

Riassunto in formule: Analisi della varianza a due fattori
(piu' di una osservazione per cella)

consideriamo campioni definiti da due fattori A_h e C_j con rispettivamente $h=1, \dots, k_1$ $j=1, \dots, k_2$ livelli e i ($i=1, \dots, n$) osservazioni per ciascun gruppo h_j

si indichi con $\bar{Y}_h$ e con T_h rispettivamente la media e il totale dei gruppi definiti da A

si indichi con $\bar{Y}_j$ e con T_j rispettivamente la media e il totale dei gruppi definiti da C

si indichi con $\bar{Y}_{hj}$ e con T_{hj} rispettivamente la media e il totale dei gruppi definiti da AC

si indichi con $\bar{Y}_{..}$ e con $T_{..}$ rispettivamente la media e il totale generale

$$K = k_1 * k_2$$

Variabilità	gradi di libertà	SS	MS
tra i trattamenti	K-1	SS(B)	SS(B)/K-1
A	k_1-1	$\sum_{h=1}^{k_1} n_h (\bar{Y}_h - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{h=1}^{k_1} \frac{T_h^2}{n_h} - \frac{T_{..}^2}{n}$	SS(A)/ $k_1 - 1$
C	k_2-1	$\sum_{j=1}^{k_2} n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k_2} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{n}$	SS(C)/ $k_2 - 1$
AC	$(k_1-1) (k_2-1)$	SS(B)-SS(A)-SS(C)	SS(AC)/ $(k_1-1) (k_2-1)$
errore	n-K	SS(E)	SS(E)/n-K
Totale	n-1		

Test

$$H_1: A_h = 0 \quad F = \frac{SS(A)/(k_1 - 1)}{SS(E)/n - K}$$

$$H_2: C_j = 0 \quad F = \frac{SS(C)/(k_2 - 1)}{SS(E)/n - K}$$

$$H_3: AC_{hj} = 0 \quad F = \frac{SS(AC)/(k_1 - 1)(k_2 - 1)}{SS(E)/n - K}$$

se prendo una osservazione per cella l'interazione si confonde con l'errore e quindi $SS(AC)=SS(E)$ e $SS(E)=SS(T)-SS(A)-SS(C)$
in questa ipotesi riprendiamo i dati *dell'Esempio 9*

metodo dei contrasti per esperimenti a due fattori a due livelli

a) Varia la temperatura da 25° a 55° ed è fissa l'altitudine a 0-K: il flusso varia da 210 mA ad 240 mA

b) Varia la temperatura da 25° a 55° ed è fissa l'altitudine a 3-K: il flusso varia da 180 mA ad 200 m

Indichiamo con 0 e 1 i due livelli dei due fattori (basso/alto)
A(temperatura) e C(altitudine)

$$A_0C_0=(1)=210$$

$$A_1C_0=(a)=240$$

$$A_0C_1=(c)=180$$

$$A_1C_1=(ac)=200$$

Effetto di A=240-210=(a)-1 per C=0
 Effetto di A=200-180=ac-c per C=1

Effetto medio A=1/2(a-1+ac-c)=1/2(-1+a-c+ac)

Effetto medio C=1/2(c-1+ac-a)= 1/2(-1-a+c+ac)

Effetto medio AC=1/2(1-a-c+ac)

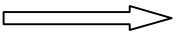
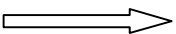
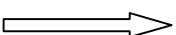
2A=-1+a-c+ac  **contrasto** **CONTRASTI**
 2C=-1-a+c+ac  **contrasto** **ORTOGONALI**
 2AC=1-a-c+ac  **contrasto**

Tabella dei coefficienti

	A	C	AC
1	-	-	+
a	+	-	-
c	-	+	-
ac	+	+	+

$$A=1/2(-210+240-180+200)=25$$

$$C=1/2(-210-240+180+200)=-35$$

$$AC=1/2(+210-240-180+200)=-5$$

$$SS(A) = \frac{2 * 25^2}{4} = 625$$

$$SS(C) = \frac{2(-35)^2}{4} = 1225$$

$$SS(AC) = SS(E) = \frac{2(-5)^2}{4} = 25$$

$$SS(T) = 1875$$

e' possibile eseguire così i test ottenendo gli stessi risultati

Esperimenti ad effetti fissi, random, misti

esperimento con tutti i livelli fissi $\Rightarrow$ modello fisso

esperimento con tutti i livelli variabili $\Rightarrow$ modello random

esperimento con alcuni fattori fissi e alcuni variabili $\Rightarrow$ modello misto

N.B.

nel caso di un modello random i livelli vanno scelti tra tutti i possibili livelli di un processo casuale

Modello ad una via

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\text{con } \varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

EFFETTI FISSI

EFFETTI VARIABILI

assunzione

$$\sum_{j=1}^k t_j = 0$$

$$\tau_j \sim \text{NID}(0, \sigma_\tau^2)$$

analisi

vista in precedenza

vista in precedenza

ipotesi modellistica relativa alle varianze

valore atteso di $MS(B)$

$$\sigma_\varepsilon^2 + \Delta$$

$$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\tau^2$$

valore atteso $MS(E)$

$$\sigma_\varepsilon^2$$

$$\sigma_\varepsilon^2$$

ipotesi da testare

$$H_0: \tau_j = 0 \text{ (per tutti } j)$$

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0$$

Modello a due vie

$$Y_{hji} = \mu + A_h + C_j + AC_{hj} + \varepsilon_{i(jh)}$$

$$\text{con } \varepsilon_{i(jh)} \sim \text{NID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

EFFETTI FISSI

EFFETTI VARIABILI

assunzione

$$\sum_{h=1}^{k_1} A_h = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k_2} C_j = 0$$

$$\sum_{h=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} AC_{hj} = 0$$

$$A_h \sim \text{NID}(0, \sigma_A^2)$$

$$C_j \sim \text{NID}(0, \sigma_C^2)$$

$$AC_{hj} \sim \text{NID}(0, \sigma_{AC}^2)$$

analisi

vista in precedenza

vista in precedenza

ipotesi modellistica relativa alle varianze

valore atteso di MS(A)

$$\sigma_\varepsilon^2 + \Delta$$

$$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_A^2 + n\sigma_{AC}^2$$

valore atteso di MS(C)

$$\sigma_\varepsilon^2 + \Delta$$

$$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_C^2 + n\sigma_{AC}^2$$

valore atteso di MS(AC)

$$\sigma_\varepsilon^2 + \Delta$$

$$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AC}^2$$

valore atteso MS(E)

$$\sigma_\varepsilon^2$$

$$\sigma_\varepsilon^2$$

ipotesi da testare

$$H_0: A_h = 0 \text{ (per tutti gli } h)$$

$$H_0: \sigma_A^2 = 0$$

$$H_0: C_j = 0 \text{ (per tutti } j)$$

$$H_0: \sigma_C^2 = 0$$

$$H_0: AC_{hj} = 0 \text{ (per tutti } h \text{ e } j)$$

$$H_0: \sigma_{AC}^2 = 0$$

quello che appare evidente è che nel modello a effetti variabili gli effetti incidono sulla variabilità globale della risposta mentre nel modello ad effetti fissi solo sulla risposta media

EFFETTI MISTI

assunzione

$$\sum_{h=1}^{k_1} A_h = 0 \quad C_j \sim \text{NID}(0, \sigma_C^2)$$

$$\sum_{h=1}^{k_1} AC_{hj} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{k_2} AC_{hj} \neq 0 \quad \text{A fisso C variabile}$$

analisi

vista in precedenza

ipotesi modellistica relativa alle varianze

valore atteso di $MS(A)$

$$\sigma_\varepsilon^2 + \Delta + n\sigma_{AC}^2$$

valore atteso di $MS(C)$

$$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_C^2$$

valore atteso di $MS(AC)$

$$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AC}^2$$

valore atteso $MS(E)$

$$\sigma_\varepsilon^2$$

ipotesi da testare

$H_0: A_h = 0$ (per tutti gli h)

$$H_0: \sigma_C^2 = 0$$

$$H_0: \sigma_{AC}^2 = 0$$

Modello ad effetti variabili

Esempio: effetti sulla pelle di un prodotto che viene testato per 3 settimane di seguito su 10 individui

individui: campione di possibili acquirenti

effetto variabile: tipi di pelle diversa dei 10 individui

effetto variabile: settimane diverse (condizioni di igiene diverse, esposizione diversa al sole, condizioni climatiche diverse)

intersezione: effetti diversi del tempo sui partecipanti

Modello ad effetti misti

Esempio: studio di tossicologia su animali

reazione allergica di un farmaco misurata sull'orecchio di un gatto in due posizioni diverse

effetto fisso: posizione

effetto variabile: campioni casuali di gatti

nessuna interazione