

MODULO 1/2

- NUMERI NATURALI: MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE - (Supporto didattico)

1. Una delle *abilità* che gli alunni devono conseguire **entro il terzo anno** è la seguente:

Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle.

Qui ci interessano le tabelle e qualche schema. In seguito ci occuperemo anche dei diagrammi.

Per prima cosa è opportuno soffermarsi sui concetti di **coppia** e **coppia ordinata**. Magari invitando gli alunni ad inventare insiemi formati da due elementi (indipendenti dall'ordine in cui sono presi) ed insiemi in cui è fondamentale tale ordine.

Si capisce che devono essere lasciati liberi di discutere, naturalmente sotto la guida consapevole del docente, il quale avrà l'accortezza di indirizzare la loro discussione.

Ora, di esempi di “coppie”, cioè di insiemi di due elementi in cui l'ordine non interessa, se ne possono costruire quanti se ne vuole, alla portata dei bambini. Forse è un po' più complicato portare esempi di “coppie ordinate”. Ne suggeriamo qualcuno alla loro portata, senza la pretesa di esaurire tutti i casi possibili:

- L'incontro di calcio “Inter-Juventus” e l'incontro “Juventus-Inter” indicano la stessa partita o ci sono delle differenze?
- Se lancio due volte un dado sulle cui facce sono rappresentati dei tondini (da un tondino a sei tondini), ammesso che nel primo lancio compaia la faccia “oo” e nel secondo la faccia “oooo”, è la stessa cosa se scrivo “oo,oooo” oppure “oooo,oo”?
- Se voglio eseguire la differenza fra due numeri, le due scritture “4-2” e “2-4” indicano lo stesso numero?
- Se voglio rappresentare una coppia in cui il secondo numero è il doppio del primo, considerare la coppia “4,8” è lo stesso che considerare la coppia “8,4”?

Una volta che si è assicurato che per gli alunni è chiaro il concetto di coppia ordinata, si pone la questione di rappresentarla simbolicamente. Anche adesso è opportuno ascoltare le proposte eventuali degli alunni. Alla fine però il docente chiarirà che i matematici da tempo hanno inventato un modo assai semplice di indicare una coppia ordinata.

Per esempio, riguardo alla coppia ordinata “Inter-Juventus” suggeriscono la scrittura **(Inter,Juventus)**.

Allo stesso modo, riguardo alla coppia ordinata “oo, oooo” scrivono **(oo, oooo)**, mentre riguardo alla coppia ordinata “gallina-uovo” scrivono **(gallina, uovo)**.

Ovviamente alcuni di questi esempi si possono portare solo se gli alunni sanno già scrivere e leggere. In caso contrario si porteranno esempi in cui le componenti della coppia possono essere disegnati magari con uno schizzo, come ad esempio la coppia (quadrato, tondino) che può essere rappresentata così: **(□, ○)**. Oppure **(☉, ☺)** per la coppia (faccetta scura, faccetta chiara).

2. A questo punto, ammesso che gli alunni sappiano scrivere e leggere le lettere (a,b,c, ...) e le cifre (1,2,3, ...), si possono proporre loro attività di questo tipo, con riferimento al piano quadrettato di figura 1:

- colloca un centesimo di Euro nella casella (3,b), vale a dire nella casella che si trova all'incrocio fra la riga “3” e la colonna “b”;
- come si indica la casella in cui è posta la monetina da 2 cent di Euro?

	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4				2	
5					

fig. 1

La modalità descritta è certamente utile, ma lo è ancora di più quando i due insiemi in cui sono prese le componenti di ogni coppia sono uguali (fig. 2). In questo caso si può far capire agli alunni come effettivamente siano diverse, ad esempio, le caselle (2,3) e (3,2). È opportuno far precedere l'attività da consegne di questo tipo:

- segna con una crocetta la casella (3,2), vale a dire la casella situata all'incrocio fra la riga "3" e la colonna "2";
- segna con una crocetta la casella (2,3), vale a dire la casella situata all'incrocio fra la riga "2" e la colonna "3".

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

fig. 2

3. L'utilità del piano quadrettato si può cogliere nella costruzione delle famose **TABELLINE**, che non sono solamente quelle della moltiplicazione, ma anche dell'addizione.

Ad esempio, per costruire la tabellina dell'addizione basta "allargare" quella di figura 2 in modo da poter coinvolgere i dieci numeri da 0 a 9 e proporre agli alunni di inserire nelle varie caselle le somme dei due numeri interessati. In figura 3 la tabellina dell'addizione è parzialmente compilata. Gli alunni potrebbero essere chiamati a completarla. Forse qualcuno di loro, opportunamente indirizzato dal docente, si accorgerà della "simmetria" rispetto alla "diagonale principale". Simmetria che porta con sé la "commutatività" dell'addizione.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	1	2								
2	2	3	4							
3	3	4	5	6						
4	4	5	6	7	8					
5	5	6	7	8	9	10				
6	6	7	8	9	10	11	12			
7	7	8	9	10	11	12	13	14		
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

fig. 3

La tabellina della moltiplicazione è parzialmente rappresentata in figura 4. Diversamente dalle tabelline prestampate sulle copertine dei quaderni, in questa tabellina è anche visualizzato il ruolo dello “0”. Anche adesso i bambini possono essere chiamati a completarla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	0	1								
2	0	2	4							
3	0	3	6	9						
4	0	4	8	12	16					
5	0	5	10	15	20	25				
6	0	6	12	18	24	30	36			
7	0	7	14	21	28	35	42	49		
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

fig. 4

Ebbene, proprio un esame attento delle due tabelline precedenti, ovviamente guidato con sagacia dal docente, può far scoprire agli alunni le note proprietà dell’addizione e della moltiplicazione. Ne segnaliamo alcune:

- “0” è elemento *neutro* per l’addizione; vale a dire che “0” sommato ad un qualsiasi numero non modifica il numero;
- “1” è elemento *neutro* per la moltiplicazione;
- “0” è elemento *assorbente* per la moltiplicazione; vale a dire che il prodotto di “0” per un qualsiasi numero è sempre “0”;
- la somma di due numeri entrambi pari o entrambi dispari è un numero pari;
- il prodotto di un qualunque numero per un numero pari è un numero pari;
- il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari.

A titolo di cronaca un numero si dice *pari* se termina per una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8. Altrimenti si dice *dispari*.

Ma tutto questo, compresa la memorizzazione della tabellina stessa della moltiplicazione, si farà dopo che i bambini avranno imparato la moltiplicazione sul piano concettuale.

Ragion per cui la domanda fondamentale è la seguente: *la tabellina della moltiplicazione si dà per scontata oppure se ne può fornire una spiegazione accessibile ai bambini?*

Si capisce che sul piano didattico è preferibile la seconda strada. Anzi è consigliabile un percorso che coinvolga i bambini in prima persona nella costruzione della tabellina. Ed è ciò che tentiamo di fare con la procedura che andiamo a descrivere, senza pretendere che essa sia l'unica possibile.

Prima di procedere con la tabellina della moltiplicazione, osserviamo che alcuni esperti di didattica della matematica consigliano anche l'uso di “tabelline della sottrazione” tra numeri naturali. In effetti riteniamo che tali tabelle debbano essere riservate ad operazioni “ovunque definite” negli insiemi che si considerano. E la sottrazione è un'operazione “parzialmente definita” nell'insieme dei naturali. Diverso è ovviamente il discorso se si considera la sottrazione nell'insieme degli interi relativi.

4. La tabellina della moltiplicazione, non ci sarebbe necessità di dirlo, coinvolge il prodotto di due numeri formati entrambi da una cifra. Benché nella tabellina mostrata sopra compaia anche lo “0”, bisogna dire che, dal punto di vista concettuale, la moltiplicazione di 0 per un numero è abbastanza facile da far capire agli alunni. Più difficile è la moltiplicazione di un numero per 0. Ma andiamo con ordine.

Si potrebbe dire subito agli alunni che “la moltiplicazione è un'addizione mascherata”, vale a dire un altro modo, un modo più sintetico di scrivere la somma di più numeri uguali, presentando ovviamente alcuni casi particolari:

$$2+2+2 = 2 \times 3, \quad 3+3+3 = 3 \times 2, \quad 4+4+4+4+4 = 4 \times 5, \quad \text{eccetera.}$$

E a partire da ciò invitarli a costruire la tabellina, magari proponendo all'inizio solamente una tabellina parziale come quella di figura 5.

x	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

fig. 5

Questa attività, di per sé piuttosto astratta, potrebbe ingenerare qualche difficoltà di comprensione. È preferibile farla precedere da attività preparatorie. Ne mostriamo una fra quelle possibili.

L'insegnante, il quale ha predisposto un apposito tabellone quadrettato (fig. 6) ed una serie adeguata di cartoncini di forma diversa (triangolare, rettangolare, circolare) e di colore diverso

(rosso, giallo, verde, azzurro), chiama alla lavagna un alunno, al quale consegna i cartoncini ed al quale affida il compito di mettere nei quadratini del tabellone i cartoncini giusti. Ne viene fuori la rappresentazione di figura 7, magari non subito e dopo qualche aggiustamento al quale partecipano tutti gli alunni della classe. Si capisce che a questo punto l'insegnante invita gli alunni a riprodurre sul loro quaderno la situazione raffigurata sul tabellone.

	rosso	giallo	verde	azzurro
△				
□				
○				

fig. 6

	rosso	giallo	verde	azzurro
△	△	△	△	△
□	□	□	□	□
○	○	○	○	○

fig. 7

La prima domanda da porre è la seguente:

Quanti cartoncini occorrono per completare il tabellone?

Quasi certamente i bambini saranno portati a contare quanti cartoncini ci sono nel tabellone. Ed è giusto e naturale che sia così.

L'insegnante può sperimentare altre situazioni, per consolidare la procedura. Con altri tabelloni o con lo stesso tabellone dopo aver nascosto una o più righe e/o una o più colonne.

Può continuare scambiando le righe con le colonne, ossia mettendo i colori nella prima colonna e le forme geometriche nella prima riga.

Ad un certo momento dovrà venire la seconda domanda:

*Per sapere quanti cartoncini occorrono per completare il tabellone
è proprio necessario mettere i cartoncini negli appositi riquadri?*

Dopo qualche discussione, guidata dall'insegnante, si dovrebbe giungere a questa conclusione:

*Per sapere quanti cartoncini servono a completare il tabellone
basta contare quanti riquadri esso contiene.*

Il docente guiderà a questo punto i bambini a formulare la seguente proposta (ad esempio, con riferimento al tabellone di figura 3 ed a quello che si ottiene con lo scambio righe-colonne):

I cartoncini che servono sono 4 volte 3 oppure 3 volte 4.

E questo fa dire che: $3 \times 4 = 12$ e anche $4 \times 3 = 12$. E analogamente per simili situazioni.

Non è semplice farlo capire completamente ai bambini, per questo ci vuole molta pazienza e costanza. È necessario non avere fretta e non fermarsi alla prima spiegazione. Occorre ritornarci sopra, ma non ripetendo le stesse cose e riproducendo le stesse situazioni, bensì creandone di nuove. Sperimentando altre vie, se proprio occorre.

Finalmente, quando l'insegnante lo riterrà opportuno, allora potrà presentare la moltiplicazione come una forma sintetica di addizione.

Non solo, ma potrà soffermarsi anche sulle proprietà dello 0 e dell'1.

In particolare spiegherà che $0+0+0=0 \times 3=0$ e analoghe situazioni. Mentre che sia $2 \times 0=0$ sarà accettato per far sì che, come negli altri casi, risulti soddisfatta la proprietà commutativa per cui $2 \times 0=0 \times 2=0$. E così pure per gli altri casi.

5. In un secondo momento, nella stessa classe II in cui sarà proposto quanto sopra esposto, o addirittura all'inizio della classe III, si procederà con la moltiplicazione dapprima di un numero di due o più cifre per un numero di una sola cifra e poi con la moltiplicazione di due numeri

qualunque. Non ci soffermiamo sulle tecniche di calcolo, che richiedono solo un po' di pazienza per farle comprendere e apprendere dagli alunni¹.

Forse però una qualche spiegazione di tali tecniche, **ad esclusivo beneficio del docente**, è opportuna.

Diciamo subito che le tecniche di calcolo del prodotto di due numeri naturali trovano la loro base logica fondamentalmente nei seguenti fatti: forma polinomiale di un numero, proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Vediamo allora qualche esempio.

$$\begin{aligned} 127 \times 4 &= (1 \text{ centinaio} + 2 \text{ decine} + 7 \text{ unità}) \times 4 = 4 \text{ centinaia} + 8 \text{ decine} + 28 \text{ unità} = \\ &= 4 \text{ centinaia} + 8 \text{ decine} + 2 \text{ decine} + 8 \text{ unità} = 4 \text{ centinaia} + 10 \text{ decine} + 8 \text{ unità} = \\ &= 4 \text{ centinaia} + 1 \text{ centinaio} + 0 \text{ decine} + 8 \text{ unità} = 5 \text{ centinaia} + 0 \text{ decine} + 8 \text{ unità} = 508. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 127 \times 25 &= (100 + 20 + 7) \times (20 + 5) = 2000 + 500 + 400 + 100 + 140 + 35 = \\ &= 2000 + 1000 + 100 + 40 + 30 + 5 = \\ &= 3000 + 100 + 70 + 5 = 3175. \end{aligned}$$

Vale quanto detto a proposito delle operazioni addizione e sottrazione circa la sicurezza nei calcoli e l'uso di una calcolatrice. Lo ripetiamo: gli alunni devono acquisire sicurezza nel calcolo, ma quando questo (specialmente se è complicato) è richiesto all'interno di un problema, l'uso di una calcolatrice è consigliabile. Queste considerazioni valgono anche per situazioni analoghe che si incontreranno in futuro. Non le ripeteremo più.

Può essere l'occasione per qualche annotazione di carattere storico.

Il procedimento di moltiplicazione di due numeri che eseguiamo al giorno d'oggi, se ci serviamo di carta e penna, si fa risalire a Luca Pacioli che ne parla nella *Summa* (1494).

Lo stesso Pacioli descrive però altri procedimenti di moltiplicazione ed uno di essi, che egli stesso definì **metodo a gelosia**, era in uso presso gli Arabi (IX sec.), i quali lo avevano ereditato dagli Indiani (V sec.). Il nome deriva dal fatto che i numeri che si moltiplicano sono disposti secondo uno schema che richiama quella parte di una finestra (detta appunto "gelosia") che impedisce a chi si trova all'esterno di essa di sbirciare all'interno.

La descrizione del procedimento a gelosia figura pure nell'*Aritmetica di Treviso* (1478), che è il primo testo di matematica a stampa di cui si ha conoscenza.

Ma andiamo a descrivere tale procedimento. Lo facciamo con riferimento al prodotto 135×47 .

Si predispose una graticola (o gelosia, per l'appunto), costituita da un rettangolo suddiviso in quadratini. Questi sono in numero di $a \times b$, dove a è il numero delle cifre del moltiplicando (nel nostro caso il moltiplicando è 135, per cui $a=3$) e b quello delle cifre del moltiplicatore (nel nostro caso il moltiplicatore è 47 e perciò $b=2$). Il moltiplicando, 135, è scritto al di sopra della gelosia in modo che ogni cifra sia collocata in corrispondenza di un quadratino a partire da sinistra; il moltiplicatore, 47, è posto a sinistra della gelosia in modo che ogni sua cifra sia collocata in corrispondenza di un quadratino a partire dal basso (fig. 8).

Si tracciano quindi tutte le possibili diagonali dei quadratini, che si sviluppano dall'alto a sinistra verso il basso a destra². Dopo di che si eseguono i prodotti di ciascuna delle cifre del

¹ Si vedano a titolo di esempio anche gli articoli di G. Arrigo, [Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico](#), e [Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico \(2\)](#), pubblicati sul *Bollettino dei docenti di Matematica* (Bellinzona).

moltiplicando per ognuna di quelle del moltiplicatore, separatamente l'uno dall'altro senza un ordine predefinito, e i risultati si riportano nel corrispondente quadratino a cavallo della diagonale, con l'accortezza di scrivere la cifra delle decine al di sotto della linea diagonale e quella delle unità al di sopra (fig. 9 – vi sono riportati i due prodotti $7 \times 1 = 07$ e $7 \times 5 = 35$).

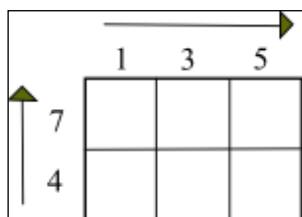


fig. 8

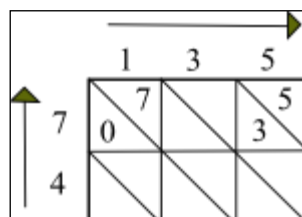


fig. 9

Una volta eseguiti tutti i prodotti e riportati i risultati negli appositi quadratini, si sommano, a partire dalla diagonale in alto a destra e proseguendo verso quella in basso a sinistra, i numeri contenuti in ognuna delle diagonali e la cifra delle unità del totale ottenuto si colloca all'esterno della gelosia (fig. 10) tenendo conto dei riporti.

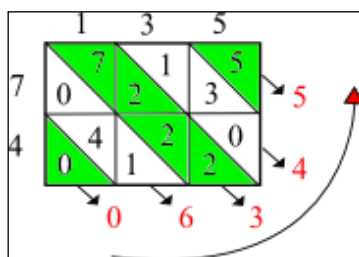


fig. 10

Così, ad esempio, a partire appunto dalla prima diagonale in alto a destra:

- $5=5$, scrivo **5** all'esterno;
- $1+3+0=4$, scrivo **4** all'esterno;
- $7+2+2+2=13$, scrivo **3** all'esterno e riporto 1;
- $(1)+0+4+1=6$, scrivo **6** all'esterno;
- $0=0$, scrivo **0** all'esterno.

Il risultato del prodotto cercato è costituito dal numero formato dalle cifre situate all'esterno della gelosia, lette da sinistra a destra e dal basso verso l'alto. Nel caso specifico tale prodotto è 06345, ovvero trascurando lo "0" iniziale: 6345. Pertanto: $135 \times 47 = 6345$. Cosa che può essere facilmente controllata eseguendo il calcolo con metodo conosciuto.

6. Una considerazione importante riguardo alla moltiplicazione, **a beneficio del docente**.

Quando almeno uno dei due fattori è 0 il prodotto è 0 e pertanto il suo valore non supera alcuno dei due fattori.

Quando uno dei due fattori è uguale ad 1 il prodotto è uguale all'altro fattore.

² Un'altra versione, con ovvie modifiche rispetto a quella che stiamo descrivendo, prevede uno sviluppo delle diagonali dal basso a sinistra verso l'alto a destra.

Quando entrambi i fattori sono maggiori di 1 il prodotto supera ciascuno di essi. Ora, questo fatto (dimenticando gli altri due) rischia di generare un misconcetto e precisamente **il misconcetto che sempre un prodotto supera ciascuno dei due fattori**.

Cosa che, seppure in via eccezionale non è vera nemmeno operando con i soli numeri naturali. Ma è evidentemente falsa quando si opera con le frazioni o con i numeri decimali.

Infatti, come ognuno sa, risulta ad esempio: $0,2 \times 3 = 0,6$, che pur essendo maggiore di 0,6 è certamente minore di 3. Oppure: $0,2 \times 0,3 = 0,06$ che è minore sia di 0,2 sia di 0,3.

Questo fatto, il fatto cioè che è falso che un prodotto è sempre maggiore di ciascuno dei due fattori, bisogna richiamarlo spesso, altrimenti gli alunni rischiano di far l'abitudine al concetto che moltiplicare significa ottenere qualcosa di più grande.

Aiutati in ciò, ad onor del vero, da locuzioni del linguaggio comune, che intendono la moltiplicazione proprio in tal senso: *si moltiplicano le possibilità che piova* è un'espressione che viene intesa nel linguaggio comune nel senso che tali possibilità tendono ad aumentare più o meno rapidamente.

Ora, con ciò, non si vuole certamente condannare il linguaggio comune, che ha le sue regole. Se ne deve però tener conto per evitare che nel linguaggio matematico si commettano errori. Ritorneremo sopra questo concetto.

Ancora una considerazione a proposito dell'uso della calcolatrice.

Inibire tale uso nell'epoca dell'informatica è quantomeno ridicolo. Bisogna però evitare di utilizzare la calcolatrice a sproposito. Ad esempio, se devo moltiplicare 4 per 7 non mi servo certamente della calcolatrice, ma devo operare a mente. Ugualmente, se devo moltiplicare 25 per 101, è opportuno che lo sappia fare a mente essendo il prodotto uguale a 25 per 100 più 25, vale a dire $2500 + 25$ ossia 2525. Insomma in molte situazioni va favorito il calcolo mentale, senza mortificarlo con un uso banale di uno strumento sofisticato. Sarebbe come sparare alle mosche col cannone. La calcolatrice però è opportuno usarla quando si vuole controllare l'esattezza di un calcolo complicato o addirittura per eseguire il calcolo medesimo. Fermo restando, ad ogni buon conto, che **gli alunni devono saper calcolare con carta e penna**.

Il calcolo mentale (rapido) è uno degli obiettivi da conseguire entro il 5° anno.

Qui vogliamo fornire qualche esempio che il docente utilizzerà al meglio, tralasciando i casi banali e conosciuti da tutti di moltiplicazione per 10, 100, 1000, ...

- Uno lo abbiamo già visto sopra: $25 \times 101 = 25 \times 100 + 25 = 2500 + 25 = 2525$. Detto a parole: per moltiplicare un numero per 101 si moltiplica il numero per 100 e si aggiunge il numero stesso al prodotto ottenuto. In modo analogo se si moltiplica per 11, 1001, 100001, ...
- Analogamente, più o meno: $14 \times 99 = 14 \times 100 - 14 = 1400 - 14 = 1386$. Detto a parole: per moltiplicare un numero per 99 si moltiplica il numero per 100 e si toglie il numero stesso dal prodotto ottenuto. Analogamente se si moltiplica per 9, 999, 9999, ...
- Per moltiplicare un numero per 50, se la calcola la metà e si moltiplica per 100. Esempio: $98 \times 50 = 49 \times 100 = 4900$. Analogamente se si moltiplica per 5, 500, 5000, ...
- Per moltiplicare un numero che termina con la cifra 5 per se stesso, basta moltiplicare il numero che si ottiene da quello dato tralasciando il 5, moltiplicarlo per il suo successivo e fare seguire da 25 il prodotto ottenuto. Esempi: $25 \times 25 = 625$, $85 \times 85 = 7225$.

7. Occupiamoci adesso della **divisione**. Operazione che costituisce un vero e proprio ostacolo nel processo di apprendimento degli alunni. E spesso, almeno per qualcuno, un ostacolo veramente insormontabile.

Si possono proporre agli alunni in via preliminare situazioni concrete le più disparate, come ad esempio le seguenti:

- Hai 15 caramelle e ne vuoi dare un numero uguale a ciascuno dei tuoi tre amici Luca, Maria e Piero: quante caramelle devi dare a ciascuno di loro?
- Il maestro vuole disporre in 4 file i 28 alunni della classe: quanti alunni ci vanno in ogni fila?

Per rispondere si può procedere per tentativi, come ad esempio, almeno per quanto concerne il primo caso, incominciare col dare una caramella a Luca e poi una a Maria ed una a Piero; quindi ricominciare daccapo dando ancora una caramella a Luca, una a Maria ed una a Piero; e così via finché non siano esaurite le 15 caramelle. A questo punto si dà la risposta, dopo aver contato quante caramelle hanno ricevuto i tre amici.

È bene fare questi esperimenti perché comunque qualcosa resterà negli alunni. Ma, detto in assoluta franchezza, sono poco più che palliativi. Prima o poi bisogna misurarsi con lo schema fondamentale che risolve la questione. E fortunatamente si tratta di uno schema che gli alunni dovrebbero aver incominciato a conoscere quando hanno affrontato lo studio della sottrazione.

Quale numero va inserito nel segnaposto “□” affinché sia verificata l’uguaglianza?

$$2 \times \square = 6, \quad 3 \times \square = 12, \quad \square \times 4 = 8, \text{ eccetera.}$$

Il numero da inserire è il risultato della divisione di 6 per 2 oppure di 12 per 3, oppure di 8 per 4, eccetera.

Altro ostacolo da superare: si dice che “3 è il risultato della divisione di 6 **per** 2”. Ora, la presenza di quel “per” è deleteria per molti bambini, se non per tutti, perché anche nella moltiplicazione c’è il “per” e così non ci si raccapezza. È allora opportuno che l’insegnante presti attenzione a questo fatto, cercando di dire almeno all’inizio che:

“se 3 è il numero che bisogna inserire nel quadratino affinché risulti $2 \times \square = 6$,
si dice che 3 è uguale a 6 diviso 2 e si scrive $3 = 6 : 2$ ”.

In seguito si potrà dire che “3 è uguale a 6 diviso per 2”, ma richiamando l’attenzione degli alunni su questo “per”, che è solo e semplicemente una preposizione semplice e nulla ha a che fare con il “per” della moltiplicazione. In realtà anche questo “per” è una preposizione semplice. Si dovrebbe dire infatti, ad esempio, “4 moltiplicato per 5”. Purtroppo il termine “moltiplicato” si sottintende quasi sempre e rimane soltanto “4 per 5”, che, detto così, sembra dare al “per” un significato particolare, che invece non ha.

8. Da tutta questa attività gli alunni dovrebbero acquisire un concetto fondamentale. Ad esempio, detto a parole:

Per trovare il risultato di $12 : 3$
bisogna cercare quale numero si deve moltiplicare per 3 per ottenere 12.

Solo se gli alunni diventano consapevoli di ciò possono rendersi conto del fatto che la divisione di un numero per 0 non è ammessa perché priva di significato.

Se infatti si vuole trovare il risultato di $3 : 0$ si tratta di cercare quale numero si deve moltiplicare per 0 per ottenere 3. Siccome qualunque numero moltiplicato per 0 dà come prodotto 0, nessun

numero moltiplicato per 0 dà 3 e quindi il risultato della divisione $3:0$ non esiste. (Si dice che il risultato dell'operazione è “impossibile”). E così accade tutte le volte che il dividendo è un numero diverso da 0.

Se invece si vuole trovare il risultato di $0:0$ si tratta di cercare quale numero moltiplicato per 0 dà 0 e ciò succede per ogni numero. Quindi qualsiasi numero va bene. (Si dice che il risultato di tale divisione è “indeterminato”).

Insomma quando si divide un numero per 0 o non si ottiene alcun numero o si ottiene un numero qualsiasi. In ogni caso l'operazione è priva di significato. Pertanto:

LA DIVISIONE PER 0 NON È AMMESSA.

9. All'occorrenza saranno proposte divisioni in cui il quoziente non è esatto e si pone allora il problema di

“trovare il numero più grande possibile da mettere nel segnaposto
in modo che, ad esempio, $3 \times \square$ non superi 14”.

Questo numero è ovviamente il quoziente della divisione di 14 per 3 e la differenza tra 14 ed il prodotto di 3 per il numero trovato è il resto della divisione³.

Nel caso specifico: 14 diviso 3 dà quoziente 4 e resto 2.

Sulla tecnica di calcolo per dividere un numero per un altro, con o senza resto, ci limitiamo a ripetere quanto detto a proposito della moltiplicazione, con l'aggiunta che adesso le cose si complicano un bel po' e perciò il tasso di pazienza da parte del docente deve aumentare in proporzione.

L'argomento sarà ovviamente ripreso e approfondito (con la cosiddetta continuazione della divisione) quando si vorrà passare da un numero frazionario ad un numero decimale.

Appena possibile, per indicare che la divisione di 14 per 3 dà quoziente 4 e resto 2, bisogna abituare gli alunni a scrivere la seguente uguaglianza:

$$14 = 3 \times 4 + 2.$$

Ugualmente, quando si effettua la divisione $16.789:128$, una volta trovato che il quoziente è 131 ed il resto è 21, bisogna abituare gli alunni a scrivere:

$$16.789 = 128 \times 131 + 21$$

10. Una delle tecniche di divisione di due numeri naturali è la **divisione canadese**. Si tratta di una sorta di sottrazioni successive al fine di “svuotare” il dividendo fino a renderlo più piccolo del divisore.. Precisamente, il quoziente della divisione di A per B è uguale al massimo numero di volte in cui B si può sottrarre da A.

Ad esempio, per calcolare $127:25$, si opera nel modo qui appresso descritto sinteticamente:

$$\begin{array}{ll} 127 - 25 = 102 & (1^a \text{ sottrazione - si prosegue poiché } 102 > 25), \\ 102 - 25 = 77 & (2^a \text{ sottrazione - si prosegue poiché } 77 > 25), \\ 77 - 25 = 52 & (3^a \text{ sottrazione - si prosegue poiché } 52 > 25), \\ 52 - 25 = 27 & (4^a \text{ sottrazione - si prosegue poiché } 27 > 25), \end{array}$$

³ È bene osservare che questa divisione fornisce *due* numeri come risultato (appunto, quoziente e resto), a differenza di quella “esatta”. Ovviamente quest'ultima può esser vista come caso particolare della divisione con quoziente e resto (nel caso in cui il resto sia nullo), ma questo aspetto concettuale, spesso sottovalutato, è motivo di insorgenza di ostacoli nell'apprendimento della divisione. Si veda ad esempio [l'articolo](#) di G. Arrigo e S. Sbaragli, *Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione*, pubblicato su *La matematica e la sua didattica*. 4, 479-520 (2008).

$27 - 25 = 2$ (5ª sottrazione – il processo di svuotamento ha fine poiché $2 < 25$).

È stato possibile eseguire 5 sottrazioni (o svuotamenti) ed è rimasto alla fine il numero 2. Pertanto: 5 è il quoziente di 127 per 25 e 2 è il resto della divisione.

Detto questo a beneficio del docente, se si vuole spiegare agli alunni il procedimento è opportuno partire da situazioni concrete, possibilmente rappresentate graficamente.

Un esempio, tanto per intenderci.

Fabio vuole distribuire equamente 17 confetti rossi fra sé ed i suoi tre amici Roberto, Lucia e Serena. Quanti confetti vanno a ciascuno? Ne rimangono dopo la distribuzione?

Sarebbe preferibile realizzare effettivamente la situazione, con Fabio (o chi per lui) che ha con sé in un sacchetto 17 confetti, che intende distribuire equamente fra sé e tre amici. In alternativa, la situazione medesima può essere rappresentata graficamente come nella figura 11.

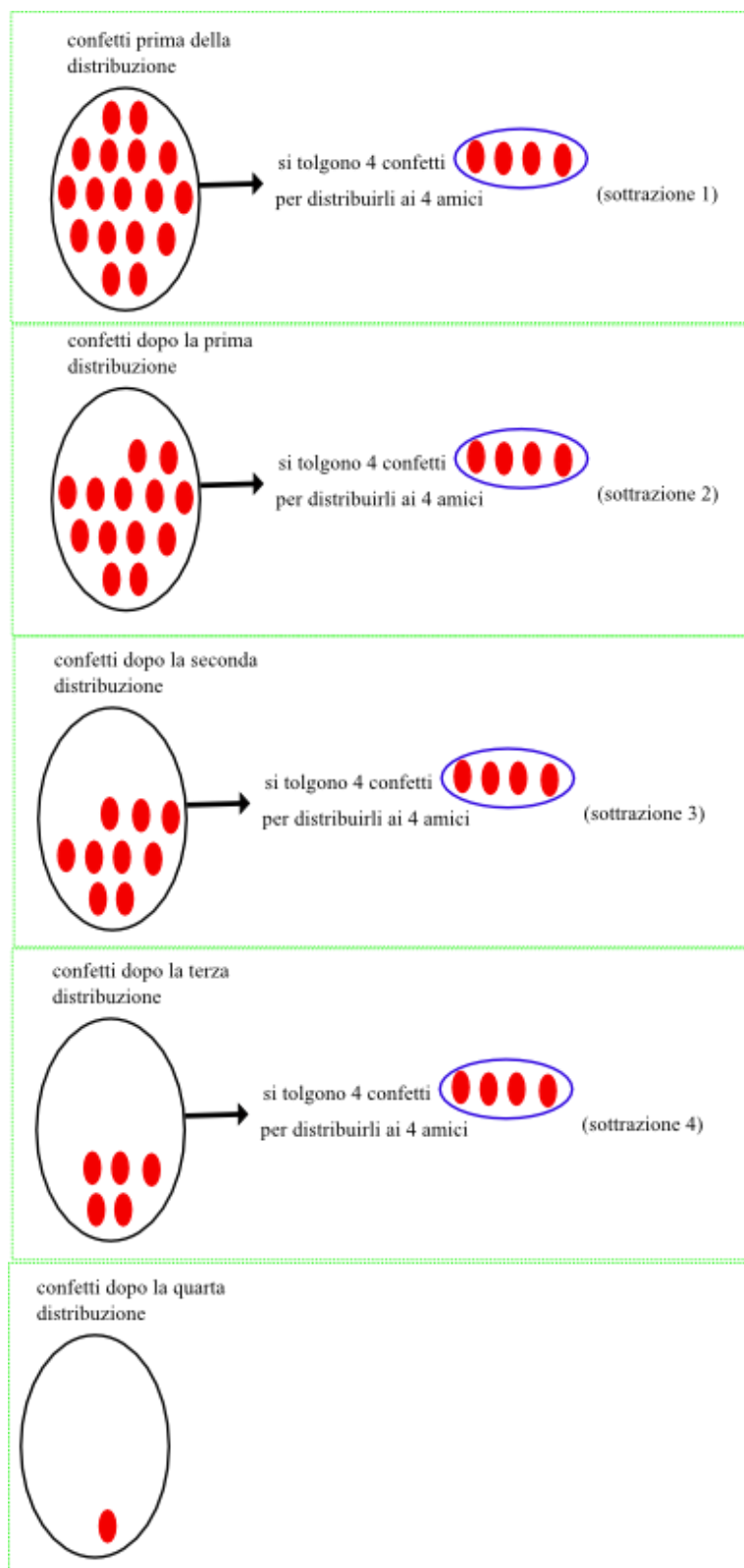


fig. 11

È stato possibile eseguire 4 sottrazioni ed è rimasto un solo confetto. Pertanto la divisione di 17 per 4 dà quoziente 4 e resto 1. Vale a dire: $17 = 4 \times 4 + 1$.

Un modo equivalente di eseguire la divisione canadese è di racchiudere dentro una linea chiusa i confetti che man mano si sottraggono, ma lasciandoli all'interno del “contenitore grande”. Saltiamo i passaggi intermedi per presentare la situazione finale che è rappresentata nella figura 9. Da essa si desume che ci sono 4 raggruppamenti (e quindi 4 sottrazioni di 4 confetti ogni volta), mentre un solo confetto rimane escluso dalla distribuzione. Come sopra ovviamente.

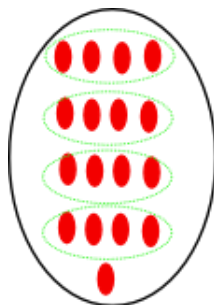


fig. 9

Si capisce che la tecnica di divisione canadese può costituire, se si vuole, uno degli esperimenti preliminari per introdurre e spiegare la divisione. Di più: l'esperimento può essere condotto concretamente con confetti reali e non disegnati oppure, se i confetti non ci sono, con figurine, caramelle, francobolli, o quanto è disponibile.

Ad ogni modo, qualsiasi diavoleria possa essere inventata, alla fine si ritorna al punto cruciale:

Per dividere in numero A per il numero B occorre trovare il massimo numero Q tale che $A \leq BQ$.

Ora, lo schema dell'algoritmo della divisione, nel caso in cui A non abbia più di 2 cifre e B e Q siano minori di 10, è semplice. Per esempio:

$$\begin{array}{r} 23 \\ (4 \times 5 =) 20 \\ \hline (23 - 20 =) 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ \hline \end{array} \quad \text{oppure, operando a mente} \quad \begin{array}{r} 23 \\ 3 \\ \hline 4 \\ 5 \end{array}$$

Nei casi più complicati intervengono difficoltà note a tutti i docenti, che solo la pazienza e l'esercizio possono contribuire a superare. Ma non ci sono certezze sull'esito.

Insomma, l'algoritmo della divisione è di difficile comprensione per i bambini della scuola primaria, qualunque strategia si possa inventare. Chi dice il contrario mente. Di ciò il docente deve tener conto assolutamente per evitare di aggredire i bambini quando inevitabilmente commettono degli errori.

11. Uno degli obiettivi di apprendimento al termine della quinta classe è: individuare multipli e divisori di un numero.

- Riguardo ai multipli di un numero (che peraltro sono utilizzati nell'operazione di divisione nel tentativo di trovare il quoziente) non ci dovrebbero essere molti problemi: sono i numeri che si ottengono moltiplicando il numero per i vari numeri naturali. Per esempio, se il numero assegnato è 3, i suoi multipli sono:

$$3 \times 0 = 0, 3 \times 1 = 3, 3 \times 2 = 6, 3 \times 3 = 9, \dots, 3 \times 10 = 30, \dots, 3 \times 25 = 75, \dots$$

Quanti sono? Evidentemente tanti quanti sono i numeri naturali.

- Qualche difficoltà potrebbe intervenire nella ricerca dei divisori di un numero. Mentre i multipli sono infiniti, questi sono sempre e comunque in numero finito, almeno uguale a 2. Infatti il numero 1 ed il numero che si prende in considerazione sono certamente divisori di tale numero.

I divisori di un numero, diversi dal numero, si dicono **divisori propri**.

Per esempio:

- considerato il numero 7, i numeri 1 e 7 sono suoi divisori;
- considerato il numero 12, i numeri 1 e 12 sono suoi divisori.

Però, mentre 7 non ha altri divisori, oltre ad 1 e 7, il numero 12 ammette i seguenti altri divisori: 2, 3, 4, 6.

Inoltre, mentre 7 ha solo 1 come divisore proprio, i divisori propri di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6.

Quando un numero non ha altri divisori propri, oltre ad 1, si dice *numero primo*. (È come dire che il numero è divisibile soltanto per 1 e per se stesso). Altrimenti si dice *numero composto*.

I numeri 0 ed 1 non sono né primi, né composti.

Si pone ovviamente un problema: **come si trovano tutti i divisori di un dato numero?**

Il modo più rudimentale è quello di dividere il numero per tutti gli altri numeri minori di esso a partire da 2: ogni volta che il resto della divisione è 0, il quoziente è un divisore del numero.

Si capisce che questo procedimento è dispendioso, soprattutto se si ha a che fare con numeri “grossi”. Ma, volendosi fermare ai numeri “piccoli” (per esempio fino a 20), il procedimento può andare bene.

Gli alunni, pertanto, possono essere invitati a compilare una tabella come la seguente. Operazione che potranno fare in collaborazione dividendosi i compiti.

Tabella dei divisori

Numero	Divisori
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Si possono fare loro alcune domande:

- Quale, tra tali numeri, ha più divisori? Quanti sono i divisori propri di tale numero?
- Quanti sono i numeri primi e quali sono?
- Quanti sono i numeri composti e quali sono?

12. Laboratorio di matematica. L'attività proposta con la distribuzione dei confetti da parte di Fabio è già "laboratorio di matematica". Come lo era quella utilizzata per spiegare come funziona la divisione canadese o quella relativa alla ricerca dei divisori di un numero. Adesso proponiamo altre attività, utili ad affinare l'abilità dei bambini nell'eseguire le quattro operazioni con i numeri naturali ma anche nel capire quando bisogna eseguirle.

• Esempio 1.

Il maestro mostra ai bambini un disegno in cui sono raffigurati e raggruppati convenientemente diversi animali da cortile e propone loro di *calcolare quante zampe si contano*. Li lascia liberi di discutere e di fare proposte, guidandoli però verso la costruzione di un'opportuna tabella che sintetizzi la situazione osservata (si veda, ad esempio, la tabella sottostante).

Tab. 1 – Animali da cortile

<i>Animale</i>	<i>Numero delle zampe di un animale</i>	<i>Numero di animali</i>	<i>Totale zampe</i>
Gallina			
Coniglio			
Gatto			
Papera			
Totale			

• Esempio 2.

Mario ha 25 figurine e vorrebbe darne 6 a ciascuno di 4 amici. Bastano le figurine o non sono sufficienti? Se bastano, ne avanza qualcuna? Se non sono sufficienti quante ne mancano?

L'insegnante può proporre altri esercizi con variazioni sul tema (basta cambiare situazione e qualche dato)

Si capisce che i bambini saranno lasciati liberi di discutere fra loro e di proporre soluzioni (anche sbagliate). L'insegnante interverrà solo se chiamato in causa o alla fine della discussione per chiarire e puntualizzare. Meglio a partire da un contesto significativo, eventualmente anche di fantasia.

• Esempio 3.

Un numero naturale si dice perfetto se uguaglia la somma dei suoi divisori propri. Trovare se vi sono numeri perfetti fra i numeri naturali compresi fra 1 e 30, estremi inclusi.

Per esempio, i divisori propri di 8 sono 1, 2, 4, la cui somma è 7. Dunque 8 non è un numero perfetto.

Per affrontare la questione è preferibile suddividere la classe in gruppi assegnando a ciascun gruppo di indagare solamente su alcuni numeri. Poi all'interno di ogni gruppo è possibile un'ulteriore suddivisione. A ricerca compiuta, si trovano due soli numeri perfetti: 6 e 28. Si constata infatti che i divisori propri di 6 sono 1, 2, 3 e che $6=1+2+3$. Analogamente i divisori propri di 28 sono 1, 2, 4, 7, 14 e si ha: $28=1+2+4+7+14$.

A beneficio dell'insegnante: gli antichi greci conoscevano, oltre a **6** e **28**, altri due numeri perfetti: **496**, **8128**. Alla data del 12 aprile 2009 erano conosciuti 47 numeri perfetti: il più grande, scoperto però il 23 agosto 2008, è formato da quasi 26 milioni di cifre nell'usuale sistema di numerazione decimale posizionale. Per avere un'idea di ciò che questo significhi, si immagini che ogni cifra occupi una lunghezza di 2 mm: ebbene, il numero coprirebbe una lunghezza di circa 52 km.

Si può trarre spunto da questo problema per proporre agli alunni di ripartire un certo insieme di numeri (per esempio quelli compresi fra 1 e 30) in vari modi. Per esempio:

- Numeri pari e numeri dispari;
- Numeri divisibili per 3 e numeri non divisibili per 3;
- Numeri primi e numeri composti (e ... attenzione ai numeri 0 ed 1);
- Eccetera.

• Esempio 4.

L'insegnante propone agli alunni di seguirlo nel seguente gioco, dopo che ciascuno di loro è pronto a scrivere su un foglio di quaderno bianco.

- a) *Pensa un numero qualunque, quello che ti viene in mente, e scrivilo.*
- b) *Moltiplicalo per 2 e scrivi il prodotto che hai trovato.*
- c) *Somma 4 al prodotto che hai ottenuto e calcola il totale.*
- d) *Dividi per 2 il totale che hai trovato e scrivi il quoziente.*
- e) *Sottrai a questo quoziente il numero che hai pensato all'inizio.*
- f) *Se avete fatto correttamente i calcoli, ognuno di voi ha ottenuto come risultato il numero 2.*

È assai probabile che i bambini rimangano sorpresi del fatto che l'insegnante abbia indovinato il numero e soprattutto che questo numero sia lo stesso per tutti anche se hanno pensato numeri diversi e probabilmente vorranno sapere come ha fatto. La spiegazione ovviamente c'è ed è sintetizzata nella seguente identità (dove x è il numero pensato), la quale mostra che il risultato è sempre e comunque la metà del numero k che l'insegnante ha suggerito di sommare e non dipende invece dal numero pensato dai bambini:

$$\frac{2x+k}{2} - x = \frac{k}{2}.$$

Ma si capisce che non può essere la spiegazione da dare agli alunni. L'insegnante può tentare qualcosa oppure dire chiaramente che la spiegazione c'è ma richiede competenze matematiche che al momento i bambini non hanno.