

METODI E TECNOLOGIE PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

3° LEZIONE

Le azioni del fare matematica

DESCRIVERE

DESCRIVERE

- La descrizione è la presa d'atto dell'esperienza dell'osservare; perciò anche tale attività dipende dal punto di vista
- Anche la scelta del mezzo descrittivo dipende dallo scopo
- Una descrizione è sempre in qualche misura una schematizzazione della realtà e quindi anche una sua interpretazione

DESCRIVERE

È lo scopo a determinare il grado di adeguatezza di una descrizione e la modalità espressiva

Esempi:

- Per dare le indicazioni di una località possiamo fare uno schizzo o una piantina.
- Per descrivere la scena di un incidente il verbale deve contenere tipi di informazione ben determinati.
- Una foto o un quadro sono metodi adeguati per descrivere un panorama.
-

Una descrizione scientifica:

- riguarda oggetti sottoposti a indagini di tipo scientifico
- sceglie forme e strumenti espressivi in cui prevale la funzionalità allo scopo, rispetto all'aspetto estetico
- mira a comunicare il proprio contenuto in modo intersoggettivo e senza ambiguità
- In matematica la descrizione assume spesso la forma di *rappresentazione*

DESCRIZIONE COME RAPPRESENTAZIONE

- La descrizione-rappresentazione riveste anche un altro ruolo, oltre a quello di comunicazione di una esperienza
- La rappresentazione è una funzione del pensiero, quando esso trasferisce i dati della realtà in forme e linguaggi diversi da quelli con cui si presentano , a scopo operatorio, per poter eseguire sulle rappresentazioni stesse quelle manipolazioni che consentono di comprendere nuovi aspetti del reale.

Esempi:

- *la rappresentazione della moltiplicazione come schieramenti*
- *la rappresentazione delle frazioni*
- *l'uso della rappresentazione nei problemi*
- *.....*

DESCRIZIONE → MATEMATIZZAZIONE

In matematica questo processo viene denominato *matematizzazione* di un contesto, che si tratti del più semplice problema di scuola elementare, fino alle più complesse equazioni in fisica.

Si costruisce uno schema che deve contenere le informazioni necessarie a fare certe operazioni o deduzioni su esso.

Poi si opera su tale rappresentazione, staccandosi dal suo riferimento reale, e seguendo le leggi proprie dei concetti e dei simboli implicati nel modello stesso.

Le conclusioni a cui si perviene devono però essere reinterpretate nella situazione reale da cui si è partiti.

La descrizione a scuola

- Il mezzo descrittivo primario è la lingua, parlata o scritta
- Le rappresentazioni grafiche sono altrettanto importanti delle descrizioni verbali
- Costruire identikit di persone è esercizio utile, anche in forma di gioco
- Esercizio importante è lavorare sulle *decodifica* di descrizioni fatte da altri; esempio:
 - le istruzioni di un gioco
 - le istruzioni di una scatola di montaggio
 - le istruzioni di una ricetta di cucina

DEFINIRE

Dice Hans Freudenthal: *“Bisogna insegnare non le parole, ma a parlare, non le definizioni, ma a definire”*.

La questione delle definizioni è una spia del problema più ampio del linguaggio nell'insegnamento scientifico.

In quanto le parole scaturiscono da una storia, il linguaggio non è un semplice strumento in dotazione alle persone, ma tocca e richiama il livello dell'esperienza.

Occorre allora indagare la forte connessione esistente fra l'uso delle parole che caratterizza il linguaggio comune e le parole che formano i linguaggi specifici

DEFINIRE

Il procedimento della definizione sta alla base della possibilità di **dare i nomi alle cose**, azione costitutiva della capacità di astrazione, della formazione dei concetti.

I termini del discorso si caratterizzano per **estensione** (l'insieme degli oggetti a cui si riferisce) e **intensione** (il suo significato, il concetto che denomina).

Es. Il termine *parallelogrammo* ha maggiore intensione e minore estensione del termine *quadrilatero*.

In ambito scientifico si tende ad assumere un termine per designare un concetto solo dal punto di vista dell'estensione.

IL LINGUAGGIO SCIENTIFICO

- Un linguaggio scientifico si costituisce quando viene operata una selezione di ambito di esperienza, e per descrivere quella si producono gli strumenti espressivi necessari.
- Infatti la realtà che la disciplina indaga influisce sullo strumento espressivo, piega, forma e arricchisce la lingua perché rifletta adeguatamente la struttura di ciò che vuole comunicare
- Il linguaggio comune fornisce parole e discorsi al linguaggio scientifico, che non è però un sottoinsieme impoverito di esso; anzi l'intreccio tra i due livelli di espressione è molto complesso
- Mettere a fuoco analogie e differenze tra la lingua del discorso comune e la lingua del “parlare” in matematica aiuta a focalizzare l'azione del *definire*

La definizione in matematica

Definire vuol dire trovare una descrizione sintetica dell'oggetto che esaminiamo, a partire dalla quale possiamo essere certi di intenderci quando parliamo.

Dovendo ricorrere ad altre parole, devono esistere dei termini il cui significato si suppone evidente, cioè **termini primitivi**.

Mentre in una lingua non si sente la necessità di dichiarare esplicitamente quali essi siano, nel linguaggio scientifico, e in particolare matematico, tale operazione è assolutamente necessaria.

DEFINIRE

- Spesso la definizione matematica, oltre che una descrizione, è una **abbreviazione** (es. segmento, triangolo): ha la funzione di poter sostituire ad un'intera frase un unico termine, senza rischio di equivoci.
- Questo uso rende scarno il linguaggio matematico, il che è un vantaggio, ma presuppone nella sua lettura una buona capacità interpretativa.
- La definizione matematica può anche avere carattere **operativo**: essa cioè sintetizza in un singolo termine le operazioni, concrete o mentali, eseguite per arrivare ad un certo concetto. In questo senso la definizione può essere considerata la descrizione di un procedimento.
(Esempio del valore assoluto).

DEFINIRE A SCUOLA

- Nella didattica è particolarmente importante *arrivare* con i ragazzi a formulare definizioni, non partire dalla loro enunciazione.
- La definizione infatti deve essere la *sintesi* di un processo di comprensione, non ne può essere l'origine.
- Essa può essere conseguita alla fine di un percorso operativo, che parte da una osservazione o da una domanda, procede con altre osservazioni o deduzioni, giunge a formulare una risposta, che può essere sintetizzata in un termine nuovo.
- Durante questo percorso è possibile utilizzare un linguaggio approssimato, per favorire la comprensione, ma da quando si conquista la formulazione corretta della definizione è giusto pretenderne la ripetizione in termini rigorosi.

DEFINIRE

- Insegnare a “*parlare*” in matematica significa insegnare a utilizzare un adeguato apparato linguistico ed espressivo per comunicare le proprie conquiste intellettuali.
- Al linguaggio scientifico occorre arrivare per approssimazioni successive e non va mai dato per scontato; d'altra parte l'acquisizione graduale di un linguaggio disciplinare è un obiettivo permanente nella programmazione.
- *N.B.* E' necessario avere particolare attenzione a quanto le difficoltà di natura linguistica influiscano sull'apprendimento, generando ostacoli alla comprensione dei concetti.
- Lavorare sulla lingua è perciò uno degli interessi più importanti che accomuna l'educazione scientifica a ogni altro ambito disciplinare.

I NUMERI INTERI

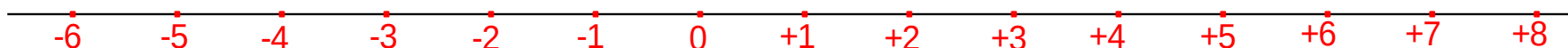
$\mathbb{Z}$

I NUMERI INTERI

I numeri interi sono quelli che vengono chiamati 'numeri con il segno'.

Essi costituiscono un ampliamento dei numeri naturali e, impropriamente, si può dire che si ottengono da essi premettendo al numero il segno + o il segno -.

La loro rappresentazione sulla linea dei numeri ne chiarisce il significato:



La novità fondamentale è la possibilità di definire l'**opposto** di un numero:

per ogni $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$, si dice opposto di a il numero che si ottiene da a cambiandone il segno; l'opposto di 0 è 0.

Es.: l'opposto di +3 è -3; l'opposto di -7 è +7; cioè $-(-7) = +7$

I NUMERI INTERI: la somma

- **Che vuol dire $a + b$?**

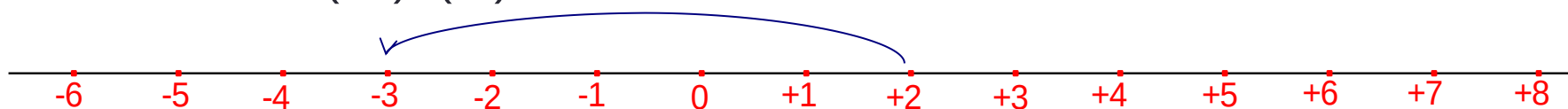
-Se b è positivo si sommano ad a tante unità quante sono quelle contenute in b

-Se b è negativo si sottraggono ad a tante unità quante sono quelle contenute in b

Es.1: $(+4) + (+3)$



Es.2: $(+2) + (-5)$



- **Che vuol dire $a - b$?**

Sommare ad a l'opposto di b :

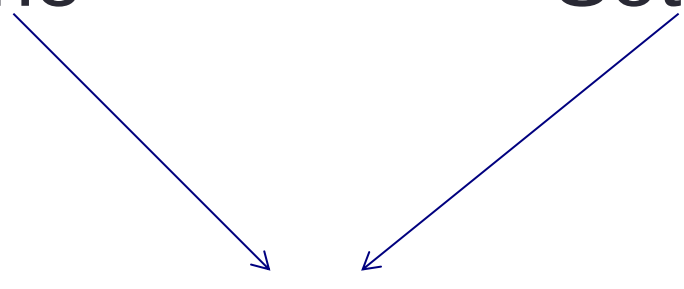
$$a - b = a + (-b)$$

I NUMERI INTERI: la somma

In $\mathbb{Z}$ quindi:

Addizione

Sottrazione



```
graph TD; A[Addizione] --> C[Somma algebrica]; B[Sottrazione] --> C;
```

Somma algebrica

I NUMERI INTERI: la somma

Proprietà:

- È una operazione interna:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}$$

- Vale la proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$$

- Vale la proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a$$

- Neutralità dello 0:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a$$

- Esistenza dell'opposto:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \exists a' \in \mathbb{Z} \text{ tale che } a + a' = 0$$

I NUMERI INTERI: la moltiplicazione

La regola dei segni è a tutti nota:

$$\text{a) } (+) \cdot (+) = (+)$$

$$\text{b) } (+) \cdot (-) = (-)$$

$$\text{c) } (-) \cdot (+) = (-)$$

$$\text{d) } (-) \cdot (-) = (+)$$

Se ne può dare una giustificazione intuitiva?

Tralasciamo a) ed esaminiamo c)

Cosa vuol dire $(-3) \cdot (+2)$? Sommare (-3) due volte: $(-3)+(-3)=-6$

Analogamente per b), invocando la proprietà commutativa.

Ora esaminiamo d):

$$(-3) \cdot (-2) = -(+3) \cdot (-2) = -(-6) = +6$$

I NUMERI INTERI

Alcuni nota bene:

- 1) Le proprietà della moltiplicazione sono le stesse che nei numeri naturali, compresa la proprietà distributiva rispetto alla somma algebrica
- 2) Per la divisione, ove questa è possibile, vale la regola dei segni della moltiplicazione
- 3) Per alleggerire il simbolismo, nella scrittura dei numeri positivi si può omettere il segno +; quindi, in $\mathbb{Z}$, 3 e (+3) hanno lo stesso significato.
- 4) E' possibile definire il concetto di **valore assoluto** di un numero intero:

Il **valore assoluto** di un numero è uguale:

- al **numero stesso** se esso è **positivo o nullo**;
- all'**opposto** del numero se esso è **negativo**.

Es.: $|3| = 3$; $|-5| = 5$

NUMERI INTERI: ordinamento

Abbiamo visto che gli interi, come i naturali, si possono disporre su una retta; utilizzando tale rappresentazione possiamo riconoscere che anche in $\mathbb{Z}$ è valida la **legge di tricotomia**:

comunque presi due numeri interi a e b , può accadere una e soltanto una delle tre possibilità:

$$a < b \quad \text{oppure} \quad a = b \quad \text{oppure} \quad a > b$$

Si può notare che:

- Lo 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo
- Ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo
- Tra due numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore
- Tra due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore

NUMERI INTERI: conquista

Nell'insieme dei numeri interi si può risolvere qualunque equazione del tipo:

$$x + a = b$$

I NUMERI INTERI NELLA SCUOLA PRIMARIA

Dalle indicazioni nazionali:

- Interpretare i numeri interi negativi in contesti concreti.

CONTESTI CONCRETI

Si può iniziare con un gioco a quiz (sulle tabelline, sulle frazioni, le equivalenze, o anche non matematico): si dà un punto per ogni risposta esatta, si toglie un punto per ogni risposta sbagliata.

Ovviamente si parte da zero; se uno sbaglia la prima risposta che punteggio ha?

Nella linea dei numeri bisogna aggiungere qualcosa prima dello zero.

Poiché i bambini sono familiari con il fatto che aggiungere vuol dire andare verso destra, togliere vuol dire andare verso sinistra si può, senza grandi difficoltà, arrivare all'idea di : $-1, -2, -3, \dots$

CONTESTI CONCRETI

- Le temperature (con rappresentazione della scala)

Es.: Se ora sono a 5 gradi e la temperatura scende di 7 gradi, a quale temperatura si arriva?

- Guadagni e perdite, debiti e crediti

Es. Ho 20 euro ma devo restituire a mio fratello 25 euro.

Sono in attivo o in passivo? Di quanto?

- Nella storia: avanti cristo e dopo Cristo

Es.: Se il piccolo Rufus aveva 10 anni nel 7 d.C., in quale anno è nato?

-

I numeri interi nella scuola primaria

Non si devono assolutamente formalizzare le operazioni, ma bisogna far fare ai bambini esperienza in situazioni reali che:

- c'è un ambiente numerico in cui si può sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo
- aggiungere un numero positivo vuol dire andare avanti sulla linea dei numeri
- aggiungere un numero negativo vuol dire andare indietro sulla linea dei numeri

Inoltre è opportuno (senza formalizzare) riflettere sull'ordinamento dei nuovi numeri:

è più freddo se siamo a -3 o a -5?

I NUMERI RAZIONALI

Q

I NUMERI RAZIONALI

Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri interi di cui il primo è il **numeratore** e il secondo il **denominatore**, con la condizione che questo secondo numero non può essere 0; si esprime con il simbolo $\frac{a}{b}$. La linea tra a e b viene chiamata **linea di frazione**

Il simbolo della frazione viene usato a scuola in contesti diversi con significati diversi, ovviamente collegati fra loro:

- come parte dell'unità
- come quoziente tra due numeri
- come operatore

Sotto tutti questi usi si nasconde un unico concetto matematico, un nuovo tipo di numeri che amplia l'insieme dei numeri interi: **il numero razionale**

I NUMERI RAZIONALI

Essendo la frazione un quoziente tra due numeri interi è possibile applicare la proprietà invariantiva:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a:c}{b:c} \quad (c \neq 0)$$

Ciò porta al concetto di **frazioni equivalenti** :

se il numeratore ed il denominatore di una frazione sono moltiplicati per uno stesso numero diverso da 0 si ottiene una nuova frazione equivalente a quella data; così pure se si dividono il numeratore ed il denominatore per un loro divisore comune

$$\text{Es.: } \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{18}{24} = \dots$$

Data una frazione, esistono infinite frazioni ad essa equivalenti ma tutte esprimono lo stesso **numero razionale**.

I NUMERI RAZIONALI

Alcune precisazioni

- Una frazione si dice ridotta ai minimi termini se il numeratore e il denominatore sono primi tra loro, cioè non hanno divisori comuni.
- Ogni numero razionale può essere espresso da infinite frazioni equivalenti, ma ogni frazione rappresenta un unico numero razionale.
- Poiché un numero razionale può essere espresso in infiniti modi, verrà utilizzato il modo più opportuno al contesto o allo scopo.

I NUMERI RAZIONALI: la somma

Definizione:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Infatti possiamo sommare due frazioni solo se hanno lo stesso denominatore; quindi:

1) Utilizzando la proprietà invariantiva portiamo le frazioni ad avere lo stesso denominatore:
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}; \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

2) Ora possiamo sommare:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

N.B.: Invece di usare il prodotto dei denominatori è preferibile utilizzare il minimo comune multiplo dei denominatori.

I NUMERI RAZIONALI: la somma

Proprietà:

- È una operazione interna:

$$\forall a, b \in Q, \quad a + b \in Q$$

- Vale la proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in Q, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

- Vale la proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in Q, \quad a + b = b + a$$

- Neutralità dello 0:

$$\forall a \in Q, \quad a + 0 = 0 + a = a$$

- Esistenza dell'opposto:

$$\forall a \in Q \exists a' \in Q \text{ tale che } a + a' = 0$$

I NUMERI RAZIONALI: il prodotto

Definizione: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Conseguenza: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1 \rightarrow$ concetto di reciproco

Il reciproco (o l'inverso) di un numero razionale $\frac{a}{b}$ è il
numero razionale $\frac{b}{a}$

Definizione: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Moltiplicazione

Divisione



Prodotto

I NUMERI RAZIONALI: il prodotto

- È una operazione interna:

$$\forall a, b \in Q, a \cdot b \in Q$$

- Vale la proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in Q, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Vale la proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in Q, a \cdot b = b \cdot a$$

- Neutralità dell'1:

$$\forall a \in Q, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- Esistenza dell'inverso:

$$\forall a \in Q \text{ e } a \neq 0 \exists a' \in Q \text{ tale che } a \cdot a' = 1$$

Nei razionali non ha più senso introdurre i concetti di multiplo e di divisore.

Perché?

I NUMERI RAZIONALI

Continua a valere inoltre la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

$$\forall a, b, c \in Q \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

I NUMERI RAZIONALI: l'ordinamento

- Date due frazioni aventi lo stesso denominatore, è maggiore quella che ha il numeratore maggiore.
- Date due frazioni aventi lo stesso numeratore, è maggiore quella che ha il denominatore minore



Per confrontare due frazioni è opportuno ricondurle allo stesso denominatore.

$$\text{Es.: } \frac{3}{4}, \frac{11}{14} \longrightarrow \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}, \frac{11 \cdot 2}{14 \cdot 2} = \frac{22}{28} \longrightarrow \frac{3}{4} < \frac{11}{14}$$

Regola pratica: per velocizzare il procedimento si può fare il prodotto in croce:

$$\frac{3}{4}, \frac{11}{14} \longrightarrow 3 \cdot 14 < 11 \cdot 4 \longrightarrow \frac{3}{4} < \frac{11}{14}$$

N.B.: Se i razionali sono negativi, vale quanto esposto negli interi: è maggiore quello che ha valore assoluto minore

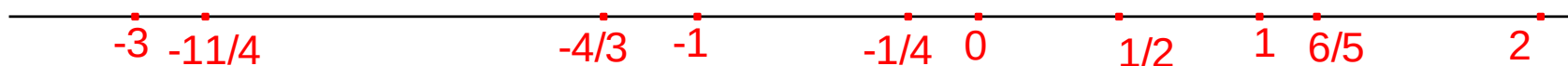
I NUMERI RAZIONALI: l'ordinamento

Poiché l'operazione di confronto prima illustrata è sempre possibile, anche in $\mathbb{Q}$ è valida la **legge di tricotomia**:

comunque presi due numeri razionali a e b , può accadere una e soltanto una delle tre possibilità:

$$a < b \quad \text{oppure} \quad a = b \quad \text{oppure} \quad a > b$$

Anche in questo caso, perciò, possiamo rappresentare i numeri razionali su una retta



Una riflessione

- Con l'introduzione dei razionali cosa si guadagna?

Le operazioni di somma e prodotto sono complete: sono operazioni interne e godono di tutte le proprietà; si può risolvere quindi qualunque equazione del tipo:

$$a \cdot x + b = c \quad (a \neq 0)$$

- Cosa si perde?

Non esiste più il successivo di un numero: tra due numeri razionali c'è sempre almeno un altro razionale (di fatto ce ne sono infiniti)

I NUMERI RAZIONALI NELLA SCUOLA PRIMARIA

Dalle indicazioni nazionali:

- Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti.
- Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.

Una precisazione

Nella scuola primaria si considerano solo i numeri razionali positivi, o meglio, i razionali assoluti, denominati con Q_a . Quindi, in tale ambiente non è sempre possibile la sottrazione, mentre è sempre possibile la divisione.

Essi inoltre, come scrittura, si presentano

- sotto forma di frazione
- sotto forma di numero decimale
- sotto forma di percentuale

LE FRAZIONI

Due prerequisiti da controllare:

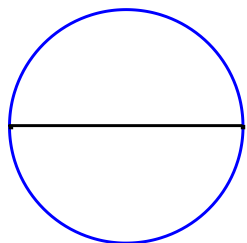
- Concetto di **intero** e **non intero**
(es. La tua merendina è intera? La cancellina che stai usando è intera?)
- Concetto di **frazionare in parti uguali**
fare molti esercizi concreti sulla differenza tra dividere a caso (es. un piatto che si rompe) e dividere in parti uguali.

N.B.: Parti uguali: può essere ambiguo. Cosa deve essere uguale?

LE FRAZIONI: come parte dell'unità

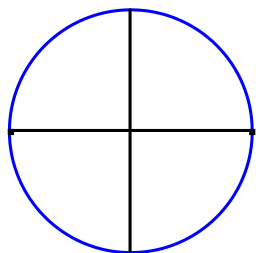
Primi passi:

a) Far dividere a metà: di quante parti è fatta la figura?



le parti sono due $\longrightarrow$ ogni parte si chiama $\frac{1}{2}$

b) Far dividere le metà a metà



le parti sono quattro $\longrightarrow$ ogni parte si chiama $\frac{1}{4}$

.....

LE FRAZIONI: come parte dell'unità

Occorre fare numerose esperienze concrete frazionando figure, quantità di oggetti come matite, fogli..., per arrivare al concetto di **unità frazionaria**, cioè una sola di quelle parti in cui è stato diviso l'intero.

Dall'unità frazionaria si arriva al significato della frazione.

Cosa significa « Ho preso $\frac{3}{5}$ della torta » ? Ho diviso la torta in 5 parti e ne ho prese 3

In generale cosa vuol dire $\frac{a}{b}$? b denomina in quante parti è diviso l'intero (**denominatore**), a indica il numero delle parti da prendere (**numeratore**)

LE FRAZIONI: come parte dell'unità

A questo punto è utile porre una domanda:

cosa vuol dire $\frac{6}{5}$?

Ha senso dire «Ho preso $\frac{6}{5}$ di torta»?

Guidando la discussione si può arrivare a riconoscere che, perché la frase abbia senso, sono necessarie due torte.

Allora ha un significato anche «Ho preso $\frac{5}{5}$ di torta»

Attraverso un processo di osservazione e di descrizione, si può arrivare a dare nomi nuovi a certe situazioni che si ripetono, si può arrivare insieme, cioè, alla definizione di frazione **propria**, **impropria** e **apparente**

LE FRAZIONI

Frazione propria: il numeratore è minore del denominatore.

Frazione impropria: il numeratore è maggiore del denominatore ma non è multiplo di esso.

(La denominazione è dovuta al fatto che ognuna di esse è maggiore dell'unità frazionata in parti uguali).

Frazione apparente: il numeratore è multiplo del denominatore

(Questo perché apparentemente si tratta di frazioni. Esse sono in realtà equivalenti ai numeri interi che si ottengono dividendo il numeratore per il denominatore).

Un interessante collegamento (ad uso dei docenti)

Una frazione impropria 'contiene' almeno un intero.

$$\text{Es.: } \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}; \quad \frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

Ritroviamo, in altra forma, la divisione con il resto!

$$\text{Infatti: } 7 = 6 \times 1 + 1$$

Dividiamo ambo i membri per 6 (grazie ad una proprietà delle uguaglianze)

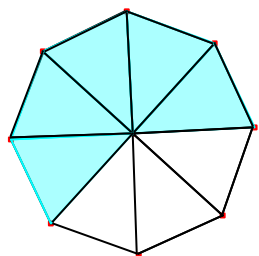
$$\frac{7}{6} = \frac{6 \times 1 + 1}{6}$$

e applichiamo la proprietà distributiva:

$$\frac{7}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$

LE FRAZIONI

Un altro percorso del tipo *osservare - descrivere - definire* può essere fatto per arrivare alla definizione di **frazione complementare**.



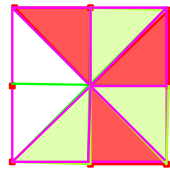
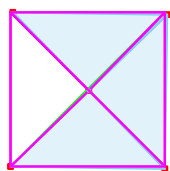
- In quante parti uguali è divisa la figura?
- Quale frazione rappresenta la parte colorata?
- Quale frazione rappresenta la parte bianca?
- Cosa noti?

Con numerose osservazioni e le relative descrizioni si può arrivare alla definizione:

Due frazioni si dicono complementari se sommate danno l'intero.

LE FRAZIONI

Ancora un possibile percorso per arrivare ad una definizione:



Osserviamo le due figure:

- Frazione colorata della prima: $\frac{3}{4}$
- Frazione colorata della seconda: $\frac{6}{8}$

Ma le parti colorate sono uguali!

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$$

(applicando la proprietà invariantiva della divisione)

Si può arrivare da qui alla definizione di **frazioni equivalenti**

LE FRAZIONI

Possiamo dire che

- Due frazioni si dicono equivalenti se, operando con esse su una stessa grandezza, si ottengono grandezze tra loro congruenti.

E, osservando i numeri:

- moltiplicando o dividendo una frazione per uno stesso numero (diverso da 0) si ottiene una frazione equivalente a quella data.

Ma possiamo anche osservare che $6 \times 4 = 3 \times 8$, cioè moltiplicando tra loro il numeratore della prima con il denominatore della seconda e viceversa, otteniamo lo stesso risultato (e questo è bene sia confermato da numerose osservazioni). Quindi, generalizzando:

- $\frac{a}{b}$ è equivalente a $\frac{c}{d}$ se $a \times d = b \times c$

FRAZIONI COME OPERATORI

Fino ad ora abbiamo applicato le frazioni a grandezze o oggetti; è possibile applicarle ai numeri?

Esaminiamo i passi:

1. Dato un intero lo dividiamo in tante parti quante ne denota il denominatore
2. Prendiamo poi tante parti quante ne indica il numeratore.

Riconoscere l'azione che compie una frazione vuol dire riconoscere la frazione come **operatore .**

Possiamo allora ripetere il procedimento su un numero:

calcoliamo i $\frac{5}{8}$ di 32

1. $32 : 8 = 4$

2. $4 \times 5 = 20$  $(32 : 8) \times 5 = 20$

N.B.: soprattutto all'inizio è bene accompagnare ogni calcolo con una rappresentazione, magari derivante dal testo di un problema.

FRAZIONI COME OPERATORI

E' possibile a questo punto risolvere problemi del tipo:

«Nella scuola di Alessandro ci sono 180 alunni, di cui $\frac{4}{9}$ sono maschi. Qual è il numero dei maschi? Quale quello delle femmine?»

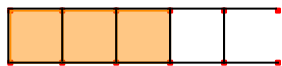
«La mamma ha dato $\frac{2}{5}$ di 55 euro a Giovanni per fare la spesa. Se Giovanni aveva già in tasca 19 euro, quanti soldi ha adesso?»

Ma se il problema è il seguente come si può procedere?

«Domani andranno in gita 315 bambini, cioè $\frac{3}{5}$ di tutti i bambini della scuola. Quanti sono i bambini della scuola? Quanti bambini non andranno in gita domani?»

FRAZIONI COME OPERATORI

È necessaria una rappresentazione, anche schematizzata:



L'intero è diviso in 5 parti e la parte colorata
rappresenta la frazione $\frac{3}{5}$.

Ma la parte colorata corrisponde anche al
numero 315.

Come procedere per trovare l'intero?

Facciamo la divisione: $315 : 3 = 105$

105 è il valore corrispondente alla unità frazionaria $\frac{1}{5}$.

L'intero perciò si ottiene moltiplicando per 5 il numero corrispondente all'unità frazionaria: $105 \times 5 = 525$

In sintesi: $(315 : 3) \times 5 = 525$

La parte non colorata è rappresentata dalla frazione complementare $\frac{2}{5}$ ed il valore corrispondente si ottiene o facendo 105×2 o con una sottrazione.

UNA ATTENZIONE

A volte, per facilitare i propri alunni si è tentati di fornire degli schemi riassuntivi del tipo:

« Per trovare una parte conoscendo l'intero si divide per il denominatore e si moltiplica per il numeratore.»

«Per trovare l'intero conoscendo una parte si divide per il numeratore e si moltiplica per il denominatore»

Non è assolutamente opportuno, a meno che non sia una sintesi a cui arrivano gli alunni stessi.

Occorre comunque sempre evitare che si applichino schemi, senza che se ne sappiano dare chiare ragioni.

Oltretutto gli schemi privi di significato si dimenticano con estrema facilità!!!!

ESERCIZI

- 1) Scrivere almeno dieci multipli per ognuno dei seguenti numeri:

18, 12, 15

Riesci ad individuare tra essi un multiplo comune a tutti? In caso negativo, aumenta il numero di multipli fino ad ottenere il risultato richiesto.

- 2) Scrivere cinque frazioni equivalenti a $\frac{10}{6}$

- 3) Ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{330}{45}$. Quanti interi sono contenuti in tale frazione?

- 4) Disporre in ordine crescente i seguenti numeri, fornendo adeguate motivazioni:

$$\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, -2, \frac{5}{6}, -\frac{7}{3}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, 1, \frac{4}{3}$$

- 5) Inserire almeno 4 numeri razionali tra $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{4}$

- 6) Inserire almeno 2 numeri razionali tra $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$

ESERCIZI

7) Scrivere tutti i divisori dei numeri:

240, 75, 180

Qual è il divisore più grande comune a tutti e tre i numeri

8) Scrivere un numero primo maggiore di 150

9) Scrivere una coppia di numeri, nessuno primo, ma primi tra loro.

10) Trovare due frazioni la cui somma(algebrica) sia $-\frac{3}{5}$

11) Trovare due frazioni il cui prodotto sia $-\frac{8}{15}$

12) Costruire una rappresentazione del seguente problema e corredarla con la sua risoluzione:

« Antonio va a scuola in bicicletta e a piedi; va in bicicletta fino all'ufficio del padre, poi lascia la bici e prosegue a piedi. Se il tratto a piedi è lungo 300 m e quello in bici è $\frac{3}{5}$ del totale, quanta strada fa Antonio in bicicletta?»

13) Portare esempi di equazioni risolvibili

- a) solo nei razionali b) nei razionali e negli interi, ma non nei naturali
- c) anche nei naturali.

14) Cosa si può dire della risolubilità delle equazioni di secondo grado?