

MODULO 1 – I NUMERI NATURALI

Questo modulo si articola in due sottomoduli:

- Sottomodulo 1/1: Numeri naturali e operazioni di addizione e sottrazione.
- Sottomodulo 1/2: Numeri naturali: moltiplicazione e divisione.

Ad esso saranno dedicati 3 lezioni (pari a 6 ore complessive).

Con il suo studio si intende fornire agli studenti un supporto didattico (materiale vario e suggerimenti opportuni) utile ad organizzare il loro lavoro per far conseguire ai loro futuri alunni della scuola dell'infanzia alcuni traguardi per lo sviluppo di specifiche competenze e guidare i loro futuri alunni di scuola primaria al conseguimento dei seguenti obiettivi:

Entro la classe III:

- Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre, ...
- Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta.
- Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo.
- Conoscere con sicurezza le tabelline della moltiplicazione dei numeri fino a 10. Eseguire le operazioni con i numeri naturali con gli algoritmi scritti usuali.
- Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali (*si deve intendere: numeri scritti in notazione decimale posizionale, da non confondere coi numeri con la virgola. N.d.C.*), rappresentarli sulla retta ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure.

Entro la classe V:

- Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali (*ossia: scritti in notazione decimale*).
- Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni.
- Eseguire la divisione con resto fra numeri naturali; individuare multipli e divisori di un numero.
- Stimare il risultato di una operazione.
- Interpretare i numeri interi negativi in contesti concreti.
- Conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra.

MODULO 1/1
- NUMERI NATURALI E OPERAZIONI DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE -
(Supporto didattico)

1. Uno dei primi problemi con cui un insegnante di scuola primaria deve misurarsi è di far acquisire ai suoi allievi, entro il primo anno, la seguente *abilità*:

**Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale,
avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e
ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta.**

connessa alle seguenti *conoscenze*:

**I NUMERI NATURALI NEI LORO ASPETTI ORDINALI E CARDINALI.
CONCETTO DI MAGGIORE, MINORE, UGUALE.**

È opportuno procedere in due fasi successive:

- la prima, da “zero” a “nove”,
- la seconda, da “dieci” a “novantanove”.

Prerequisito utile, ma non indispensabile, è che i bambini sappiano, anche in misura minima, “leggere e scrivere in lingua italiana”.

2. Primo obiettivo è che i bambini imparino i nomi dei numeri da “zero” a “nove” e, nello stesso tempo, ad avere una qualche consapevolezza della “quantità” che ciascuno di essi esprime. A rappresentarli poi mediante i numerali ed a riconoscere i numerali stessi.

Nota Bene: è importante che fin da subito l’insegnante rimarchi la differenza fra “numero” (la quantità) e “numerale” (il simbolo) e vi insista ogni volta che ne ha l’occasione. Il fatto che poi nella pratica ci si serva quasi sempre dei numerali (al posto dei numeri) avviene per motivi di semplificazione. In ogni caso è bene, come peraltro suggeriscono le “Indicazioni Nazionali”, che gli alunni imparino a:

LEGGERE E SCRIVERE NUMERI NATURALI SIA IN CIFRE, SIA IN PAROLE.

Un suggerimento per questa delicata parte introduttiva dell’Aritmetica:

usare la teoria ingenua degli insiemi senza parlare di insiemi.

Insomma **SI SCONSIGLIA** di farne una sorta di studio preventivo, ovvero **EVITARE** di fare una “insiemistica” fine a se stessa.

Ecco allora un esempio di attività in classe, che utilizza proprio quella teoria, ma senza averla trattata preventivamente:¹

- I bambini, opportunamente istruiti dall’insegnante, portano a scuola delle scatole (di forma qualsiasi purché ci sia un’apposita apertura per infilarvi oggetti – vanno bene 30 scatole). Almeno una faccia di ogni scatola dovrebbe essere trasparente, in modo da poter vedere il contenuto delle scatole medesime, che all’inizio sono vuote.
- L’insegnante divide i bambini in tre gruppi ed assegna a ciascun gruppo 10 scatole.
- L’insegnante ordina a ciascuno dei tre gruppi di eseguire la seguente procedura:

¹ **ATTENZIONE: si tratta solo di un esempio che può ispirare qualche comportamento e non di un modello da seguire acriticamente.**

RIPETERE

Mettere da parte una scatola

Finché ci sono scatole, in ognuna delle scatole rimaste mettere un oggetto (qualunque cosa va bene: palline, sassolini, gomme, matite, ...)

FINE

(Questa parte del gioco finisce ovviamente quando è stata accantonata la 10^a scatola. Ad ogni gruppo servono almeno 45 oggetti).

- Altro comando dell'insegnante:

Disporre le scatole ordinandole in fila da quella che contiene meno oggetti a quella che ne contiene di più.

(I bambini quasi certamente si troveranno in difficoltà, soprattutto quando nella scatola ci sono “molti” oggetti ed è assai probabile che non riusciranno a venirne fuori.)

- L'insegnante, dopo averli fatti lavorare un po' anche senza profitto, suggerisce di tirar fuori tutti gli oggetti delle scatole e di ripetere il gioco, ma introduce una novità:

Ogni volta che si mette da parte una scatola, i bambini devono provare ad attaccarle un'etichetta sulla quale metteranno un “contrassegno” che li possa aiutare poi a capire quale scatola contiene meno oggetti e quale ne contiene di più.

Al momento di apporre le etichette sulle scatole man mano accantonate, è possibile che i tre gruppi scelgano segni diversi: vanno lasciati fare liberamente. Non è escluso che tra i bambini ve ne sia qualcuno che sappia già contare o addirittura che sappia usare i numerali: è bene lasciarlo fare. Ad ogni buon conto, se i bambini non sono in grado di mettere i contrassegni adatti, è opportuno un intervento dell'insegnante che li aiuti ad orientarsi. In particolare è fondamentale il suo suggerimento affinché sull'etichetta apposta sulla scatola vuota non siano messi contrassegni.

Qui sotto (fig. 1) è indicata una serie di ipotetici contrassegni a partire dalla scatola con un solo oggetto per finire con quella contenente 9 oggetti:

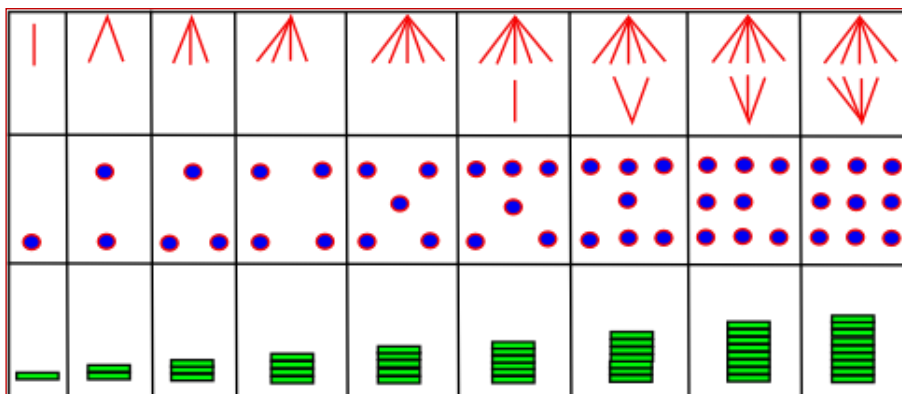


fig. 1

Sono possibili ovviamente altri contrassegni, magari operando variazioni su quelli indicati, come ad esempio: disegni di dita e mani invece di segmenti di retta, stelline o quadretti al posto dei pallini, dischetti di legno o altro materiale al posto dei regoli, eccetera.

- Si tratta, a questo punto, di dare dei nomi alle diverse quantità: è opportuna una discussione fra tutti gli allievi della classe, guidata sapientemente dall'insegnante (il quale eviterà di snobbare chi ha già qualche idea per averla acquisita alla scuola dell'infanzia o anche in famiglia). Finalmente, ovviamente con l'intervento decisivo del docente, si fissano i nomi:

zero, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove.

Questi nomi vanno scritti su altrettanti cartoncini apposti sotto le scatole corrispondenti (fig. 2). Se i bambini non sanno ancora scrivere, sarà l'insegnante ad aiutarli.

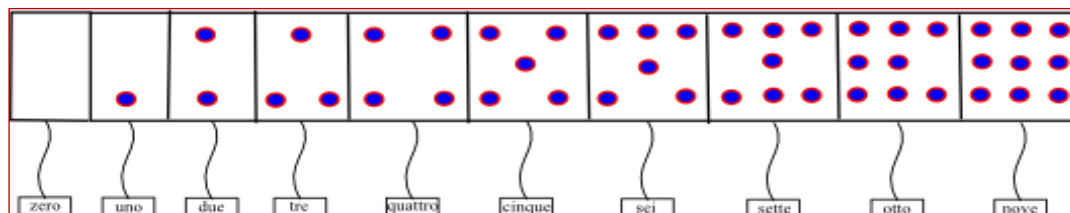


fig. 2

- La scelta dei nomi da attribuire ai numeri è seguita subito dopo da quella dei “numerali”, vale a dire dei simboli idonei a rappresentarli. È bene che in un primo momento siano gli alunni ad inventare questi simboli, guidati dalla loro fantasia. S'intende che si tratterà quasi certamente di simboli non coincidenti con i simboli indo-arabi di uso comune. Meglio così.
- I simboli scelti per rappresentare i numeri sono scritti alla lavagna. Dopodiché l'insegnante (previo accordi con il collega) chiama qualche alunno di una classe successiva alla prima (il quale conosce già la numerazione indo-araba) e gli chiede se sa spiegare il significato dei simboli scritti alla lavagna.

Naturalmente questo bambino “estraneo” in generale potrà trovarsi in difficoltà. L'insegnante ne approfitta per far capire ai bambini della classe che un sistema di simboli, che sia loro patrimonio esclusivo, fa sorgere dei problemi nella comunicazione. Come ovviarvi? Naturalmente con l'uso di un sistema “codificato”, appunto il sistema dei simboli indo-arabi:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Questi simboli sono riportati su altrettanti cartoncini posti al di sotto dei rispettivi cartoncini dove in precedenza erano stati scritti i numeri (fig. 3).

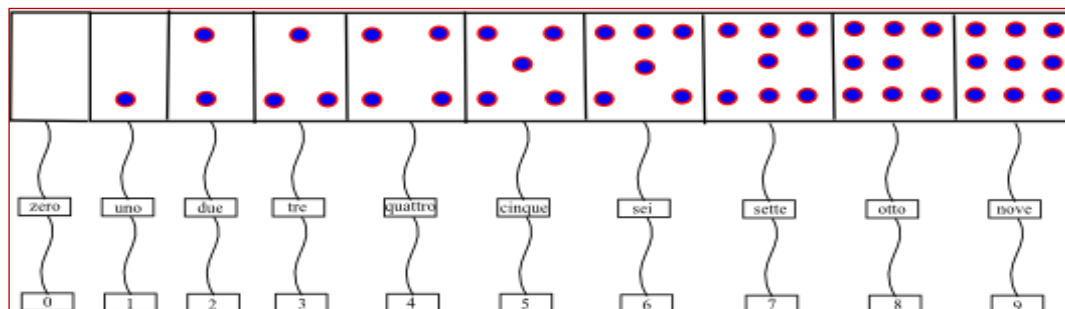


fig. 3

- Può essere l'occasione per un breve cenno, magari sotto forma di racconto, sulla storia di questi simboli, giusto per capire la ragione per la quale si chiamano “cifre indo-arabe”, anche

se quelli oggi in uso sono completamente diversi da quelli che venivano usati in origine. Furono gli Indiani a inventarli all'incirca 300-400 anni dopo Cristo; da essi li appresero gli Arabi nel secolo VIII e, da questi ultimi li apprese un matematico italiano – Leonardo Pisano, detto Fibonacci – il quale li introdusse in Europa nell'anno 1202, per mezzo di un'opera scritta da lui, dal titolo *Liber Abaci* (*Libro dell'Abaco*). Ma ci vollero circa 300 anni perché i nuovi simboli fossero accettati al posto di quelli che erano in uso e che costituivano la “numerazione romana”.²

Si precisa che l'aspetto storico sarà ripreso e approfondito nel secondo biennio (meglio ancora nella quinta classe) quando sarà sviluppato il seguente contenuto:

**ORIGINE E DIFFUSIONE DEI NUMERI INDO-ARABI,
SISTEMI DI SCRITTURA NON POSIZIONALI, LE CIFRE ROMANE.**

Correlato al seguente obiettivo:

**Conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso
in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra**

3. A questo punto, ragionando sui soli numeri da 0 a 9, si può insegnare ai bambini a confrontarli e ad ordinarli ed inoltre a sommarli.

- La rappresentazione di figura 3 in realtà fornisce già la possibilità sia di confrontare i numeri sia di ordinarli. È, infatti, piuttosto semplice far capire, per esempio, che “due è più piccolo di quattro” poiché la scatola che rappresenta “due” contiene meno oggetti di quelli contenuti nella scatola che rappresenta “quattro”. Allo stesso modo si può far capire che “quattro è più grande di due”.

Un altro piccolo passo consiste nello scrivere ciò mediante i simboli:

- “due è minore di quattro” si scrive: $2 < 4$;
- “quattro è maggiore di 2” si scrive: $4 > 2$.

Si può far notare ai bambini una curiosità al fine di far loro memorizzare il significato dei simboli “<” e “>”.

Il simbolo < tende ad allargarsi da sinistra a destra: si passa da una quantità più piccola ad una più grande.

Il simbolo > tende a restringersi da sinistra a destra: si passa da una quantità più grande ad una più piccola.

Per quanto riguarda la proprietà di “essere uguale”, in un primo momento si consiglia di soprassedere in quanto si potrebbero descrivere soltanto situazioni banali. È preferibile rimandare ad un momento successivo, quando, trattando ad esempio dell'addizione, si pone il problema di confrontare i numeri $2+3$ e $3+2$ con 5 e fra di loro, o simili situazioni.

- Una sorta di stilizzazione della rappresentazione di figura 3 fornisce poi il modo di rappresentare i numeri su una retta graduata, chiamata per l'appunto “**retta dei numeri**” (fig. 4), che non richiede molte spiegazioni. Ma ovviamente deve essere ben descritta agli alunni.

Tanto per dire, se serve si può disegnare sul pavimento dell'aula (o su un foglio affisso ad un parete) una grande “linea dei numeri” e utilizzarla all'occorrenza.

² Per saperne di più cfr.: A.Giambò – R.Giambò, *Matematica per la scuola superiore*, vol. 1, Roma, Armando scuola, 2009, modulo 1, unità 1, § 1.3.

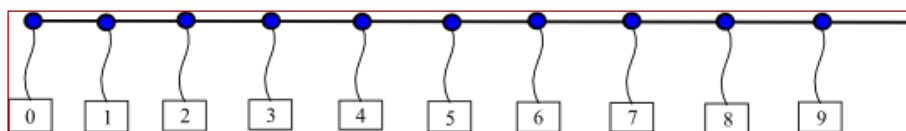


fig. 4

È un primo passo, piccolo piccolo se si vuole, verso forme di astrazione che diventeranno più consistenti man mano che si procederà nello studio della matematica.

Una volta che i bambini avranno imparato a rappresentare i numeri sulla retta, saranno sollecitati a leggerli in senso progressivo e in senso regressivo, per giungere in un secondo momento a “contare mentalmente nei due sensi”, anche per salti di 2 o 3 o

Questa attività ha, tra l'altro, la finalità di far comprendere l'aspetto “**ordinale**” dei numeri. Il concetto può essere meglio puntualizzato abituando i bambini a indicare in ordine dal “primo” al ... i giorni della settimana, i pioli di una scala, i gradini di un scalinata, eccetera.

La rappresentazione dei numeri sulla retta è utile anche per imparare ad addizionare e a sottrarre i numeri stessi.

Per la moltiplicazione e divisione saranno, invece, necessari procedure e accorgimenti diversi. Non per altro lo studio di queste operazioni è consigliabile differirlo alla classe II.

Si chiude in questo modo la prima fase di rappresentazione dei numeri.

4. La seconda fase consiste nella denominazione e rappresentazione dei numeri da 10 fino a 99. (E, poi, da 100 fino ... all'infinito).

Questo avverrà nel primo biennio (classi seconda o terza), quando è previsto dalle “Indicazioni Nazionali” che gli alunni devono acquisire la seguente *abilità*:

**RICONOSCERE NELLA SCRITTURA IN BASE 10 DEI NUMERI,
IL VALORE POSIZIONALE DELLE CIFRE,**

correlata alla *conoscenza*:

**RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI NATURALI IN BASE DIECI:
IL VALORE POSIZIONALE DELLE CIFRE.**

Per questa attività sono stati inventati materiali di vario genere, tra cui quello di Cuisenaire³-Gattegno⁴ va per la maggiore: si tratta di regoli di legno di diverso colore, della sezione di 1 cm², la cui lunghezza varia da 1 cm a 10 cm (fig. 5).

Il materiale di Cuisenaire-Gattegno, come d'altronde qualunque materiale strutturato (Montessori⁵, Dienes⁶, eccetera), è tra i più idonei per la didattica dell'aritmetica elementare. Tuttavia è bene fare molta attenzione a non farne un uso acritico, il che potrebbe essere fonte di notevoli ostacoli didattici⁷.

Tra tali materiali è possibile consultare sul web il cosiddetto “Contafacile” di Maria Pia Saitta⁸. Si tratta di un prodotto molto interessante e valido.

³ **Georges Cuisenaire**, matematico e pedagogista belga, 1891-1975.

⁴ **Caleb Gattegno**, matematico e psicologo inglese, 1911-1988.

⁵ **Maria Montessori**, medico ed educatrice, 1870-1952.

⁶ **Zoltan Dienes**, matematico e didatta ungherese, 1916-

⁷ si veda ad esempio [l'articolo](#) di S. Sbaragli et al, *Riflessioni sull'uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: i numeri in colore*, pubblicato su *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 31A, 5, 455-483.

⁸ <http://www.contafacile.com>

Ma, al fine di far capire ai bambini come si scrivano i numeri da 10 a 99, può essere utile, almeno a nostro modesto avviso, una specie di abaco “fatto in casa”.

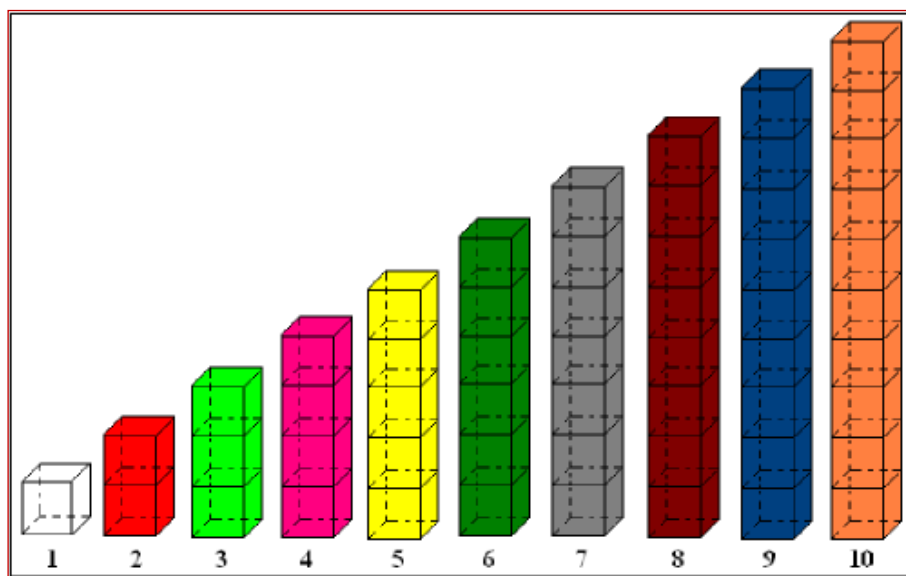


fig. 5

- Prima di passare ai numeri maggiori di 9 è opportuno, ma non indispensabile, una qualche attività che giustifichi tale necessità. Un'attività, cioè, che evidenzi l'inadeguatezza dei soli numeri da 0 a 9.

Un assist al riguardo è offerto dall'operazione di addizione.

È previsto nel corso della prima classe lo sviluppo del contenuto:

OPERAZIONI DI ADDIZIONE E DI SOTTRAZIONE FRA NUMERI NATURALI,

al fine di far acquisire agli alunni la seguente abilità:

COMPNDERE LE RELAZIONI TRA OPERAZIONI DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE.

A questo scopo può essere utilizzata la retta dei numeri.

Incominciamo con l'addizione.

Ad esempio, si vuole eseguire la somma $2+3$. Si parte allora dal punto che rappresenta il numero “2” e ci si sposta verso destra di 3 “passi”: si costata che si arriva al punto che rappresenta il numero “5” (fig. 6). Quindi $2+3$ è uguale a 5. In simboli: $2+3=5$.

Detto per inciso, si può utilizzare la “linea dei numeri” disegnata sul pavimento e far muovere su di essa effettivamente gli alunni, a partire dal punto “2”, di 3 passi verso destra (ovviamente ogni passo è lungo tanto quanto la distanza fra due numeri consecutivi) e chiedere all'alunno di indicare il posto in cui è arrivato e di rappresentare poi sul quaderno la situazione.

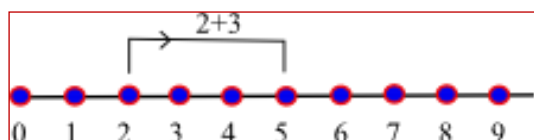


fig. 6

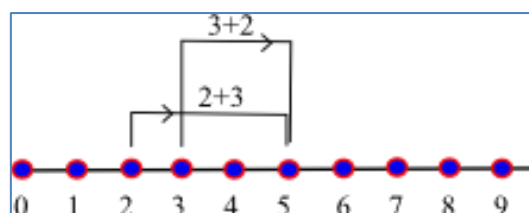


fig. 7

Si farà notare pure che partendo da 3 e spostandosi di 2 passi verso destra, si arriva ancora al numero 5 (fig. 7). Quindi: $2+3=3+2$.

Questa procedura funziona se il totale è un numero che non supera 9. Ma cosa succede in caso contrario?

La figura 8, che vorrebbe rappresentare il risultato di $4+7$, ci dice che **non c'è un punto che corrisponda al numero $4+7$** . E allora? Allora c'è bisogno di altri numeri.

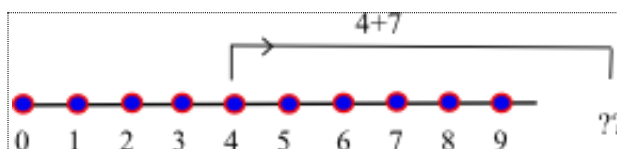


Fig. 8

- Vediamo dunque come si possano introdurre altri numeri ed altri simboli per rappresentarli.

Si incomincia ad incollare insieme due delle scatole già usate per la rappresentazione dei numeri da 0 a 9, in modo che poggino su una medesima base (fig. 9). Sulla faccia trasparente della scatola posta a sinistra di chi guarda si scrive la lettera “D”, su quella posta a destra la lettera “U”.

Oggetti di qualsiasi natura (per esempio, palline) possono essere messe nelle due scatole. Quando nella scatola (D o U) c'è un numero di palline compreso fra 0 e 9, sul supporto si scrive il corrispondente numero da 0 a 9.

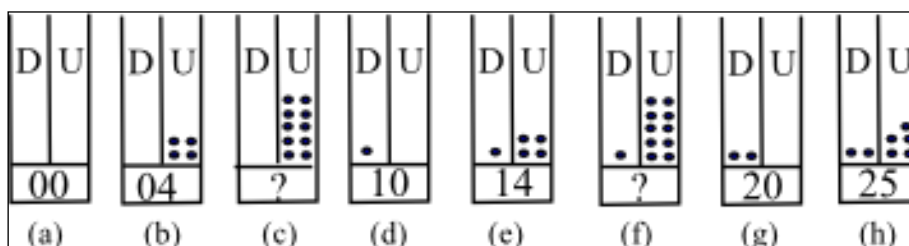


fig. 9

Cosicché, ad esempio:

- se in entrambe le scatole non ci sono palline (figura 9a) sul supporto si scrive “00”; 0 palline nella scatola “D” e 0 palline nella scatola “U”;
- se nella scatola “U” ci sono 4 palline e nella scatola “D” ce ne sono 0 (figura 9b), si scrive “04”.

In seguito si spiegherà ai bambini che lo “0” può essere omesso quando precede altre cifre. Per cui, al posto di “00” si può scrivere semplicemente “0” e al posto di “04” si può scrivere “4”.

Le cose si complicano quando nella scatola “U” ci sono più di 9 palline. Intanto è opportuno spiegare subito che se nella scatola ci sono 9 palline ed un'altra pallina, la quantità di palline presenti nella scatola è espressa da un nuovo numero che si denomina “dieci”.

Se, dunque, nella scatola “U” ci sono dieci palline (figura 9c), quale simbolo bisogna usare per indicare il nuovo numero?

È opportuno precisare che sarebbe effettivamente possibile introdurre un nuovo simbolo, ma i matematici hanno pensato di utilizzare quelli già introdotti. Per fare questo, però, hanno avuto bisogno di stabilire delle regole, come quando si gioca.

In particolare, una regola stabilisce che le dieci palline situate nella scatola “U” possono essere sostituite con una sola pallina situata nella scatola “D”: cioè una pallina situata nella scatola “D” o dieci alline situate nella scatola “U” sono la stessa cosa. Per cui la situazione di figura 9c è equivalente a quella di figura 9d. In questo caso il numerale che rappresenta la quantità “dieci” è espressa dal simbolo “10”: 1 pallina nella scatola “D” e 0 palline nella scatola “U”.

Si farà notare ai bambini che i numerali “01” e “10” sono ben diversi, dal momento che il primo indica che nella scatola “D” ci sono 0 palline e nella scatola “U” ce n’è 1, mentre il numerale 10 indica che nella scatola “D” c’è 1 pallina e nella scatola “U” ce ne sono 0.

Se si supera questo vero e proprio scoglio, la prosecuzione non è difficile: basta ripetere la procedura e, per esempio, ottenere il numero “quattordici” rappresentato dal numerale “14” (fig. 9e). Si capisce che i bambini sono chiamati ad imparare i nomi dei nuovi numeri introdotti:

dieci, undici, dodici, ...

Una nuova situazione critica si presenta allorché, dopo aver eliminato 10 palline dalla scatola “U” ed averle sostituite con 1 pallina nella scatola “D”, nella scatola “U” rimangono ancora 10 palline. In realtà questa criticità si supera facilmente se si è compreso il procedimento precedente, per cui è semplice spiegare che le situazioni rappresentate nelle figure 9f e 9g sono equivalenti. Anzi proprio i bambini dovrebbero essere chiamati a darne spiegazione. Il nuovo numero – “venti” – sarà rappresentato dal numerale “20”. In figura 9h è rappresentato il numero “25”

E così via fino a “99”.

Il passaggio successivo, oltre “100”, è bene rimandarlo di qualche tempo al fine di assimilare bene la procedura, ma al momento opportuno non dovrebbe presentare eccessive difficoltà. S’intende che, almeno per i numeri da 100 a 999, bisogna aggiungere una terza scatola, che, ormai si è capito, sarà denominata con la lettera “C” delle centinaia, essendo “D” la scatola delle “decine” ed “U” quella delle unità. Ma ad un certo punto, una volta compreso il valore posizionale delle cifre, si può procedere “per astrazione”, senza la necessità di ulteriore ricorso alle scatole.

È implicita in tutto questo discorso la possibilità di “allungare” la retta dei numeri. E questo implica a sua volta altre interessanti domande agli alunni. Come ad esempio, utilizzando idonee rette numeriche:

- Quali numeri mancano per andare dal posto “3” al posto “8”? Quanti sono questi numeri mancanti?
- Quali numeri occupano i posti dopo il posto “9”? Quanti ne devi contare per arrivare al posto “15”?

È necessario far acquisire agli alunni dimestichezza con la retta dei numeri. Per questo, una volta che hanno imparato a leggere e scrivere i numeri con più cifre (per esempio, con 2 cifre), si proporranno loro esercizi del tipo seguente.

Considera la seguente retta dei numeri:

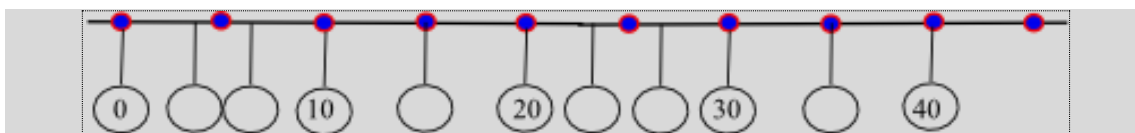


fig. 10

Figurano in essa 6 caselle vuote. In 4 di esse disponi i seguenti numeri: 15, 35, 4, 27.

5. Una considerazione, legata all'acquisizione della seguente conoscenza:

**SIGNIFICATO DEL NUMERO ZERO E DEL NUMERO UNO
E LORO COMPORTAMENTO NELLE QUATTRO OPERAZIONI**

il cui sviluppo è previsto entro il 3° anno.

Il docente avrà l'accortezza di trovare il momento più adatto per far comprendere ai suoi alunni il ruolo dello "0" rispetto all'addizione: "0" è quello che i matematici chiamano *elemento neutro* (o *indifferente*). Ciò perché, per ogni numero naturale n risulta: $n+0=0+n=n$.

Allo stesso modo, a suo tempo, si spiegherà che "1" è elemento neutro rispetto alla moltiplicazione, giacché per ogni naturale n risulta: $n \times 1 = 1 \times n = n$.

Attenzione! Mentre per un qualsiasi naturale n risulta $n-0=n$ ed $n:1=n$, non è vero che $0-n=n$ e $1:n=n$. Pertanto né 0 è elemento neutro per la sottrazione né 1 lo è per la divisione. D'altro canto, in realtà, non ha neppure senso parlare di ciò con riferimento all'insieme dei numeri naturali, dal momento che né la sottrazione né la divisione sono operazioni interne a tali insiemi, essendo ivi soltanto parzialmente definite.

Ovviamente le considerazioni che stiamo facendo in questo paragrafo 5 sono a beneficio del docente, che le utilizzerà in maniera oculata nell'insegnamento.

Osservazione. Le prime volte che saranno proposti esercizi di addizione e sottrazione di numeri è opportuno accompagnare la richiesta con disegni opportuni.

Per esempio:

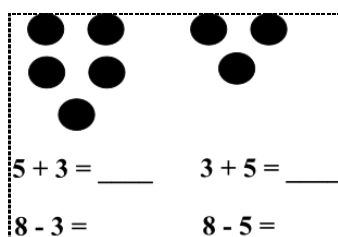


fig. 11

In seguito si faranno eseguire agli alunni addizioni e sottrazioni con numeri più "grossi" utilizzando il consueto modo di metterli in colonna e si capisce che gli alunni dovranno acquisire sicurezza nel calcolo. Tuttavia, quando si tratta di eseguire addizioni (o sottrazioni) "complicate" all'interno di un problema è consigliabile abituarli all'uso di una calcolatrice. Se lo scopo è quello di avviarli alla risoluzione di problemi, è inutile e dannoso disperdere le loro energie in un calcolo che può distrarli pericolosamente.

È però necessario abituare gli alunni a **stimare** preventivamente quale potrà essere il risultato, onde evitare che un eventuale errore di natura qualsiasi porti a risultati assurdi.

Un esempio, banale se si vuole ma istruttivo.

Si chiede di calcolare quanto spende complessivamente la massaia per acquistare della pasta che costa 1 euro, del prosciutto che costa 3 euro, della carne che costa 14 euro e del vino che costa 4 euro. Giacomo trova che il totale è 122 euro. Ovviamente non è credibile. Se Giacomo scrive accetta acriticamente il risultato, dimostra di non aver capito granché. Se invece riflette e stima che $1+3+14+4$ è all'incirca 20, capisce subito che il risultato da lui trovato è assurdo. Ma deve aver acquisito l'abitudine ad effettuare una stima, altrimenti non si inventa tutto d'un tratto il procedimento.

6. Una breve riflessione.

Le “Indicazioni Nazionali” prevedono dopo la classe terza (classe IV o V) l'acquisizione del contenuto:

ORDINAMENTO DEI NUMERI INTERI RELATIVI SULLA RETTA NUMERICA,

Si tratta di estendere ai numeri interi (sono ovviamente gli interi relativi) l'uso della retta graduata (o retta dei numeri).

7. Vedremo fra breve come si possono introdurre i numeri interi. Per il momento occupiamoci della sottrazione nell'insieme dei naturali. Lo faremo utilizzando ancora la retta dei numeri. È appena il caso di precisare che, all'inizio, nella prima classe, si opererà nell'insieme dei numeri da 0 a 9. In ogni caso, per prima cosa è opportuno preparare il terreno proponendo agli alunni la risoluzione di qualche questione preliminare, che a noi appare semplice ma che per bambini di 6 anni è estremamente complicata. Quindi bisogna andarci con molta cautela.

Si tratta comunque di proporre loro questioni di questo tipo:

- Di quanti passi devi spostarti verso sinistra per andare dal posto “9” al posto “7”?
- Quale numero va inserito nel segnaposto “□” affinché sia verificata l'uguaglianza?

$$2 + \square = 3, \quad 2 + \square = 2, \quad 3 + \square = 5, \text{ eccetera.}$$

Adesso, posto di aver superato questo scoglio, accompagnando magari l'argomento con situazioni tratte dalla vita di tutti i giorni (Es.: Ho 7 figurine, ne dò 2 a Marco. Quante figurine mi rimangono? Nelle prime battute è addirittura consigliabile uno scambio effettivo di figurine), si introduce la “differenza” di due numeri.

Attenzione! È noto a tutti che “dicesi differenza fra A e B, con $A \geq B$, il numero C tale che $B+C=A$ ”. Ma bisogna guardarsi bene dal dire questo ai bambini e soprattutto pretendere che siano loro a ripeterlo: magari sarebbero in grado di farlo per averlo imparato a memoria, ma non capirebbero nulla e sarebbero angosciati. Conviene operare su casi particolari.

Esempio:

Il numero che va inserito nel segnaposto perché sia $2+\square=3$, è il numero 1. Si chiama differenza fra 3 e 2 e si scrive: $3-2=1$, leggendo “3 meno 2 uguale 1”. E così si va avanti. Verrà il momento per una formalizzazione generale, ma non è detto che questo accada nella scuola primaria.

Altro esempio:

Ho 7 figurine. Ne do 2 a Marco. Me ne rimangono 5. Si dice che 5 è la differenza fra 7 e 2 e si scrive: $7-2=5$, leggendo “7 meno 2 uguale 5”.

A conclusione di tutta quest'attività gli alunni dovrebbero essere portati a comprendere un concetto fondamentale. Ad esempio:

Per trovare il risultato della sottrazione $12-7$

occorre cercare quale numero bisogna sommare a 7 per ottenere 12”.

8. Passiamo adesso ai numeri interi, ricordando che le “Indicazioni Nazionali” suggeriscono il seguente obiettivo, oltre a ciò che è stato segnalato sopra al riguardo:

Interpretare i numeri interi negativi in contesti concreti.

Quali siano i “contesti concreti”, e quindi “esterni” alla matematica, è noto a tutti (ad esempio: crediti e debiti), ma forse può essere utile anche il ricorso a situazioni problematiche “interne” alla matematica stessa. Ancora una volta la retta numerica può svolgere un ruolo importante.

Ad esempio, si incominciano a proporre agli alunni questioni come la seguente:

Quale numero va inserito nel segnaposto “□” affinché sia verificata l’uguaglianza?

$$4 + \square = 3, \quad 2 + \square = 1, \quad 3 + \square = 2, \text{ eccetera.}$$

Quasi certamente i bambini si troveranno in difficoltà poiché tale numero non c’è, non esiste fra i numeri che essi hanno imparato a conoscere, ed è probabile che saranno indotti a dare comunque una risposta, ovviamente sbagliata. Poco male.

Un altro esempio, non scollegato dal precedente:

Quale numero si ottiene eseguendo la sottrazione 3–5?

Stesso discorso.

L’insegnante propone allora di riprendere la retta numerica. Parto dal posto “3” e mi sposto verso sinistra di 5 posti. Dopo 3 passi arrivo al posto “0”, se proseguo ... precipito nel vuoto. Conclusione: con i numeri di cui dispongo non posso eseguire quella differenza; se lo voglio fare ho bisogno di altri numeri.

Per questo “allungo” la retta dei numeri verso sinistra (in realtà passo da una semiretta ad una retta) e riporto sulla parte sinistra i numeri da 1 in poi (fig. 12).

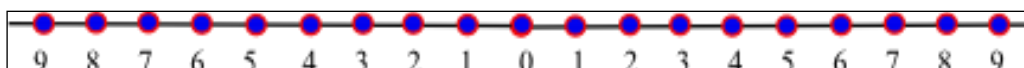


fig. 12

Si potrebbe allora dire che “la differenza 3–5 è il numero 2 che sta a sinistra di 0”. Dopo qualche altro esempio introduttivo, il docente deve essere bravo a far capire ai suoi alunni che dire ogni volta “il numero 2 (o il 3 o il 7) che sta a sinistra di 0” così come “il numero 2 che sta a destra di 0”, è poco pratico e finisce forse per creare un po’ di confusione. Allora è il caso di inventarsi qualche simbolo adatto per distinguere i numeri che si trovano a destra di 0 da quelli che si trovano a sinistra. Come possiamo fare? I bambini ne dovrebbero discutere senza pregiudizi o paure. Alla fine, se non ne viene fuori nulla, il docente suggerirà che si può convenire di scrivere i numeri facendoli precedere da un segno opportuno e spiegherà che la scelta che i matematici hanno fatto è di far precedere i numeri che stanno a destra di 0 da segno “+” e quelli che stanno a sinistra dal segno “-“. Si hanno così i numeri con segno, altrimenti detti **numeri interi relativi**. La loro rappresentazione sulla retta numerica è immediata (fig. 13). Il numero “0” non ha segno, per cui: $-0 = +0 = 0$.

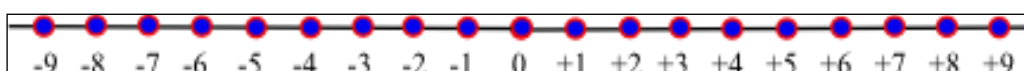


fig. 13

Sugli interi relativi non si richiede altro nella scuola primaria. Quindi **il docente eviti di proporre questioni che gli alunni non sarebbero ancora in grado di capire**. Al più, se proprio si presenta qualche situazione concreta, si limiti all'operazione di sottrarre un numero da uno più piccolo ma, si ribadisce, solo se si presenta qualche circostanza concreta (es. temperature, ascensori).

9. Laboratorio di matematica.

Abbiamo già segnalato nelle pagine precedenti attività varie che si possono considerare vere e proprie “attività di laboratorio”. Ne vogliamo suggerire qualche altra.

- Esempio 1. Esercizio che è possibile proporre anche in I classe, al più in II.

Scrivi tutti i modi possibili in cui si può ottenere il numero 7 come somma di due numeri.

Scrivi almeno due modi diversi di ottenere il numero 8 come differenza di due numeri.

Sono ovviamente possibili variazioni sul tema.

- Esempio 2. Un altro esercizio che è possibile proporre in I classe o al più in II.

Il giorno 22 dicembre è domenica. Che giorno del mese è la domenica successiva. Che giorno la domenica precedente?

Ovviamente i bambini saranno invitati a spiegare come hanno fatto a trovare la risposta (ammesso che l'abbiano trovata).

L'insegnante li farà discutere liberamente ed interverrà solo se chiamato in causa, ma si limiterà a fornire qualche suggerimento utile, senza aver fretta di dare la soluzione.

- Esempio 3. Un problema da risolvere (classe II).

Gianni possiede le seguenti monete: 1 euro, 1 euro, 1 euro, 2 euro, 2 euro. Vorrebbe acquistare un astuccio di pastelli a colori del costo di € 10. Bastano le monete che possiede o sono insufficienti? Se bastano, quanti euro gli avanzano? Se sono insufficienti, quanti euro gli mancano?

L'insegnante può proporre altri esercizi con variazioni sul tema (basta cambiare situazione e qualche dato). Meglio ricreare le condizioni per una rappresentazione reale della situazione.

Si capisce che i bambini saranno lasciati liberi di discutere fra loro e di proporre soluzioni (anche sbagliate). L'insegnante interverrà solo se chiamato in causa o alla fine della discussione per chiarire e puntualizzare.

- Esempio 4. Descriviamo adesso un'interessante attività che riguarda l'addizione, da proporre non prima della classe III, anche perché gli alunni devono avere dimestichezza pure con la moltiplicazione e la divisione.

Si chiede loro di calcolare la somma dei primi 10 numeri naturali a partire da 1, vale a dire la somma:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.$$

C'è da scommettere che tutti cercheranno di operare nel modo tradizionale: ad 1 sommo 2, al totale ottenuto (3) sommo 3, al nuovo totale (6) sommo 4, e così via fino alla fine.

Il docente può allora fare da guida per fare scoprire loro una modalità più rapida.

Si scrivono gli stessi numeri sotto i 10 numeri da sommare, ma dal più grande al più piccolo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Forse qualche alunno scoprirà da sé che le coppie di numeri in colonna hanno sempre come somma 11. Ma se nessuno ce la fa, l'insegnante darà qualche suggerimento al riguardo, avendo la pazienza di non anticipare la risposta, ma aspettando che i bambini discutano, facciano proposte e congetture, anche sbagliate. Ovviamente alla fine, se non ne viene fuori nulla, l'intervento risolutore del docente s'impone. Siccome le coppie suddette sono 10, la somma dei numeri delle due righe è 11×10 , cioè 110. D'altro canto questa somma è il doppio della somma dei numeri di una sola riga. Quindi la somma dei numeri di una riga è la metà di 110, cioè 55. Ci vuole più tempo a raccontarlo che a farlo.

Questa modalità di calcolo, che nel caso della somma dei primi 10 numeri a partire da 1 può apparire una sciccheria dei matematici, un virtuosismo inutile, si rivela invece molto efficace se si tratta di calcolare una somma più “lunga”, ad esempio quella dei primi 100 numeri a partire da 1.

Detto per inciso, pare che questa procedura di calcolo, proprio con riferimento alla somma dei primi 100 numeri naturali a partire da 1, sia stata eseguita per la prima volta, e su sua invenzione, da un bambino di 10 anni, un tedesco che diventò da grande uno dei matematici più importanti e celebrati: **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), definito il “re dei matematici” quand'era in vita.

Si capisce che il gioco si può estendere ad altre situazioni, tipo questa:

“calcolare la somma dei primi 10 numeri naturali pari a partire da 2”

oppure:

“calcolare la somma dei primi 20 numeri naturali dispari a partire da 1”.

La procedura è la stessa descritta prima.

- Esempio 5.

Esistono molti giochi che consentono ai bambini (magari dell'ultima classe, se non è possibile farlo prima) di affinare le loro abilità nelle operazioni di addizione e sottrazione e, nel medesimo tempo, sviluppare le loro capacità di ragionamento.

Uno di essi è di sottoporli al completamento di quadrati magici 3×3 .

Un quadrato magico siffatto è un quadrato suddiviso in 3×3 quadratini (fig. 14), nei quali bisogna inserire dei numeri in modo che la loro somma per righe, per diagonali e per colonne sia costante.

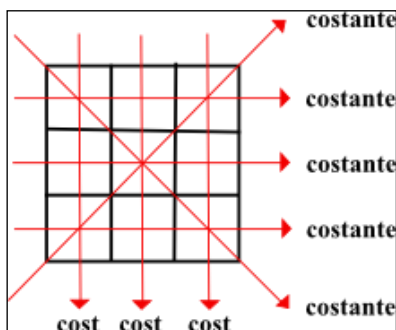


fig. 14

Ora, anche il semplice problema di inserire i numeri da 1 a 9 in modo da ottenere un quadrato magico può essere un'impresa insuperabile per bambini anche della classe quinta. Se però il quadrato non è incompleto del tutto ma solo parzialmente, allora non solo la cosa è

fattibilissima, ma i bambini si divertono perché lo prendono come un gioco che poi possono proporre a casa ai loro parenti e amici.

Ad esempio si può loro richiedere di completare il quadrato di figura 15 oppure quello di figura 16. Ovviamente, come sa ogni buon matematico, i dati assegnati sono sovrabbondanti, ma a questo livello non si può fare diversamente. Ciò comporta ovviamente una difficoltà: bisogna stare attenti a come si prendono tali dati, poiché potrebbero essere incompatibili ed allora il gioco non funzionerebbe. Oppure, ed anche questo si può fare, si possono mettere dati incompatibili e concludere che il quadrato non è “magico” (fig. 17).

2		
	5	
	3	8

fig. 15

	10	9
12		4
		11

fig. 16

5	10	9
13	?	4
6	7	11

fig. 17

• Esempio 6.

Un'altra attività utile ad affinare le abilità dei bambini con l'addizione e la sottrazione e, nello stesso tempo, le loro capacità logiche è il “gioco delle freccette” (II classe).

Contro il disco di figura 18, appoggiato ad una parete, si suppone di lanciare esattamente tre freccette. In quali settori devono cadere le freccette perché si ottenga somma 35?

Naturalmente i bambini procederanno per tentativi ed il docente li lascerà fare. Può darsi che qualcuno arrivi ad “una” soluzione. In ogni caso, dopo un tempo opportuno il docente interverrà con qualche suggerimento, anche per valutare se ci sono altre soluzioni.

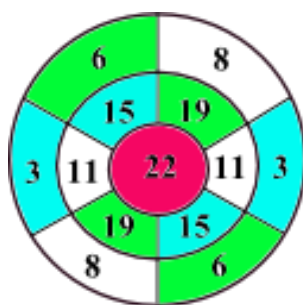


fig. 18

Un esempio di strategia: Cosa ne dite se proviamo a togliere da 35 il numero 22 e vedere cosa rimane? Bene facciamolo: rimane 13. Cosa bisogna fare a questo punto? Evidentemente vedere se ci sono due settori che danno per somma 13. Ci sono? No. Come continuare?

Proviamo a sottrarre da 35 il numero 19. Quanto rimane? Rimane 16. Cosa dobbiamo fare? Come prima, vedere se ci sono due settori che danno per somma 16. Ci sono e sono i settori 8 e 8. Dunque una soluzione c'è: una freccetta deve cadere in uno dei settori 19 e ciascuna delle altre due in uno dei settori 8 (anche nello stesso settore).

Ci sono altre soluzioni? Si prova con lo stesso metodo e si trova che altre soluzioni non ci sono. Si può continuare cambiando numero: 36 invece di 35 (ci sono più soluzioni). Oppure 61 invece di 35 (non ci sono soluzioni dal momento che $61 > 22 + 19 + 19$). E così via, magari cambiando i numeri inseriti nei vari settori.

