

La verifica d'ipotesi

Dott.a Nappo Daniela
daniela.nappo@unina.it

L'ipotesi statistica

In molte circostanze il ricercatore si trova a dover decidere quale, tra le diverse situazioni possibili riferibili alla popolazione, è quella meglio sostenuta dalle evidenze empiriche.

Anche in questo caso la struttura del problema consiste in una famiglia di distribuzioni di probabilità parametriche $f(x; \theta)$, con θ incognito, e nelle osservazioni campionarie $X_1, \dots, X_n$, che costituiscono delle realizzazioni della distribuzione di probabilità e che, quindi, forniscono delle informazioni sul valore di θ incognito.

Una **ipotesi statistica** è dunque una affermazione concernente la distribuzione di probabilità o il processo che ha generato le osservazioni campionarie osservate.

Una volta definita l'informazione che è necessario estrarre dal campione e la statistica che deve essere impiegata per questa operazione, occorrerà dare un giudizio sulla **coerenza del risultato campionario con l'ipotesi specificata per la popolazione**.

Più precisamente, se il risultato campionario si verrà a trovare talmente lontano dal valore teorizzato dall'ipotesi fatta per θ da cadere in un insieme di valori ritenuti non "coerenti" (in quanto troppo poco probabili) con l'ipotesi su θ , tale risultato avvalorerà la possibilità di ipotesi alternative a quella specificata.

E' dunque necessario definire una **regola di decisione**, o **test statistico**, che ad ogni valore campionario associ una **decisione sul parametro θ** , e tale schema decisionale viene formulato prima di effettuare il campionamento o di avere i dati a disposizione.

L'ipotesi statistica

Nel test delle ipotesi si evidenzia il ruolo della Statistica come scienza delle decisioni in condizioni di incertezza.

Infatti, è proprio del test tradurre un problema reale in un'affermazione statistica, assumere informazioni campionarie sulla popolazione di riferimento e, su questa base, prendere decisioni attribuendo a tale scelta un giudizio probabilistico sulla sua veridicità.

Un test si può derivare supponendo nota la distribuzione di probabilità di una variabile X , per cui **l'inferenza si riferisce ai soli parametri che la specificano (TEST PARAMETRICO)**

Oppure si può effettuare senza fare assunzioni stringenti circa la forma analitica della distribuzione di probabilità di X , per cui l'inferenza **riguarda sia la forma della distribuzione che i suoi parametri (TEST NON PARAMETRICO)**.

Il test delle ipotesi statistiche è una regola istituita sullo spazio campionario mediante la quale, sulla base del campione osservato, si decide se rifiutare o meno una ipotesi statistica H_0 riferita alla popolazione e detta ipotesi nulla.

La verifica delle ipotesi

Si definisce **ipotesi statistica** una qualunque affermazione che specifica completamente o parzialmente la distribuzione di probabilità di una v.c. X . Se la specificazione è completa, si parla di **ipotesi semplice**, altrimenti si parla di **ipotesi composta**.

Un'ipotesi viene definita **parametrica** quando gli aspetti incogniti riguardanti la popolazione vertono principalmente sui parametri della distribuzione di probabilità e non sulla forma o su altri aspetti non parametrici.

Nell'ambito delle ipotesi composte si parlerà di **ipotesi unidirezionale** sul parametro θ quando questa include valori reali in una sola direzione (ad esempio $H : \vartheta > \vartheta_0$), **ipotesi bidirezionale** nel caso in cui questa comprenda valori in entrambe le direzioni (ad esempio $H : \vartheta \neq \vartheta_0$).

La verifica d'ipotesi

L'ipotesi da sottoporre a verifica viene definita **ipotesi nulla** e viene indicata con H_0 . E' l'ipotesi preesistente rispetto all'esperimento campionario, quella che viene considerata valida fino a prova contraria, e comprende il sottoinsieme dei valori dello spazio parametrico Θ che si vuole sottoporre a test. Tipicamente, l'ipotesi nulla è un'ipotesi di tipo semplice:

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0$$

Il complemento all'ipotesi nulla costituisce l'**ipotesi alternativa** e viene indicata con H_1 . E' costituita da un singolo valore o da un insieme di valori possibili per θ e considerati alternativi a θ_0 :

$$H_1 : \vartheta = \vartheta_1$$

$$H_1 : \vartheta < \vartheta_0$$

$$H_1 : \vartheta > \vartheta_0$$

$$H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$$

L'ipotesi alternativa rappresenta dunque una controaffermazione che viene fatta in antitesi all'ipotesi nulla, e indica la direzione di allontanamento da H_0 che si desidera esaminare.

E' bene sottolineare che **l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa non sono equivalenti ai fini della decisione**, nel senso che il test non è mai conclusivo circa H_1 , ma concerne solo la possibilità che dal campione si possa pervenire al rifiuto o al non rifiuto di H_0 .

Le ipotesi H_0 e H_1 sono esaustive e disgiunte: o vale l'una o vale l'altra.

Il test statistico

Una volta formulate le ipotesi, occorre decidere se, sulla base dell'evidenza empirica campionaria, l'ipotesi nulla H_0 debba essere rifiutata o meno. E' perciò necessario mettere a punto una regola che permetta di discriminare tra i risultati campionari che portano ad accettare l'ipotesi nulla e quelli che portano a rifiutarla. Questa regola costituisce il **TEST**

Il test è dunque una regola che permette di stabilire se le osservazioni campionarie debbano ritenersi coerenti con l'ipotesi nulla oppure no.

Da un punto di vista operativo, un test è una statistica che fa corrispondere ad ogni campione casuale $(X_1, \dots, X_n)$ un valore numerico che può essere classificato secondo due diverse possibilità: **COERENTE CON H_0** o **NON COERENTE CON H_0**

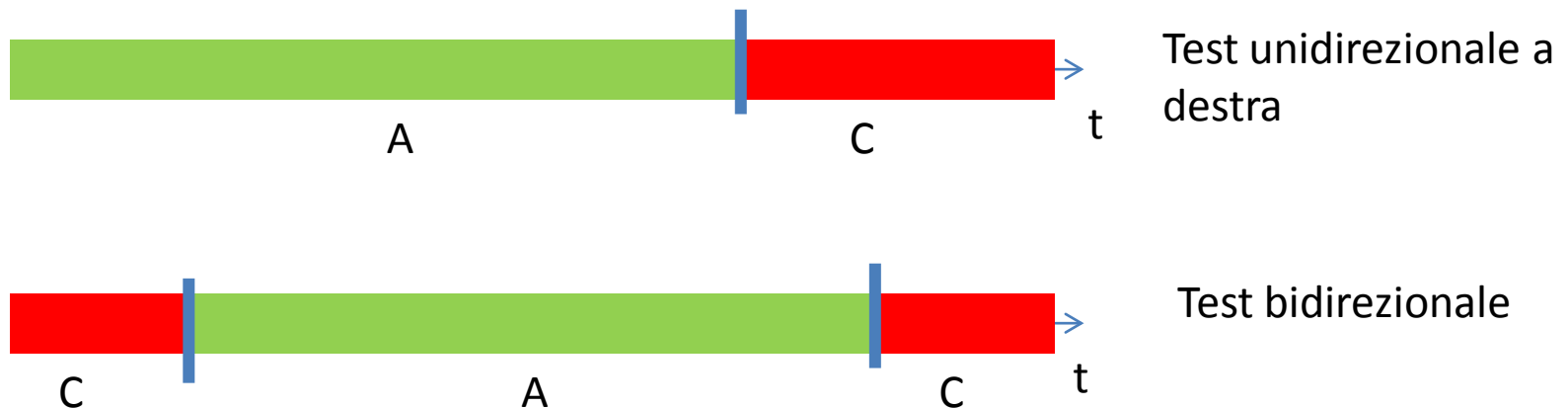
Poiché il valore campionario di un test statistico varia da campione a campione, il test statistico costituisce una variabile casuale che può assumere valori compresi in un insieme che costituisce lo **SPAZIO CAMPIONARIO** del test, secondo una particolare distribuzione di probabilità che è la **DISTRIBUZIONE CAMPIONARIA** del test.

La regione critica

Un test statistico dà quindi luogo alla ripartizione dello spazio campionario in due sottoinsiemi complementari: un insieme A costituito dai valori del test che sono compatibili con l'ipotesi nulla H_0 , e un insieme C che raggruppa i valori del test considerati incompatibili con H_0 .

Quest'ultimo insieme è costituito dai valori del test che portano al **RIFIUTO DI H_0** e viene definito la **REGIONE CRITICA** del test.

Quando il valore campionario di t cade nella regione critica, l'evidenza empirica del fenomeno studiato porta a ritenere che l'ipotesi H_0 non possa essere considerata valida, e quindi che non possa essere accettata come vera.



L'errore

Indipendentemente dalla regola adottata, il test porta sempre a dover scegliere tra due possibili decisioni, H_0 e H_1 e a poter commettere due possibili errori, rifiutare un'ipotesi vera oppure accettare un'ipotesi falsa.

Quindi, la decisione deve considerare l'importanza relativa dei due diversi tipi di errore o, nell'ottica della Teoria delle decisioni, le diverse funzioni di perdita.

Ipotizzando vera H_0 , la regione critica associata (cioè la probabilità di rifiutare H_0) viene definita **LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA'** del test e indicata con α .

Accettare o rifiutare H_0 non può e non deve essere inteso come una dimostrazione della verità o meno di H_0 (altre ipotesi, diverse da H_0 , avrebbero potuto essere accettate o rifiutate sulla base dello stesso campione) ma solo come una conclusione che l'evidenza empirica è favorevole o meno all'ipotesi nulla.

L'errore del test

Situazione vera

		Situazione vera	
		H_0	H_1
Decisione	H_0		Accetto H_0 quando è falsa ERRORE DI II TIPO β
	H_1	Rifiuto H_0 quando è vera ERRORE DI I TIPO α	

TEST E REGOLE DI DECISIONE

- Θ : insieme dei possibili valori di θ (Θ_0 è l'insieme dei valori sotto H_0 ; Θ_1 è l'insieme dei valori sotto H_1)
- $t(x)$: Valore campionario del test
- C : Insieme dei valori campionari del test $t(X)$ che portano a rifiutare H_0
- A : Insieme dei valori campionari del test $t(X)$ che portano ad accettare H_0

Errore di I tipo: $t(x) \in C \mid \theta \in \Theta_0$ $P(\text{Errore di I tipo}) = P[t(x) \in C \mid \theta \in \Theta_0] = \alpha$

Rifiuto H_0 vera

Errore di II tipo: $t(x) \in A \mid \theta \in \Theta_1$ $P(\text{Errore di II tipo}) = P[t(x) \in A \mid \theta \in \Theta_1] = \beta$

Accetto H_0 falsa

Potenza del test: $t(x) \in C \mid \theta \in \Theta_1$ $P[t(x) \in C \mid \theta \in \Theta_1] = 1 - \beta$