

LE FRAZIONI NELLA STRUTTURA MOLTIPLICATIVA, NODI CONCETTUALI ED OSTACOLI

Anna Paola Longo

Politecnico di Torino

Gruppo di ricerca Ma.P.Es (matematica pensiero esperienza)

Premessa

“E' ancora lecito, al giorno d'oggi, interessarsi alle frazioni?” così A.Gagatsis inizia la prefazione ad un saggio di Fandiño Pinilla (2005), alludendo alla difficoltà del tema sia nella scuola primaria che secondaria. Ma lo scopo dell'insegnamento delle frazioni, introdurre al numero razionale, è ineludibile, si tratta quindi di una domanda retorica.

La difficoltà delle frazioni è una sfida per l'insegnamento, e come tale esige di indagare su significati, rappresentazioni mentali e grafiche, collegamenti, metodo didattico e di studio.

Occorre trasformare gli errori in risorse didattiche. La ricerca sta ponendo in evidenza ostacoli epistemologici e didattici che gli insegnanti possono identificare attraverso l'osservazione di ciascun allievo. Ostacolo è un errore ricorrente basato su una conoscenza precedente. E' impossibile evitare errori di questo tipo, meglio usarli per fare avanzare la concettualizzazione di ciascuno! (Chamorro, 2003).

Llinares (2003) osserva che la difficoltà nell'insegnamento/apprendimento delle frazioni è legata essenzialmente a due fatti: 1) sono in rapporto con tipi differenti di situazioni 2) si possono rappresentare in varie maniere ($\frac{5}{7}$ frazioni; $\frac{3}{4}$ frazioni decimali; 0.75 espressioni decimali; 75% percentuali). Un lungo elenco di significati è presente in (Fandiño Pinilla, 2005), mentre in (Llinares, 2003) si trovano testi di problemi relativi ai significati più frequenti e la citazione di interessanti errori.

Per superare la difficoltà, occorre costruire itinerari “ragionevoli”, cioè che tengano conto di tutti i fattori, garantendo che il processo di apprendimento sia percorso da ciascuno in tutte le sue fasi e tenendo presente l'obiettivo finale e la continuità. Il successo formativo dipende in gran parte dal metodo didattico, di cui accenno solo qualche linea generale. Occorre partire da esperienze ricche e da problemi perché ciascun allievo possa esplorare i significati, formare immagini mentali e schemi di riferimento, solo successivamente si introdurranno gli aspetti formali. Mi limito in questa sede a segnalare alcuni punti critici legati al contenuto, sperando che nel modo di parlarne si riconosca la necessità di rendere gli allievi protagonisti attivi e motivati, e rendere gli insegnanti capaci di proporre significati e guidare l'azione degli allievi.

Nuovi simboli

La *rappresentazione* “ a/b ” indica sinteticamente un modo di operare con la coppia di numeri

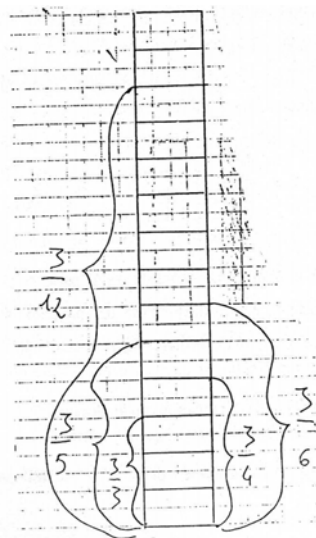
naturali (a,b). Se il simbolo della frazione viene introdotto precocemente, si corre il rischio che la legge di composizione non sia ancora interiorizzata, in questo caso si dà il nome ad un oggetto che ancora non c'è nella mente.

“Il simbolo è unità tra segno e significato. Fino a che le due parti non si congiungono, ovvero finché il segno rimane staccato dal significato, non siamo in grado di “riconoscere” ovvero di entrare in rapporto conoscitivo con ciò a cui il segno rimanda. Conseguenza del mancato riconoscimento è la permanenza in uno stadio di concettualizzazione immaturo e, nel tempo, infecondo” (Marazzini, 2010).

Questo accade quando l'introduzione è troppo formale, come pure quando si punta non al perché (significati) ma al come (operazioni). Quando le frazioni vengono identificate con i decimali, la situazione si complica. Per alcuni errori, la non assimilazione del simbolo iniziale e delle varie rappresentazioni dei razionali spiana la strada ad una indebita estensione delle regole già conosciute per i numeri naturali, mentre in matematica cambiando l'insieme numerico le regole cambiano. La somma non si esegue sommando separatamente i numeratori ed i denominatori (errore tipico $\frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{8}{7}$); non esiste il successivo di un numero decimale (errore tipico: il successivo di 25.13 è 25.14); si può eseguire la somma di una frazione con un decimale cambiando la rappresentazione di uno degli addendi ($\frac{1}{4} + 3.5 = \frac{1}{4} + \frac{35}{10} = 0.5 + 3.5 = \text{ecc.}$).

Il significato linguistico dei termini

In una classe prima di scuola superiore, all'inizio dell'anno scolastico, viene chiesto di rappresentare, riferendosi alla stessa unità, alcune frazioni con lo stesso numeratore: $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{12}$. Un allievo presenta un disegno inatteso: un lungo rettangolo verticale fatto di mattoncini tutti uguali, di fianco alcune graffe indicano quanti mattoncini si devono considerare per ciascuna frazione, e sono indicate le frazioni in ordine crescente in questo modo: $\frac{3}{3} < \frac{3}{4} < \frac{3}{5} < \frac{3}{6} < \frac{3}{12}$. I denominatori sono stati utilizzati per contare parti uguali ($\frac{3}{3}$ sono 3 mattoncini, $\frac{3}{6}$ sono 6 mattoncini, ecc.). L'allievo ha confuso le funzioni del numeratore e del denominatore, che sarebbero più chiare se comprendesse il significato dei termini (denominare, cioè dare il nome; numerare, cioè contare). “In questo caso, la rappresentazione eseguita è stata per l'insegnante un ottimo strumento di analisi dell'errore, permettendo di risalire alle carenze riguardanti immagini mentali ed analisi di procedimenti operativi. E' stata quindi l'occasione per mettere bene a fuoco un punto specifico di lavoro per il recupero di quel particolare allievo, per scalzare le sue personali misconoscenze (Longo, Di Carlo, Ambrosione, 1994). Aggiungo: con esito positivo. Solo l'analisi dell'errore permette di porre in atto efficaci attività di recupero. In questo caso il recupero della conoscenza è passato attraverso il recupero del significato linguistico dei termini, con riferimento alla definizione.



La definizione usuale e le sue difficoltà

Torniamo all'origine e tentiamo un'analisi critica delle più comuni definizioni di frazione. Eccone una, segnalata in (Fandiño Pinilla, 2005), perché inadeguata:

«Dopo aver fatto un esempio di suddivisione in parti uguali (di una torta, una pizza, una figura geometrica), normalmente i testi proseguono: “Si ha una unità-tutto e la si divide in parti uguali; ciascuna di queste parti è una unità frazionaria. Per esempio se l'unità-tutto è stata divisa in 4 unità frazionarie, ciascuna di esse si chiama “un quarto” e si scrive $\frac{1}{4}$. Se di queste unità frazionarie se ne prendono alcune, allora la parte presa dell'unità-tutto si chiama frazione. Nel nostro esempio, se prendiamo 3 unità frazionarie $\frac{1}{4}$, si dice che si è presa la frazione “tre quarti” che si scrive $\frac{3}{4}$ ».

Trovo altri esempi su due tesi di cui è stato relatore il prof. F. Spagnolo (Università Palermo).

“Si ha una unità-tutto e la si divide in parti uguali; ciascuna di queste parti è una unità frazionaria. Se di queste unità frazionarie se ne prendono alcune, allora la parte presa dell'unità-tutto si chiama frazione” (Amato, 2007).

Il simbolo di frazione viene identificato con una grandezza e questo rende problematico definire le operazioni. Inoltre in questo modo andrebbe persa, nel significato del simbolo, l'idea di “azione” che si compie per costruire una nuova grandezza a partire da una data. E' un passo avanti una definizione analoga che introduce l'idea di operatore:

“Le frazioni sono enti che fanno passare da una grandezza (tempo, segmento, tavoletta di cioccolato, ecc..) ad una grandezza dello stesso tipo. Il secondo numero indica in quante parti uguali bisogna dividere la grandezza, il primo indica quante di queste parti bisogna prendere” (Campaniolo, 2007).

Qui la frazione non è più “la parte presa”, ma un operatore. Ma anche con questa definizione resta un ostacolo: si può operare solo dentro l'oggetto iniziale. Le immagini di cui sono corredati i testi sono cosiffatte: in (Bori, Vivalda, Martinelli, 2010) l'immagine di riferimento è un cerchio diviso in 5 spicchi uguali, 3 sono colorati (di colori diversi) e 2 sono bianchi: il cerchio rappresenta un intero, le 3 parti colorate sono complessivamente una parte dell'intero. Dicono le autrici: “Il valore matematico, rappresentato da questo disegno, è dato dalla frazione $\frac{3}{5}$, poiché 5 sono le fette totali e 3 sono le fette colorate.” Attraverso il termine “valore”, la frazione $\frac{3}{5}$ non è identificata con una grandezza, ma è stata utilizzata per rappresentare un modo di operare, dividere in parti uguali un intero e considerarne solo alcune.

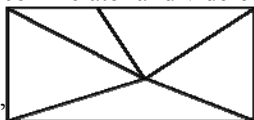
Nonostante l'evidente limite (imposto in modo implicito dalla definizione) di restare dentro l'unità, tutti i testi passano subito a classificare le frazioni come proprie, improprie e apparenti, senza dare alcuna giustificazione al fatto di poter uscire dall'unità.

Un esempio e qualche considerazione

Llinares immagina che un'insegnante di scuola primaria racconti la sua esperienza didattica.

Quando ho insegnato le frazioni, non ho mai avuto molte difficoltà. I miei alunni normalmente hanno compreso rapidamente l'idea di frazione. Con le operazioni qualche volta ho avuto più difficoltà, ma proponendo molta pratica ho ottenuto che la maggior parte di loro ha superato bene gli esami. Quest'anno siamo in 5° e come nell'anno passato abbiamo affrontato alcune situazioni con le frazioni. Ho pensato che potevamo incominciare questo tema ricordando alcune cose dell'anno passato.

Perciò ho scritto il compito seguente sulla lavagna: Cosa sono i $\frac{5}{4}$ di questo rettangolo? (nota: la maestra disegna un rettangolo sulla lavagna). Mi sono resa conto che c'era un gruppo di alunni che non avevano capito la domanda. Mentre stavano lavorando su questo esercizio, mi sono accostata a Javier, ho ripetuto la domanda, chiedendogli di spiegarmi cosa stava facendo. Egli ha cominciato a dividere in parti un rettangolo fatto sul foglio, e ha fatto questo



disegno:” (Llinares, 2003)

L'autore non ci dice come la classe ha lavorato negli anni precedenti sulle frazioni, ma coglie la situazione di disagio di un allievo. Davanti ad un quesito con una frazione impropria, Javier non interpreta il rettangolo disegnato alla lavagna come l'unità a cui deve riferirsi per costruire una nuova grandezza, ma come l'oggetto entro cui deve assolutamente rimanere. Perciò inventa una nuova suddivisione in 5 parti dello stesso rettangolo, per niente impressionato dal fatto che le parti non siano uguali. Ma quanto lo ha ingannato la maestra con il suo linguaggio? “i $\frac{5}{4}$ di un rettangolo”.....Come interpretano questa richiesta gli allievi? Javier ha qualche giustificazione?

Parti uguali

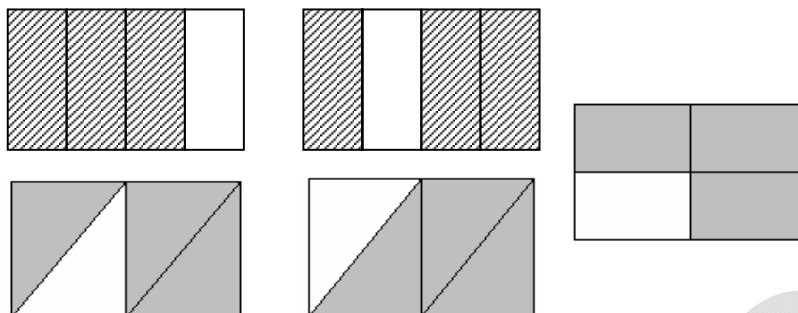
“Nel linguaggio comune, la parola “frazione” indica generalmente una parte di un tutto, invece nel linguaggio matematico il termine “frazione” è applicabile solo alle diverse parti di una grandezza ottenute dividendo quella grandezza in parti uguali” (Campaniolo, tesi 2007/2008). C'è dunque una differenza tra il significato comune e quello matematico del termine “frazione”, derivato dal latino “frangere”, cioè spezzare.

L'aggettivo “uguali” costituisce un'ulteriore complicazione cognitiva nella definizione di frazione, come relazione parte-tutto, a volte continuo a volte discreto: dividere un'unità in parti uguali è la richiesta preliminare a qualsiasi trattazione sulle frazioni, ma in quanti modi diversi questo può essere fatto? Ragioneremo su alcuni esempi.

La frazione come operatore: una definizione complessa

Consideriamo la frazione come “operatore” in un insieme di grandezze: “ m/n di”, con m ed n numeri naturali ed $n \neq 0$. Cominciamo a supporre che sia $m \leq n$ e illustriamo con un esempio il significato del simbolo. Considerare $\frac{3}{4}$ di un foglio T di carta di forma rettangolare ($\frac{3}{4}$ di T), significa dividerlo in 4 parti uguali e considerarne 3, senza privilegiare alcuna modalità esecutiva. Dopo la suddivisione, si dice anche che **si considerano 3 parti su 4**, e ciascuna delle parti ottenute si chiama **unità frazionaria**.

Poiché operativamente, il procedimento può essere eseguito in modi diversi, si possono ottenere risultati percettivamente diversi, come illustrato nella figura che segue.



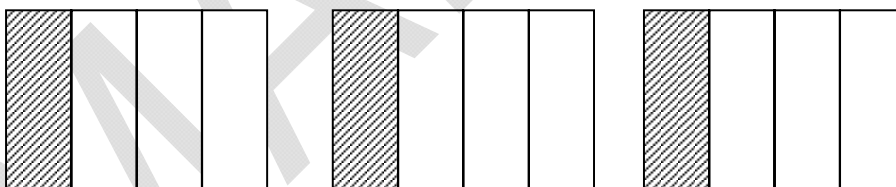
Siccome i rettangoli sono uguali tra loro, le parti ottenute mediante le diverse suddivisioni hanno in comune la proprietà di essere $\frac{3}{4}$ della stessa figura: questa loro proprietà comune è un'invarianza fondamentale sulla quantità, che va acquisita con l'esperienza, e la successiva riflessione critica sull'esperienza.

Tale invarianza è alla base dell'idea di **"equiestensione"**, fondamento della nozione di area: le unità frazionarie ottenute con le diverse suddivisioni non hanno in comune la forma, ma l'area. Altri esempi si possono stabilire in altre classi di grandezze, per esempio bicchieri di forma diversa che contengono ciascuno 250 grammi di zucchero: il contenuto di ciascuno è $\frac{1}{4}$ di kg nonostante la diversità di forma, e non è immediato accorgersene percettivamente.. Si capisce dunque che parlare di parti "uguali" sottintende spesso che sono da ritenere uguali non per tutte le loro caratteristiche, ma per una di esse.

Da un punto di vista logico, si tratta di un'equivalenza piuttosto che di un'uguaglianza.

Una seconda interpretazione

Supponiamo di **avere a disposizione più oggetti identici, cioè più unità dello stesso tipo**, allora la frazione è suscettibile di un'altra interpretazione. Tornando all'esempio precedente, la stessa grandezza " $\frac{3}{4}$ T" si può pensare come l'unione di 3 parti, (uguali tra loro) di cui ciascuna è presa in una diversa unità ed è $\frac{1}{4}$ di essa, come in figura.



Ciascuna delle 3 parti scelte è un'unità frazionaria, come nel primo caso considerato, e l'unione delle 3 unità frazionarie della figura precedente costituisce ancora $\frac{3}{4}$ dell'unità considerata (il rettangolo T). Su queste varie possibilità occorre un lavoro a scuola, basato su esperienze reali che rendano significativi gli aspetti di convenzione. Il passaggio dalle azioni all'astrazione richiede cura nell'esplorare il campo delle azioni possibili per ottenere un certo risultato. Il pensiero identifica lo schema sintetico che soggiace alle azioni possibili; in questo senso diciamo che è astratto, "tirato fuori", come indica l'etimologia. Quanto detto non si allontana dall'uso della frazione nel linguaggio comune. Se avessi mangiato $\frac{1}{4}$ di una torta, poi ancora $\frac{1}{4}$ e poi ancora un'altra fetta da $\frac{1}{4}$ e mi accorgessi di avere esagerato, non avrei

problemi nel dire: “ho sbagliato, ho fatto male a mangiare $\frac{3}{4}$ di quella buonissima torta!”

Frazione impropria

Consideriamo ora $m > n$ e ripetiamo le azioni precedenti per costruire un segmento che sia $\frac{7}{4}$ di T: dividendo in 4 parti uguali il segmento T, otteniamo l'unità frazionaria ($\frac{1}{4}$ di T); si tratta poi di costruire una nuova grandezza mediante l'unione di 7 unità frazionarie. Nei processi reali possiamo raggiungere lo scopo solo se disponiamo di almeno 2 unità frazionarie, l'ultimo esempio fatto per la frazione $\frac{3}{4}$ spiana la strada a varie possibilità.

Ma l'immaginazione finirà per isolare il processo di ripetizione, come se si trattasse di riportare uno stampino tante volte di seguito.

Rappresentazione sintetica

La frazione, in quanto operatore, è dunque la rappresentazione sintetica dei modi di costruire una grandezza a partire da un'altra (che consideriamo unitaria): *si costruisce l'unità frazionaria mediante la suddivisione di una unità in n parti uguali, poi si moltiplica questa parte per un qualsiasi numero naturale m (intero positivo), a prescindere dai diversi modi operativi con cui la costruzione si realizza, i quali dipendono dalla natura dell'oggetto iniziale o del problema in cui ci si pone.* E' possibile dunque notare che lo stesso processo permette di costruire una nuova grandezza, omogenea con quelle iniziali, anche se nella frazione il numeratore è uguale o maggiore del denominatore.

Osservazione 1. Quando una frazione è intesa come operatore, l'informazione è completa solo se si indica su quale grandezza si opera. E' preferibile ricordarlo scrivendo sempre in modo esplicito “m/n di...”. Circa il linguaggio ora utilizzato, ricordo che la somma ed il prodotto per un numero naturale sono operazioni definite non solo negli insiemi numerici, ma anche in una classe di grandezze omogenee.

Osservazione 2. Alla fine del percorso operativo, ci si trova a trattare con due unità: l'oggetto che inizialmente è stato considerato come unità e successivamente l'unità frazionaria, che è una sua parte. Su questo punto si generano talvolta difficoltà, su cui occorre vigilare.

Frazioni e misura

E' opportuno sottolineare che per operare la suddivisione di un oggetto (o “grandezza”) in parti uguali occorre che esista un criterio di confronto, a cui fare ricorso per affermare che le parti sono uguali (o che si possono considerare uguali), oppure che una è minore dell'altra. Per operare con una frazione, occorre anche che esista la possibilità di “sommare” alcune delle parti ottenute nella suddivisione. Dunque le frazioni (in quanto “operatori”) descrivono un modo di agire con la misura dentro una

 Grandezza A, unità iniziale U

 Nuova unità $U' = \frac{1}{4} U$

 $\frac{3}{4}$ di A, cioè 3 U'

 $\frac{7}{4}$ di A cioè 7 U'

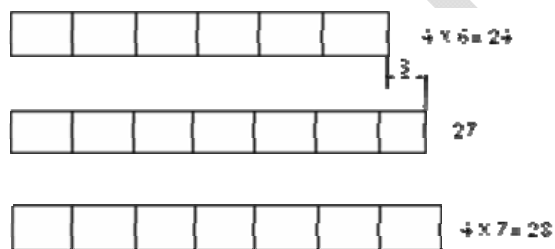
classe di grandezze dello stesso tipo (omogenee), in cui è possibile confrontare due elementi, sommarli e moltiplicare ciascun elemento per un numero naturale. Inoltre le frazioni sono legate in modo essenziale al **cambiamento di unità di misura**. Infatti se una grandezza ha misura m/n rispetto all'unità iniziale U , essa ha misura m rispetto alla nuova unità $U' = 1/n U$. In questo modo è unificato il significato di frazione propria, apparente ed impropria, in quanto il *processo costruttivo non cambia nei tre casi*. Nella figura, l'ultima striscia ha misura $7/4$ rispetto alla prima unità (A) ed ha misura 7 rispetto alla nuova unità U' .

Frazione e divisione

Il campo N (numeri naturali) è aperto rispetto alla divisione, che si può definire (nella scuola primaria) come “cammino” inverso della moltiplicazione solo quando il dividendo è multiplo del divisore. Per dare senso alla divisione tra qualsiasi coppia di naturali (Longo, 2010) occorre andare oltre l'idea primitiva di divisione, mediante un processo di approssimazione: inizia qui l'ampliamento del campo numerico che porterà alla costruzione dei razionali.

Ragioniamo su un esempio. Nel caso di $27:4$, il dividendo 27 è compreso tra due multipli successivi di 4 ($4 \cdot 6 = 24$ e $4 \cdot 7 = 28$). Si considera come quoziente il numero 6 (quoziente approssimato per difetto, cioè il massimo numero intero multiplo del divisore che non supera il dividendo), fatto che genera un resto (qui $R = 3$).

Nel disegno ogni “cella” (escluso il resto 3) rappresenta 4 unità, prima e terza striscia corrispondono ai due diversi multipli di 4, la seconda striscia, che visualizza la divisione $27 : 4$, è suddivisa in $24 + 3$ (resto).



Il completamento di un processo reale di suddivisione porta poi ad operare sul resto. Tale suddivisione si può eseguire geometricamente nella rappresentazione mediante il teorema di Talete, ottenendo un segmento (parte del resto R da aggiungere a ciascuna delle parti ottenute con la precedente approssimazione per difetto). Per passare alla misura, occorrerebbe l'operazione $3:4$, impossibile in N , che è stata in origine indicata mediante una frazione, (qui $\frac{3}{4}$), intesa come operazione di divisione lasciata in sospeso: in questa situazione si tratta di una frazione il cui valore è minore dell'unità. Se si amplia l'insieme N e si utilizzano anche i numeri decimali, la divisione si può eseguire attraverso passaggi di cambiamento di unità di misura. Passando ai centesimi, ci si trova a calcolare $300:4$, che fornisce 75 centesimi come quoziente esatto. La divisione iniziale diventa $27:4 = 6,75$.

Nel campo dei decimali si recupera il fatto che moltiplicazione e divisione sono “cammini”

uno inverso dell'altro: $6,75 * 4 = 6 * 4 + 0,75 * 4 = 24 + 3 = 27$.

Appoggiandosi su questa doppia possibilità di gestire il resto, si può introdurre fin dall'inizio l'identificazione della frazione con la divisione, difficile da recuperare in tempi successivi, e abituare gli allievi a passare di frequente al significato della frazione come divisione.

Il matematico francese L.Lafforgue, medaglia Fields nel 2002, suggerisce di introdurre le frazioni dalla divisione (Lafforgue 2007).

Sui libri finlandesi per la scuola media "la scrittura con la linea di frazione viene presentata (questo fin dalle elementari) come un modo per scrivere una divisione, un'alternativa ai due puntini: la corrispondenza della frazione con la scrittura decimale rimane esplicitata molte volte, così come tra una divisione coi due puntini e il suo risultato. Mi rendo conto che è una banalità. Ma i nostri studenti (nota: italiani) usano tante frazioni prima di scoprire la relazione che lega questa scrittura con numeri che sono a loro più familiari, quelli con la virgola. Quando si mostra che le frazioni permettono di ottenere tutti i numeri decimali si genera un effetto sorpresa!" (Bertinetto, corso di perfezionamento per insegnanti di matematica, Univ. Pisa.)

Dentro la struttura moltiplicativa

Applichiamo l'operatore m/n ad un numero: considerare $3/5$ del numero 20 significa operare prima con una divisione e poi con una moltiplicazione: $20 : 5 = 4$, poi $3 * 4 = 12$. Con l'uso di parentesi: $(20 : 5) * 3 = 12$. Questa successione di operazioni si indica come prodotto $(m/n) * a$: nel nostro esempio: $3/5 * 20 = 12$.

Diamo rappresentazioni qualitative mediante figure geometriche, pensando i numeri come misure. Rappresentiamo $3/4$ di 8 secondo la definizione data (prima riga del disegno).

Sappiamo che allo stesso risultato si arriva invertendo l'ordine delle due operazioni (seconda riga del disegno) e possiamo guidare gli allievi a prenderne atto. La rappresentazione, pur non essendo una dimostrazione, è un'esperienza utile per formulare la congettura che sia sempre vera l'uguaglianza del risultato nelle due vie. Dimostrata (o accettata) la proprietà,

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

$$8:4=2; 2*3=6$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$$8*3=24; 24:4=6$$

abbiamo più modi per eseguire lo stesso calcolo: $3/4 * 8 = (8:4)*3 = (8*3):4$; oppure calcolando il valore decimale della frazione: $3/4 = 3:4 = 0,75$; $3/4 * 8 = 0,75 * 8 = 6$.

Queste considerazioni sono un esempio di come nella scuola primaria e secondaria di primo grado si potrebbe lavorare in modo intuitivo sulle proprietà dei numeri razionali, fornendo una buona base immaginativa al calcolo algebrico che si introduce successivamente, di solito in modo avulso dai contesti. Infatti, l'identificazione di questi modi di calcolo permette di dare senso all'ampliamento del linguaggio simbolico: $(8:4)*3 = \{8*(1/4)\}*3$; questa posizione è accettabile se rispetta la commutatività del prodotto: $\{8*(1/4)\}*3 = \{8*3\}*(1/4)$ e questa è vera perché è la trascrizione di $(8*3):4$.

Le dimensioni

Senza cambiare i dati numerici usati nel paragrafo sulla divisione, facciamo riferimento ad un contesto reale: *“La somma di 27 euro va divisa tra 4 persone. Prevedere quanto riceverà ciascuno di essi”*.

Ciascuno riceve 6 euro, ma la somma non è esaurita, avanzano 3 euro. Cosa farne? Accantonarli? se ci si accorge che gli euro si possono cambiare in centesimi, si vede che i restanti 3 euro si possono suddividere in parti uguali dando a ciascuno 75 centesimi. Quindi si conclude: $27 \text{ (euro)} : 4 \text{ (persone)} = 4,75 \text{ euro/persona}$ (euro a persona).

I bambini nella scuola primaria imparano facilmente a caratterizzare i numeri utilizzando piccoli segni (per esempio trattini colorati posti sotto ai numeri), accompagnati da una legenda; evitano la forte astrazione del calcolo delle dimensioni, ma ne assorbono la sostanza.

Nella moltiplicazione e nella divisione, le dimensioni sono presenti anche se spesso non riconosciute, e questo avviene anche per le frazioni, che fanno parte della struttura moltiplicativa. Se il pensiero nasce dall'esperienza, questa è davvero una buona esperienza, che ripetuta a lungo nella scuola primaria, rende possibile nella secondaria assimilare bene il calcolo dimensionale.

Nascono nuovi numeri

Primo anno della scuola superiore, primi giorni di scuola, si propone questo problema:

«Il sig. Bianchi e il sig. Rossi giocano insieme al totocalcio. Bianchi vince un premio di 2 milioni e Rossi ne vince uno di 5. Si recano in vacanza, dove Bianchi spende $\frac{3}{4}$ della sua vincita e Rossi $\frac{1}{2}$ della sua. Chi spende di più? Confronta le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, c'è contrasto con il risultato del problema? Giustifica le tue affermazioni».

Ecco uno svolgimento tipico.

1) Spende di più Rossi che spende 2.5 milioni, rispetto a Bianchi che spende 1.5 milioni.
2) Sì! C'è contrasto con il risultato del problema perché la frazione $\frac{3}{4}$ prende quasi l'intero della vincita di Bianchi mentre la frazione $\frac{1}{2}$ prende solo la metà della vincita di Rossi, ma la vincita è differente, si tratta di 2 milioni per Bianchi e 5 per Rossi, quindi facendo riferimento alle vincite è giusto il problema e contrastanti le soluzioni rispetto alle frazioni.

Il ragazzo ricorda bene che $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, ha capito molto bene la situazione e si meraviglia. Si tratta di un suo errore o di una insufficiente “incidenza” dei suoi insegnanti?

Confronto e rappresentazione sulla retta numerica

Infatti le frazioni sono confrontabili solo quando sono riferite ad una stessa grandezza, in questo caso è anche possibile rappresentarle mediante i punti di una retta orientata.

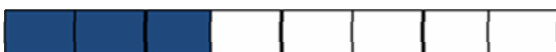
Quando le frazioni sono introdotte come operatori su quantità (“m/n di”) è opportuno notare, in corso d'opera, che si possono confrontare le quantità ottenute, ma non gli operatori. Ecco un esempio per chiarire. Di 100 bottiglie $\frac{3}{4}$ sono 75, ma di 200 bottiglie $\frac{3}{4}$ sono 150: gli operatori sono uguali, ma le quantità costruite sono diverse perché erano diverse le quantità su cui operare. Nel secondo caso, 75 bottiglie costituiscono $\frac{3}{8}$ del complesso di 200 bottiglie: ora il numero di bottiglie ottenute coincide, ma cambia l'operatore. Visualizzo con un disegno:



verifica: $\frac{3}{4} * 100 = 3(100:4) = 75$



verifica: $\frac{3}{4} * 200 = 3 * 50 = 150$

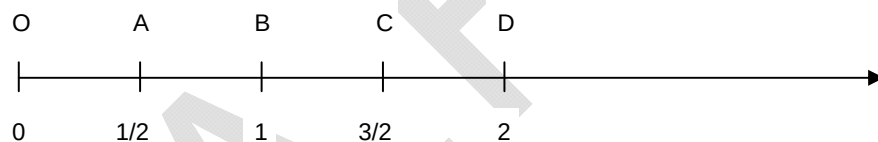


verifica $3 * 8 : 200 = 3 * 25 = 75$

Di conseguenza, le frazioni si possono rappresentare su una retta orientata (su cui c'è già una struttura d'ordine) solo se vengono tutte riferite ad una stessa unità di misura, quella fissata sulla retta. In questo modo la frazione viene inserita tra i numeri naturali, già rappresentati sulla retta, e identificabili con le frazioni "apparenti". Al termine del processo, le frazioni non sono più considerate come operatori, ma come numeri. Questa scelta permette di passare dal confronto di quantità al confronto di frazioni, che è quello rappresentato in modo "naturale" sulla retta numerica. In questo contesto, $\frac{3}{8}$ precede $\frac{3}{4}$ (poniamo il verso sulla retta da sinistra a destra) e quindi "ereditando" il criterio d'ordine dei punti della retta, assumiamo $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$.

Se consideriamo le due frazioni precedenti su uno stesso oggetto T, è proprio $\frac{3}{8}$ di T < $\frac{3}{4}$ di T, qualunque sia l'oggetto T, ma questo non sarebbe garantito se si operasse su oggetti diversi tra loro. Chiamando "numeri" anche le frazioni, ci avviamo a definire i "numeri razionali".

Mentre tra i numeri naturali ed i punti ad essi associati c'era una *corrispondenza biunivoca*, questo non è più vero per le frazioni: ad esempio la frazione $\frac{1}{2}$ corrisponde al punto medio A



del segmento unitario OB, ma viceversa tale punto corrisponde non solo ad $\frac{1}{2}$, ma anche a $\frac{2}{4}$, a $\frac{3}{6}$ ed in generale ad ogni frazione $\frac{m}{2m}$; quindi ad una frazione corrisponde un solo punto della retta, ma ad un punto corrispondono infinite frazioni, che riconosciamo essere tra loro "equivalenti". Nella costruzione di questa corrispondenza interviene la natura degli enti geometrici, che almeno per tutta la scuola elementare e media si considera solo in modo intuitivo. In realtà il punto non è affatto un "oggetto" intuitivo. Ma in questa trattazione accettiamo questa tacita ipotesi, osservando però che stiamo conducendo i nostri allievi su un lungo cammino di successivi approfondimenti concettuali che collegano algebra e geometria.

Abbiamo ora la possibilità di definire il numero razionale come classe di frazioni equivalenti, e la corrispondenza sulla retta r , tra punti e numeri razionali, torna biunivoca.

Le operazioni tra frazioni

Cosa sottolineare per inserire l'insegnamento / apprendimento delle operazioni nell'ottica che ho seguito nella esposizione precedente? La domanda sostanziale è se l'attenzione alla costruzione della conoscenza (esperienze ricche e approfondimento di significati, introduzione attraverso problemi, sollecitazione alle rappresentazioni, discussione comune, ecc.) sia da

riservare alla parte introduttiva o se debba sussistere anche quando si arriva ad introdurre le operazioni e le loro proprietà, nel corso della scuola superiore di primo grado. Una delle questioni che influiscono maggiormente sulla mancanza di motivazione, sulla difficoltà a ricordare ciò che si è appreso e sulla qualità della comprensione, è la mancanza di conoscenza dei significati. Quando questo aspetto viene trascurato, la memoria diventa meccanica ed aumenta la frequenza degli errori, quindi è sempre da evitare che un nuovo lavoro sia introdotto ponendosi già all'inizio nel livello formale.

La prima operazione che si affronta è la somma di frazioni. Concettualmente è un'applicazione dell'equivalenza di frazioni, ma questa viene completamente messa in ombra dal fatto di iniziare l'argomento "insegnando" (cioè "raccontando" senza permettere agli allievi la ricostruzione personale) la ben nota regola che inizia con la ricerca del m.c.m. dei denominatori. Naturalmente ritengo scontato (ma non lo è, nei fatti!) che gli studenti considerino questa ben nota formula non come la definizione di equivalenza tra frazioni, ma come uno strumento di verifica, essendo l'equivalenza il fatto che due operatori individuano la stessa grandezza, anche se per strade operative diverse.

Ho imparato molte cose seguendo una studentessa (figlia di amici) al primo anno di scuola superiore. Ricercava le regole nella memoria, dove si produceva una continua scomposizione e ricomposizione delle frasi che aveva memorizzato. L'idea che per sommare due frazioni si potesse sostituirle con frazioni equivalenti e che per fare questo si potesse usare come denominatore il prodotto dei due denominatori, produsse in lei uno stupore totale. Allora... perché le erano stati insegnati tanti strani calcoli....? Ben presto venne fuori la questione che i numeri utilizzati ingigantivano nei passaggi e ci ponemmo la domanda su come controllare il fenomeno della crescita dei termini. A partire dalla certezza che ogni frazione possiede molte frazioni equivalenti, la domanda posta ha guidato la ricerca del denominatore più conveniente, quello che chiamiamo il minimo comune multiplo dei due denominatori. Le esperienze sono state concettuali, sulla rappresentazione dei multipli sulla retta reale, esperienze in cui si parte da un livello di astrazione precedente a quello in cui si vuole giungere.

Lo stupore è stato anche mio, davanti allo spettacolo di regole in decomposizione vaganti nella mente, senza trovare una via (una immagine?) per ricomporsi nel modo giusto. Lo stupore è aumentato quando attraverso C.Bertinetto, nella sua relazione già citata, ho scoperto che io e la mia allieva stavamo reinventando la via finlandese: "Ovviamente anche i finlandesi ad un certo punto devono arrivare alla fatidica somma di frazioni con il calcolo del m.c.m. Il calcolo del multiplo comune viene fatto a mente, anche perché nella maggior parte delle espressioni è facilmente identificabile. Se l'individuazione del minimo comune multiplo è difficoltosa, si suggerisce di moltiplicare i denominatori tra loro: forse non è il primo, ma è senz'altro un multiplo comune" (Bertinetto).

Conclusione

Certamente non ho esaurito l'esame dei punti critici dell'argomento frazioni, manca ad esempio un cenno all'equivalenza, alla moltiplicazione, alla divisione e alla semplificazione e non ho sufficientemente approfondito l'importanza di saper identificare le unità di misura presenti.

Penso però di aver delineato la strada per un insegnamento efficace, che si può estendere facilmente ad altri punti oltre quelli che ho esplicitato.

Nel mio modo di intendere l'apprendimento della matematica, la concettualizzazione è un processo evolutivo che si svolge nel tempo (evito di citare i riferimenti perché mi limito ad un breve cenno). Fare esperienza è l'avvio dei processi conoscitivi anche in matematica. Le idee matematiche nascono in modo intuitivo, si arricchiscono poi di connotazioni e proprietà, passano da un primo livello implicito alla totale esplicitazione; la loro formulazione avviene all'inizio con il linguaggio comune, che man mano si trasforma in un linguaggio più specifico, fatto di parole e di simboli.

La risoluzione personale di problemi, anche attraverso procedimenti per tentativi, è uno strumento di particolare importanza per fondare la conoscenza in matematica. Proprio in vista dell'evoluzione personale delle idee, della rappresentazione mentale, del linguaggio, si chiede di usare nei problemi varie forme di rappresentazione, prima libera e poi più aderente alle convenzioni, usando sia il disegno che la lingua comune. Il problema è un'esperienza di concettualizzazione quando riguarda temi non ancora conosciuti, altrimenti è un esercizio di consolidamento della conoscenza.

La rappresentazione grafica è utile quando è uno strumento per analizzare il testo dal punto di vista del significato, per porre in evidenza le azioni e le relazioni che si sta imparando a trasferire nel linguaggio simbolico, proprio della matematica. Mediante la rappresentazione avvengono vari passi: si isola un'idea (aggiungere, unire, fare parti uguali e prenderne alcune, confrontare grandezze secondo un criterio, ecc.), se ne produce un'immagine astratta (l'operazione, la misura, ecc.), si inizia a simbolizzare per averne una rappresentazione sintetica, si accede ai simboli convenzionali e ad un iniziale linguaggio specifico che utilizza tali simboli. Il disegno, la spiegazione scritta o orale, la narrazione sono strumenti non solo per rappresentare, ma anche per passare dalla conoscenza implicita, intuitiva, a quella esplicita, consapevole. Tutto questo, unito alla consapevolezza critica sul contenuto, guida in modo sicuro le scelte dell'insegnante verso esperienze di apprendimento significativo degli allievi.

Bibliografia

Bertinetto C., *La frazione. Confronto tra i testi italiani e finlandesi per la scuola media inferiore*.
www.dm.unipi.it/perfezionamento/documenti/BertinettoRelLab2.pdf

Bori G., Vivalda S., Martinelli R., 2010, *Matematica. Corso di matematica per la scuola secondaria di primo grado. Aritmetica 1*, edidue

Chamorro C., 2003, *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson, Prentice Hall, Madrid

Fandiño Pinilla M.I., 2005, *Le Frazioni, aspetti concettuali e didattici*, Pitagora, Bologna

Lafforgue L., 2007, *Le calcul à l'école primaire (avec le concours d'instituteurs praticiens et de professeurs de différentes disciplines)*, www.ihes.fr/...lafforgue/education.html

Llinares S., 2003, *Fracciones, decimales y razon. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional*. In (Chamorro 2003)

Longo P., Di Carlo A., Ambrosione M., 1995, *Didattica della matematica contro la dispersione scolastica: esperienze di recupero nell'inserimento di allievi in prima superiore*, in "Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia" a cura di Caredda, Longo, Piochi, Pitagora, Bologna

Longo P., 2005, *L'insegnamento delle frazioni*, in Roletto E., *La scuola dell'apprendimento (didattiche disciplinari, modelli e applicazioni operative)*, Erickson, Trento, pag. 235/261

Longo P., 2010, *Divisione nella scuola primaria: significato e calcolo*. In Emmeciquadro, n.40, SEED Milano

Marazzini Anna, 2010, Simboli e scritture, Emmeciquadro n. 38, www.ilsussidiario.net

Tesi consultate

Amato Alessia, *L'insegnamento apprendimento dei numeri razionali nella scuola primaria: alcune considerazioni sperimentali*. Università di Palermo, relatore prof F. Spagnolo, anno acc. 2007-2008

Campaniolo Leda, *Didattica delle frazioni*, Università di Palermo, relatore prof F. Spagnolo, anno acc. 2007-2008