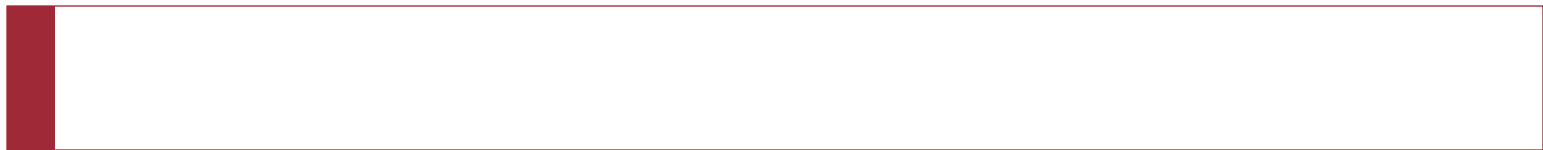
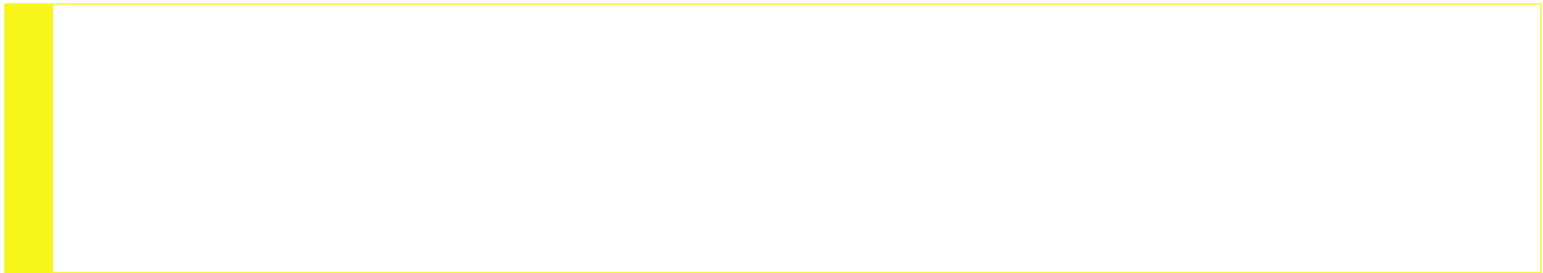


METODI E TECNOLOGIE PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

4^a LEZIONE

DALLE FRAZIONI AI NUMERI DECIMALI



FRAZIONE COME QUOZIENTE

Se riconosciamo la frazione come quoziente possiamo cercare il numero, con espansione decimale, che corrisponde alla frazione data.

Calcoliamone alcuni.

$$a) \frac{3}{5} \quad b) \frac{20}{9} \quad c) \frac{23}{20} \quad c) \frac{17}{15} \quad d) \frac{7}{8} \quad f) \frac{9}{14}$$

Cosa si può notare?



FRAZIONE COME QUOZIENTE

- ▶ Se il denominatore della frazione contiene come fattori solo 2 e/o 5 (o le loro potenze) il numero corrispondente è decimale limitato.

$$\frac{3}{5} = 0,6; \quad \frac{23}{20} = 1,15; \quad \frac{7}{8} = 0,875$$

- ▶ Se il denominatore della frazione contiene almeno un fattore diverso da 2 e 5 il numero corrispondente è decimale illimitato periodico.

$$\frac{20}{9} = 2,\bar{2}; \quad \frac{17}{15} = 1,1\bar{5}; \quad \frac{9}{14} = 0,6\overline{428571}$$



FRAZIONI DECIMALI

Tutte le frazioni del primo tipo possono essere ricondotte a frazioni con denominatore 10 o potenza di 10:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}; \quad \frac{23}{20} = \frac{23 \times 5}{20 \times 5} = \frac{115}{100}; \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \times 125}{8 \times 125} = \frac{875}{1000}$$

Le frazioni di questo tipo, che corrispondono quindi a numeri decimali limitati, sono chiamate **frazioni decimali**



Dalla frazione decimale al numero

Per trasformare una frazione decimale in numero decimale si possono seguire due strade:

- ▶ Si esegue la divisione
- ▶ Applicando la proprietà invariantiva, si porta la frazione ad avere denominatore potenza di 10; il numero decimale corrispondente è espresso dal numeratore, con la parte decimale composta da tante cifre quanti sono gli zeri del denominatore-

Es.: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$; $\frac{23}{20} = \frac{115}{100} = 1,15$; $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = 0,875$



Dal numero decimale limitato alla frazione

Dato un numero decimale limitato la frazione corrispondente è tale che:

- ▶ Il numeratore corrisponde al numero stesso in cui è tolta la virgola;
- ▶ Il denominatore è costituito da un 1, seguito da tanti zeri quante sono le cifre della parte decimale



SCUOLA PRIMARIA

I numeri "con la
virgola "



Reinvenzione guidata

Per guidare i bambini a reinventare i numeri decimali (con la virgola!) è necessario che il docente faccia per primo lui il percorso, trovi per primo lui le ragioni della necessità di tali numeri



LA MIA PROPOSTA



Prerequisito

► Cosa accade al numero se moltiplichiamo per 10?

Facendo prove ed osservazioni si arriva a riconoscere che al numero si aggiunge uno 0 come ultima cifra e quindi le cifre scorrono tutte di un posto verso sinistra

► Cosa accade al numero se moltiplichiamo per 100?

Facendo prove ed osservazioni si arriva a riconoscere che al numero si aggiungono due 0 come ultime cifre e quindi le cifre scorrono tutte di due posti verso sinistra

► Cosa accade al numero se moltiplichiamo per 1000?

.....



► E se dividiamo per 10 ?

$$150:10 = 15,$$

$$1200:10 = 120$$

Il numero perde uno zero e le altre cifre scorrono di un posto verso destra.

Ma se non ci sono zeri?

Approfondiamo il significato dell'operazione



DIVIDERE PER 10: torniamo alle frazioni

Prendiamo un bastoncino



e dividiamolo per 10, cioè in 10 parti



Se usiamo le frazioni ogni parte vale $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------



DIVIDERE PER 10: alla ricerca del numero

$$1:10$$

possiamo scriverlo come numero?

Riflettiamo: se dividendo per 10 le cifre si spostano verso destra, dovremmo *creare* qualcosa a destra della cifra dell'unità....

Mettiamo una virgola per separare e spostiamo

$$1:10 \rightarrow 0,1$$

Nel numero *0,1* la cifra *1* rappresenta la decima parte dell'unità cioè è la cifra dei *decimi*

Generalizzando: $1:100 \rightarrow 0,01$ e così via...



CONSEGUENZE

- **Corrispondenza tra numero decimale e frazione:**

$$0,3 = \frac{3}{10}; \quad 0,43 = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = \frac{43}{100}; \quad \frac{133}{10} = 13,3; \dots$$

- **Notazione posizionale:** es: 1214,543

1	2	1	4	5	4	3
migliaia	centinaia	decine	unità	decimi	centesimi	millesimi

- **Moltiplicare per 10:** spostare le cifre verso sinistra di un posto e quindi la virgola verso destra di un posto
- **Dividere per 10:** spostare le cifre verso destra di un posto e quindi la virgola verso sinistra di un posto



Alcune rappresentazioni

▶ L'abaco

▶ La linea dei numeri



Ordinamento e linea dei numeri

E' importante fare esercizi di ordinamento: qual è il più grande tra due, o mettere in sequenza dal maggiore al minore o viceversa; rinforza l'acquisizione del concetto di maggiore e aiuta il docente a riconoscere eventuali punti critici.

Se un bambino scrive: $2,37 > 2,4$ cosa non gli è chiaro? Probabilmente il sistema posizionale in relazione alle cifre decimali.

Con la linea dei numeri riconoscere quale numero è maggiore o minore è più semplice.



Nota per il docente: la scrittura polinomiale

Ovviamente è possibile estendere la scrittura polinomiale anche ai numeri decimali.

Basta ricordare che:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}$$

Quindi:

$$1214,543 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$



A caccia di numeri con la virgola!

A questo punto (o in contemporanea) vale la pena stimolare e/o valorizzare l'osservazione dei bambini.

Dove troviamo i numeri decimali?

- ▶ Le monete
- ▶ I prezzi
- ▶ I pesi negli scontrini del supermercato
- ▶ Le etichette delle bottiglie dell'acqua minerale
- ▶

Da qui nasce la necessità delle operazioni con i decimali.



ESERCIZI E GIOCHI

Materiale già strutturato può aiutare a fare delle sintesi, o a verificare gli apprendimenti; la forma del gioco è sempre una ottima risorsa! Ma attenzione agli errori o alle ambiguità!!!

È sempre necessaria una valutazione critica di ciò che si usa. Vediamo due esempi.

▶ GIOCO DELLE FRAZIONI

▶ ESERCIZIARIO RIASSUNTIVO (attenzione alle nuvolette!)



I NUMERI CON LA VIRGOLA E LE OPERAZIONI



Somma e differenza: addizione

- Per addizioni e sottrazione, grazie alla notazione posizionale, non c'è problema, basta che sia uguale il numero di cifre dopo la virgola

$$216,8 + 135,4 = ?$$

h	da	u	d	
2	1	6,	8	+
1	3	5,	4	=
3	4	11	12	
3	4	12	2	Primo cambio
3	5	2,	2	Secondo cambio

$$22,7 + 16,55 = ?$$

da	u	d	c	
2	2,	7	0	+
1	9,	5	5	=
3	11	12	5	
3	12	2	5	Primo cambio
4	2,	2	5	Secondo cambio



Somma e differenza: sottrazione

$$46,4 - 27,8 = ?$$

da	u	d		1° cambio	da	u	d		2° cambio	da	u	d	
4	6,	4	-		4	5,	14	-		3	15,	14	-
2	7,	8	=		2	7,	8	=		2	7,	8	=
										1	8,	6	



La moltiplicazione

$$27,4 \times 3,12 = ?$$

La regola è nota:

- ▶ si effettua la moltiplicazione tra i numeri senza la virgola

$$274 \times 312 = 85488$$

- ▶ si conta il numero di cifre decimali dei due addendi

$$2 + 1 = 3$$

- ▶ il numero trovato corrisponde al numero di cifre decimali del risultato

$$27,4 \times 3,12 = 85,488$$

perché?



La moltiplicazione

$$274 = 27,4 \times 10$$

$$312 = 3,12 \times 100$$

Quindi:

$$274 \times 312 = (27,4 \times 10) \times (3,12 \times 100) = (27,4 \times 3,12) \times 1000$$

Bisogna perciò dividere il risultato per 1000

il che equivale ad attribuire al risultato tre cifre decimali



La divisione

Innanzitutto è importante far scoprire che, accettando di usare la virgola (cioè ampliando l'ambiente numerico), la divisione si può sempre fare:

- ▶ sia tra due numeri naturali:

$$12:5 = 2,4$$

- ▶ sia tra due numeri decimali:

$$2,52:3,6 = 0,7$$



La divisione: come si fa

12:5

$$\begin{array}{r|l} 12,0 & 5 \\ 10 & 2,4 \\ \hline 20 & \\ 20 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

2,52:3,6 $\rightarrow$ 25,2:36

$$\begin{array}{r|l} 25,2 & 36 \\ 252 & 0,7 \\ \hline 252 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

E se la divisione non finisce?



Approssimazione

Se la divisione 'non finisce', si può approssimare il risultato

Come?

- ▶ Se la cifra successiva a quella che si vuole approssimare è 0, 1, 2, 3, 4 si approssima per difetto
- ▶ Se la cifra successiva a quella che si vuole approssimare è 5, 6, 7, 8, 9 si approssima per eccesso

Es.: 31,457 ... $\rightarrow$ 31,46; 0,023 $\rightarrow$ 0,02



LE PERCENTUALI



LE PERCENTUALI

Chiediamo agli alunni: in quali situazioni avete incontrato le percentuali?

Possibili risposte :

- ▶ ai saldi, nei negozi
- ▶ alla televisione per le elezioni
- ▶ sul libro di geografia per il territorio della regione e per la distribuzione dei lavoratori nei settori economici
- ▶



LE PERCENTUALI

Prendiamo un esempio :

Il territorio della Lombardia è formato dal 47% di pianure, dal 41% di montagne e dal 12% di colline.

P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P	P	M	M	M
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
C	C	M	M	M	M	M	M	M	M
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Questo significa che se immaginiamo il territorio della Sicilia uguale a 100, 47 parti su 100 sono pianure, 41 parti su 100 sono montagne, 12 parti su 100 sono colline. Rappresentiamo con un areogramma.

- $47\% = \frac{47}{100}$
- $41\% = \frac{41}{100}$
- $12\% = \frac{12}{100}$

LE PERCENTUALI

La percentuale corrisponde quindi ad una frazione con denominatore 100.



Utilizzare le percentuali equivale quindi ad utilizzare le frazioni.



Percentuale $\longleftrightarrow$ Frazione

- ▶ Quanto vale il 15% di 2000?

$$2000 \times \frac{15}{100} = (2000 : 100) \times 15 = 300$$

- ▶ Se su 500 pacchi postali 6 non arrivano a destinazione, qual è la percentuale di pacchi dispersi?

$$\frac{6}{500} = \frac{6 \times 2}{500 \times 2} = \frac{12}{1000} = \frac{1,2}{100} = 1,2\%$$



ESEMPI: risolviamo

1) Laura ha visto che il 25% delle sue 24 matite colorate è consumato o rotto e quindi ormai inutilizzabile. Quanti matite deve comperare Laura per completare il suo astuccio?

2) Gli alunni maschi di una classe sono 6 e rappresentano il 30% della classe stessa. Quanti sono gli alunni che formano la classe?

3) La mamma vuole comperare a Lucia un paio di scarpe sulle quali è applicato uno sconto del 40%. Se le scarpe costavano all'origine 56 euro, quanto pagherà la mamma?

4) Per la festa di compleanno di Luigi sono stati preparati 40 sandwich, dei quali 12 sono al prosciutto; qual è la percentuale di panini senza prosciutto?



LE POTENZE



LE POTENZE

Nella casa di via delle Ginestre
Sono aperte tre finestre
a ogni finestra tre bambini
Per ogni bambino tre palloncini
Sapresti dirmi quanti palloncini
Hanno in tutto quei bambini?

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\downarrow$$
$$3^3 = 27$$

All'inizio dell'anno la
segreteria ha ricevuto 5
scatoloni contenenti ciascuno
5 pacchi con 5 cd. Quanti cd
sono arrivati in tutto?

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$\downarrow$$
$$5^3 = 125$$

LE POTENZE

5³

Esponente: indica quante volte la base deve essere moltiplicata per se stessa

Base: indica il numero da ripetere



LE POTENZE: alcune particolarità

Scopriamo:

- ▶ Cosa vuol dire 7^1 ? 7 moltiplicato una sola volta, cioè 7



Ogni numero con esponente 1 resta uguale a se stesso

- ▶ $1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$; $1^6 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$



Ogni potenza con base 1 dà come risultato 1

- ▶ $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$; $0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$



Ogni potenza con base 0 dà come risultato 0

- ▶ Che vuol dire 6^0 ? $6^0 = 1$; bisogna accettarlo per vero.



Ogni numero con esponente 0 dà come risultato 1



LE POTENZE DEL DIECI

Consideriamo ora il numero 10 e vediamo le sue potenze

- ▶ $10^0 = 1$
- ▶ $10^1 = 10$
- ▶ $10^2 = 10 \times 10 = 100$
- ▶ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
- ▶ $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
- ▶ $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$
- ▶ $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$
- ▶ $10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000\,000$
- ▶ $10^8 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000\,000$
- ▶ $10^9 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000\,000$
- ▶ $10^{10} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000\,000\,000$
- ▶



LE POTENZE DEL DIECI

Cosa osserviamo?

L'esponente corrisponde al numero di zeri che seguono l'uno nel prodotto finale.

Le potenze del 10 sono molto utili perché:

- ▶ ci permettono di scrivere numeri, anche grandissimi, in forma molto più semplice.

-Velocità della luce: $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

-Distanza Terra-Sole: $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$

-Distanza Terra-Luna: $3,8 \times 10^8 \text{ m}$

- ▶ Ci permettono di fare confronti:

La distanza Terra-Sole è 10^3 volte maggiore della distanza Terra-Luna

- ▶ Ci permettono di scrivere i numeri in forma polinomiale



DALLE INDICAZIONI NAZIONALI

- ▶ Eseguire le quattro operazioni con sicurezza, valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni.
- ▶ Stimare il risultato di una operazione.



CALCOLATRICE

Quando ricorrere alla calcolatrice?

$$27 \times 45$$

► Calcolo mentale:

$$\begin{aligned} 27 \times 45 &= 27 \times 4 \times 10 + 27 \times 5 = \\ &= (20 \times 4 + 7 \times 4) \times 10 + (20 \times 5 + 7 \times 5) = \\ &= (80 + 28) \times 10 + 100 + 35 = 108 \times 10 + 100 + 35 = \\ &= 1080 + 100 + 35 = 1215 \end{aligned}$$

► E se usiamo la calcolatrice? Prima stimare il risultato!!!

$$20 \times 40 < 27 \times 45 < 30 \times 50$$

$$800 < 27 \times 45 < 1500$$



Esempio di stima

- ▶ *“Voglio fare una moltiplicazione con voi: io vi dico il primo fattore, è 60, voi dovete trovare il secondo fattore: può' essere qualsiasi numero escluso lo zero. Ma attenzione! Il prodotto dovrà essere minore del numero che dico io. Vince chi riesce ad ottenere il prodotto più piccolo del numero che vi ho detto, ma anche più vicino ad esso.”*



ESERCIZI

1) Carlo e Maria praticano due sport diversi: equitazione il primo e nuoto la seconda. Nel corso dell'anno Carlo ha vinto 7 gare su 20, mentre Maria ne ha vinte 10 su 25.

Chi dei due è stato più abile?

2) Disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$1,15 ; \frac{3}{100} ; \frac{11}{10} ; 0,035 ; 2,48 ; \frac{7}{8} ; \frac{5}{4} ; 0,75 ; 2,7 ; \frac{11}{4}$$

3) Senza calcolare, stabilire se $\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)$ è maggiore o minore di 2

4) Trasformare in frazioni i seguenti numeri decimali e poi disporle in ordine crescente:

$$2,03 ; 1,4 - \frac{3}{10} ; 0,753 ; 6,04 - \frac{2230}{1000} ; 0,043 ; 2,043 - 0,12 ; 5,12 ; 7,8 - \frac{224}{100}$$

5) Calcolare le operazioni contenute nelle slide, ad eccezione delle divisioni, con i numeri in forma polinomiale.

6) Un oggetto ha un prezzo iniziale di 100 euro; prima viene aumentato del 10% , poi viene diminuito del 10% del prezzo raggiunto. Il prezzo finale è uguale all'inizio? E se inverto l'ordine delle operazioni?

7) Costruire un problema con l'uso delle percentuali e risolvibile con tre operazioni.

