

METODI E TECNOLOGIE PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Lezione n°9

The background of the slide features a faint, light green illustration of several interlocking gears, symbolizing mathematics or mechanics.

Le azioni del fare matematica

SBAGLIARE

SBAGLIARE E' UN'AZIONE.

“Sbagliando si impara”: questa frase di origine medievale (*errando discitur*), che chiunque di noi si è sentito ripetere fin dalle prime ore di Scuola Elementare, il più delle volte sortisce una specie di consolazione a chi, avendo commesso degli errori, ha ottenuto un insuccesso.

Essa tuttavia conserva un principio pedagogico importante nell'attività dell'insegnamento, perché considera l'azione “**commettere errori**” come **parte dell'apprendimento** e non qualcosa che lo contraddice o lo blocca.

L'atteggiamento che, invece, **ostacola** lo sviluppo cognitivo - e quindi l'apprendimento della matematica come delle altre discipline - è **accettare l'azione inconsapevole**

PROLOGUE ERROR

IL LIVELLO DELLA STRUMENTAZIONE

Errori “di distrazione” o sbagli

Questo tipo di errore è il meno grave e il più frequente, perché è al livello della *strumentazione*: esso non rivela infatti incapacità o difficoltà nella formazione dei concetti, nell'uso dei simboli, nell'argomentazione o in tutto ciò che riguarda l'organizzazione complessiva della struttura del pensiero.

E' legato più al livello *emotivo*, della *precipitazione*, della *disattenzione*, del *disordine* o della *superficialità*, che non a quello cognitivo. Compare soprattutto nelle verifiche a scuola, più che nei lavori *di* routine o nei compiti a casa, e forse per questo qualcuno preferisce chiamarli “*sbagli*” più che errori, per distinguerne l'origine psicologica da quella cognitiva.

COME CONTRASTARLI

Sradicarli non è un compito banale e non sempre si ottengono successi.

L'attacco va condotto sul piano del lavoro e sulla modalità con cui ogni allievo si pone di fronte a ciò che viene richiesto.

E' vero che è necessario l'esercizio, inteso però non come addestramento, ma come conquista del modo "giusto" nell'uso delle cose

IL LIVELLO DEL SENSO

Errori “gravi”

La gravità di un errore è determinata dalla profondità dell'origine cognitiva da cui esso ha origine: per questo *gli errori di senso* sono gravi. Essi rivelano “uno smarrimento profondo della persona” per cui si è incapaci o non più capaci di dar luogo a un oggetto in sé ragionevole.

Nella lingua essi si manifestano nell'uso errato dei nessi causali, in matematica possono assumere molte forme: scambiare sistematicamente, nei problemi, la sottrazione con la divisione; nelle equivalenze tirare a caso sui posti e sul senso del cambio della virgola, nelle dimostrazioni scambiare l'ipotesi con la tesi

Atteggiamento generatore di errori gravi: *abitudine* (o rassegnazione) ad *agire inconsapevolmente*, ripetendo semplicemente e acriticamente una serie di “comportamenti matematici”, staccati dal loro scopo e dalla loro ragionevolezza.

Errori provocati da questo atteggiamento vanno dall'*incomprensione* parziale o totale dei termini, delle definizioni, del testo di un problema, di un teorema, fino all'impostazione sbagliata di una risoluzione o una dimostrazione.

E' assente una logicità in quello che si legge o che si fa, non c'è più il *senso* che sta sotto l'applicazione delle regole, ovvero la *persona stessa non è più coinvolta*.

LA RINUNCIA AL SENSO

- Non aderire in modo adeguato ai dati, al contesto del lavoro, alle informazioni di cui si dispone
- Uso errato o limitato delle parole e ostilità alla correzione
- “Manipolazione” dei dati per adattare la realtà ai propri schemi
- Difficoltà nella rappresentazione
- “Automa matematico”

NOTA BENE

Talvolta anche alcuni “sbagli” possono avere una radice profonda e, se non adeguatamente o puntualmente corretti, possono degenerare in errori di senso. L'intervento adeguato e tempestivo sugli errori più lievi quindi eviterebbe l'aggravarsi di quelle che sono ancora solo sviste.

Errori “positivi”

Si possono considerare “positivi” quegli errori che si commettono manipolando strumenti nuovi avendo come riferimento le conoscenze già acquisite, ovvero *esplorando*.

Lo sbagliare in questo caso *è un’azione connessa* ad attività positive, *a un movimento di apertura* della mente e della persona.

Esso è conseguenza di provare, ricercare, intraprendere, tentare, intuire, ipotizzare, riconoscere, collegare: la persona sta scendendo in campo con le proprie risorse, per affrontare qualcosa di ancora ignoto.

- In tale situazione **sbagliare** è come **domandare**, e non rappresenta un ostacolo nel processo di conoscenza: piuttosto manifesta iniziativa e inventiva e talvolta gli errori stessi sono veramente interessanti.
- Un atteggiamento **punitivo** o mortificante da parte dell'insegnante causerebbe in questo caso un **freno** all'intraprendenza, e chiuderebbe la domanda che proprio in quel momento sta sorgendo.
- Diverso invece dovrebbe essere l'atteggiamento se l'errore è dovuto ad una **incapacità** da parte dello studente di **staccarsi dagli schemi** precedentemente acquisiti per affrontare situazioni nuove.

Errori “negativi”

Sono quegli errori che si creano nel momento in cui c'è la fase di *riflessione e fissazione* dei nuovi concetti acquisiti, l'*elaborazione* nei dettagli di ciò che si è conquistato sinteticamente, la precisazione analitica dei termini e della struttura delle questioni; è il momento in cui si opera per stabilizzare le conoscenze, fissare correttamente i contenuti, memorizzare, in sintesi *assimilare*.

In questo caso *l'errore evidenzia una mancanza*, un ostacolo nel processo di apprendimento, e per questo si può chiamare “negativo”.

Dal punto di vista del ragazzo, tuttavia, il problema è *ammettere i propri errori e accettarne la correzione*, lasciandosi aiutare nella corretta comprensione e nella rimozione delle cause, che non sempre riesce ad identificare da solo.

Diagnosi dell'errore

L'errore è un “sintomo” che può riferirsi a “patologie” assai diverse

La prima attenzione da avere è *osservare costantemente e con precisione gli errori* che si manifestano nel lavoro scolastico, come un dottore che tenga sotto controllo i sintomi di una patologia.

Solo così infatti è possibile *indirizzare efficacemente il proprio intervento.*

- Distinguere l'errore di *strumentazione* dall'errore di *senso*
- Riconoscere che l'errore dipende da un *atteggiamento di fondo* (che quindi non riguarda solo singoli segmenti nell'apprendimento della matematica, bensì evidenzia un “vizio” nel processo di assimilazione): la persona *si rassegna* ad imparare, assimilare, *a ripetere schemi* di comportamenti matematici quasi inconsapevoli, rinunciando a porsi la domanda sulla vera identità di quello che adopera

Terapia dell'errore

STRADA MAESTRA: rendere gli errori fonte di autocoscienza

STRUMENTI:

- costruire verifiche ad hoc
- costruire attività di recupero che guidino la comprensione a partire dal punto in cui si è interrotta
- cambiare il punto di vista dal quale si guarda il problema

"CHI NON FA SBAGLIA SEMPRE"

Sbagliare è connesso a rischiare, azione che è profondamente coinvolta con l'esperienza della libertà.

La matematica dell'incertezza: dati e previsioni

- Le indagini statistiche
- La probabilità

«Stampando una notizia a grandi lettere, la gente pensa che sia indiscutibilmente vera.»

è stato affermato, anni fa, da un giornalista

- Come orientarsi?
- Come scegliere le notizie utili da quelle inutili?
- Come imparare a usare le informazioni per fare le proprie valutazioni e scelte?
- Come valutare il grado di attendibilità di una affermazione?

Essere educati, fin da piccoli, a leggere dati, a interpretare , a valutare l'attendibilità di informazioni: è l'aiuto che si può dare con attività relative al nucleo 'Dati e previsioni'

Indagini statistiche: alcuni nomi

- **Popolazione statistica**: l'insieme degli elementi oggetto di studio
- **Unità statistica**: ogni elemento della popolazione statistica
- **Variabile statistica (o carattere statistico)** : è ciascuno degli aspetti di una unità statistica (es. colore dei capelli, età....)

Una variabile statistica può essere:

- **qualitativa**: è espressa da una qualità, come sesso, colore, tipo di scuola frequentata....
- **quantitativa**: è espressa da un numero, come peso, età, reddito.....

Esempio

La tabella qui a fianco si riferisce all'indagine svolta in una classe sui mesi di nascita.

Popolazione statistica: gli studenti della classe.

Unità statistica: ogni studente

Variabile statistica: mese di nascita

È una variabile **qualitativa**!

					X			X			
	X				X			X			
	X				X			X			X
X	X	X			X	X		X		X	X
X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X
Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic

DEFINIZIONI

Frequenza assoluta: il numero di unità statistiche che assumono la stessa modalità

Nell'esempio: la frequenza della modalità 'febbraio' è 4

Frequenza relativa: il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero di unità della popolazione

Nell'esempio: la frequenza relativa della modalità 'febbraio' è $\frac{4}{28}$

INDICI STATISTICI 1

L'indice statistico è un elemento di sintesi, non certamente esauriente, dell'indagine

Moda: è la modalità a cui corrisponde la frequenza maggiore

-La moda si può determinare sia con variabili qualitative che con variabili quantitative.

-Una distribuzione di frequenze si dice **unimodale**, se presenta una sola moda, altrimenti si dice **plurimodale**

*La distribuzione dell'esempio precedente è plurimodale, e le mode sono: **giugno e settembre***

INDICI STATISTICI 2

(solo per caratteri quantitativi)

Supponiamo che la seguente lista rappresenti l'insieme dei voti presi dagli studenti di una classe in matematica:

4; 4; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 10

(La popolazione statistica è costituita da 23 unità)

Media: $\frac{\text{somma di tutti i numeri}}{\text{numero degli elementi sommati}}$

Nell'esempio: $\frac{4+4+5+5+5+5+6+6+6+6+6+6+7+7+7+7+8+8+8+8+9+9+10}{23} = \frac{152}{23} \approx 6,6$

Mediana: in un insieme ordinato di numeri è l'elemento centrale se i dati sono in numero dispari, la media aritmetica dei due termini centrali se gli elementi sono in numero pari

Nell'esempio: la mediana è **6**

NOTA BENE

Se i dati sono forniti già raggruppati, come nel seguente esempio:

Numero residenti nell'abitazione	1	2	3	4	5	6
Numero di abitazioni	19	49	57	75	45	15

e si vuole sapere quanti residenti in media per abitazione, la media aritmetica si può calcolare come **media ponderata**:

$$\text{media ponderata} = \frac{1 \times 19 + 2 \times 49 + 3 \times 57 + 4 \times 75 + 5 \times 45 + 6 \times 15}{19 + 49 + 57 + 75 + 45 + 15}$$

ESEMPI DI ATTIVITÀ

Nel supporto 4.2 ne sono riportate molte:

- Indagine sul titolo di studio dei genitori
- Indagine sul numero di componenti della famiglia
- Esame di tabelle di dati su cui calcolare gli indici statistici
-

The background of the slide features a faint, light green pattern of interlocking gears, suggesting a mechanical or systematic theme.

PROBABILITÀ

Valutare

Innanzitutto è necessario educare a riconoscere il grado di validità di una affermazione:

Affermazione	Validità
$2+2=4$	certa
Domani pioverà	possibile
Gli asini volano	impossibile

Delle affermazioni possibili, si può dire quanto sono possibili? Quali sono maggiormente possibili?

Il calcolo delle probabilità nasce per rispondere a questo tipo di domande.

Non tutte le situazioni sono però sottoponibili a quantificazione.

DEFINIZIONI

Dato un fenomeno(es. lancio di un dado) si dice:

Esito: ogni risultato del fenomeno (es. esce 1, 2, 3, 4 ,5, 6)

Evento: un insieme di esiti(es: esce un numero pari)

Casi possibili: tutti i possibili esiti

Casi favorevoli: esiti che verificano l'evento in esame

Si dice **probabilità (classica) di un evento E**, e si indica con **p(E)**, il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili (supposti equiprobabili)

$$p(E) = \frac{\text{numeri casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

Es.: E= esce un numero pari $\longrightarrow p(E) = \frac{3}{6}$

QUINDI.....

Dato un certo fenomeno è importante innanzitutto stabilire quali sono gli esiti.

Esempio: se lanciamo tre monete, quali sono le possibili configurazioni?

TTT	TTC	TCT	CTT	TCC	CTC	CCT	CCC
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Successivamente, stabilito qual è l'evento, individuare quali e quanti sono i casi possibili e i casi favorevoli

Esempio: E=escono esattamente due teste. Casi possibili: 8; casi favorevoli : 3

Ora si può calcolare la probabilità

Esempio: $p(E) = \frac{3}{8}$

ESEMPI DI ATTIVITÀ(supporto 4.2)

Una attività interessante può essere costituita dal confronto tra la valutazione di probabilità e ciò che accade realmente. Si confronterà quindi la probabilità teorica con la frequenza relativa dell'evento.

Esempio1: prima si pone la domanda: « data una moneta, qual è la probabilità che esca testa?». Facilmente si risponderà: $\frac{1}{2}$!

Poi si divide la classe in gruppi e si chiede ad ogni gruppo di lanciare 20 volte una moneta e registrare il numero di teste e uscite.

Si contano tutte le teste uscite, poi si calcola la

$$\text{frequenza relativa} = \frac{\text{numero teste uscite}}{\text{numero lanci}}$$

Cosa si ottiene? Cosa cambia se aumentiamo il numero di lanci?

Esempio 2: lanciamo due dadi e sommiamo i punti ottenuti. Quali somme possiamo ottenere? Qual è la somma più probabile? Qual è la probabilità di ottenere una somma multipla di 3?....

Poi si può sempre fare un confronto con una prova reale.

Esempio 3: Abbiamo 10 palline numerate da 1 a 10; qual è la probabilità che esca un numero pari?

Anche qui il confronto con la situazione reale si può facilmente fare, basta portare in classe i numeri della tombola.

DOMANDE

- È più probabile che i numeri estratti siano nell'ordine 1-2-3-4-5 oppure che siano nell'ordine 90-34-45-3-9 ?
- Se nella scorsa estrazione è uscito il 7 sulla ruota di Napoli, oggi è più probabile che, sulla stessa ruota, esca il 7 o un altro numero che non è uscito la scorsa volta?

ESERCIZI

- Rispondere alle Questioni del supporto 4.2
- Svolgere i rimanenti quesiti, relativi a Dati e Previsioni, delle Prove INVALSI fornite nella scorsa lezione.
- Esercitarsi sulle equivalenze relative alle misure di lunghezza, superficie, volume, massa, capacità, tempo.