S_2) = 0,40 \quad P(D | S_2) = 0,10$$

$$P(S_3) = 0,20 \quad P(D | S_3) = 0,20$$

$$P(S_3 | D) = \frac{P(D | S_3) \cdot P(S_3)}{P(D | S_1) \cdot P(S_1) + P(D | S_2) \cdot P(S_2) + P(D | S_3) \cdot P(S_3)} =$$

$$= \frac{0,20 \cdot 0,20}{0,05 \cdot 0,40 + 0,10 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,20} = 0,40$$

Descrizione dello spazio campionario attraverso una tabella di contingenza

Genere Esito	Maschi	Femmine	
Positivo	18	34	52
Negativo	22	26	48
	40	60	100

La tabella riporta i risultati di 100 candidati ad un Concorso pubblico, divisi per genere ed esito.

Si estrae a caso un candidato. Qual è la probabilità che:

- Sia maschio? $\longrightarrow \frac{18 + 22}{100} = 0,4$
- Abbia superato la prova? $\longrightarrow \frac{18 + 34}{100} = 0,52$
- Abbia superato la prova posto che sia maschio? $\longrightarrow \frac{18}{40} = 0,45$
- Sia maschio posto che abbia superato la prova? $\longrightarrow \frac{18}{52} = 0,35$
- Abbia superato la prova oppure sia femmina? $\longrightarrow \frac{52}{100} + \frac{60}{100} - \frac{34}{100} = 0,78$
- Abbia superato la prova ma non sia maschio? $\longrightarrow \frac{34}{100} = 0,34$

Descrizione dello spazio campionario attraverso una tabella di contingenza

Genere Esito	Maschi	Femmine	Tot
Positivo	0,18	0,34	0,52
Negativo	0,22	0,26	0,48
Tot	0,40	0,60	1,00

La tabella riporta le probabilità relative ai risultati di 100 candidati ad un Concorso pubblico, divisi per genere ed esito.

E' possibile considerare l' esito come indipendente dal Genere?

A: Maschio **B:** Esito positivo

Indipendenza $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A) = 0,40 \quad P(B) = 0,52$$

$$P(A) \times P(B) = 0,40 \times 0,52 = 0,208$$

$$P(A \cap B) = 0,18$$

Probabilità in caso di indipendenza

Genere Esito	Maschi	Femmine	Tot
Positivo	0,208	0,312	0,520
Negativo	0,192	0,288	0,480
Tot	0,400	0,600	1,000

Frequenze in caso di indipendenza

Genere Esito	Maschi	Femmine	Tot
Positivo	21	31	52
Negativo	19	29	48
Tot	40	60	100

Un esempio



In un cassetto ci sono 10 pile, di cui 7 funzionanti e 3 esaurite. Dal cassetto viene presa, a caso, una prima pila e poi, senza reintrodurre nel cassetto la prima, ne viene presa una seconda. Qual è la probabilità che le due pile siano:

- Entrambe funzionanti?
- Entrambe esaurite?
- Una funzionante e una esaurita?

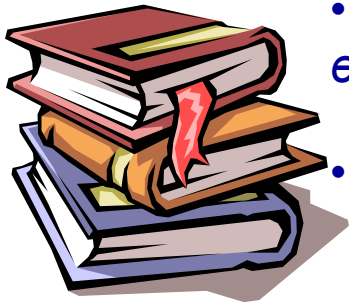
Evento **A**: La prima pila è funzionante Evento **B**: La seconda pila è funzionante

a. Entrambe le pile sono funzionanti: $\longrightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = 0,7 \times 0,667 = 0,467$

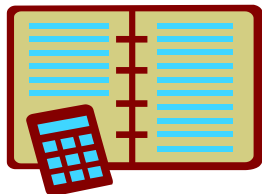
b. Entrambe le pile sono esaurite: $\longrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = 0,3 \times 0,222 = 0,067$

c. Una pila funziona e una è esaurita: $\longrightarrow P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$
 $= 0,233 + 0,233 = 0,466$

Dove e come studiare



- S. Borra, A. Di Ciaccio (2008) – *Statistica – Metodologie per le scienze economiche e sociali* – McGraw-Hill. **Cap. 8**
- D. Piccolo (2004) – *Statistica per le decisioni* – Il Mulino. **Cap. 8**



File “esercizi probabilità.pdf”

T4: Test di autovalutazione

Riepilogo

Elementi di teoria della probabilità

- ✓ Teoria della probabilità e inferenza
- ✓ I concetti basilari della probabilità: esperimento, evento, spazio campionario
- ✓ L'algebra degli eventi e i diagrammi di Eulero-Venn
- ✓ Relazioni tra eventi: incompatibilità, necessarietà, inclusione, indipendenza
- ✓ Definizioni di probabilità: classica, frequentista, soggettivista
- ✓ Teoria assiomatica
- ✓ Descrizione dello spazio campionario attraverso una tabella di contingenza
- ✓ Probabilità marginale, congiunta, condizionata
- ✓ Teorema delle probabilità totali
- ✓ Teorema delle probabilità composte
- ✓ Teorema di Bayes

