

MODULO 2/2
- FRAZIONI E PERCENTUALI -
(Supporto didattico)

1. Le frazioni potrebbero essere introdotte come un altro modo di scrivere i numeri decimali, ma preferiamo seguire una strada diversa. Introdurle autonomamente e successivamente spiegare che ad ogni frazione corrisponde un numero decimale.

Agli alunni sarà pure spiegato che le percentuali non sono oggetti strani ma modi diversi di scrivere una frazione. Cosa questa che non è ben chiara a tutti (e non parliamo solo di studenti di scuola primaria).

Ma procediamo con ordine, precisando che ciò che andiamo ad esporre è solo un modo di procedere, non certamente l'unico e non necessariamente il migliore.

Per introdurre le frazioni il docente si munisce di un oggetto che possa essere suddiviso in un certo numero di parti uguali (la suddivisione è effettiva, non immaginata). Potrebbe trattarsi di un cartoncino circolare o meglio di due cartoncini circolari uguali, che l'insegnante ha provveduto a suddividere uno in 4 settori uguali e l'altro in 8 settori uguali (fig. 1). Con un po' di immaginazione, si può anche pensare alla classica torta.

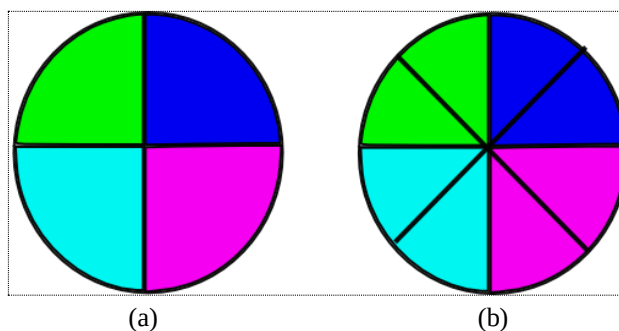


fig. 1

Nel primo caso (fig. 1a - suddivisione in 4 parti uguali) si dice che ognuna delle 4 parti è *un quarto* dell'intero cartoncino circolare (o *un quarto* della torta). Nel secondo caso (fig. 1b – suddivisione in 8 parti uguali) si dice che ognuna delle 8 parti è *un ottavo* dell'intero cartoncino (o della torta).

In maniera analoga, se il cartoncino (la torta) fosse stato suddiviso in due, tre, cinque, ... parti uguali ognuna di esse si sarebbe detta *un mezzo*, *un terzo*, *un quinto*, ... dell'intero cartoncino (della torta).

Allo stesso modo, se invece di prendere una sola parte del cartoncino suddiviso in 4 parti uguali, se ne prendono due, o tre, o quattro, si dice che sono stati presi i *due quarti* o i *tre quarti* o i *quattro quarti* del cartoncino.

Analogamente, nel caso della suddivisione in 8 parti uguali, si possono prendere i *due ottavi*, i *tre ottavi*, ...

Si pone il problema di scrivere queste nuove quantità. Per esempio *tre quarti* si scrive:

$$\frac{3}{4},$$

mettendo al di sopra di una lineetta il numero 3, che indica il numero delle parti che si sono prese, e sotto la lineetta il numero 4 delle parti in cui è stato suddiviso l'intero cartoncino (la torta).

A volte si scrive pure:

$$\frac{3}{4}.$$

Questo nuovo simbolo si chiama **frazione**. La lineetta si denomina *linea di frazione*, il numero che sta sopra di essa si chiama *numeratore* e quello che sta sotto *denominatore*.

2. Si può far notare che un quarto del tutto (fig. 2a) è equivalente a due ottavi del tutto (fig. 2b).

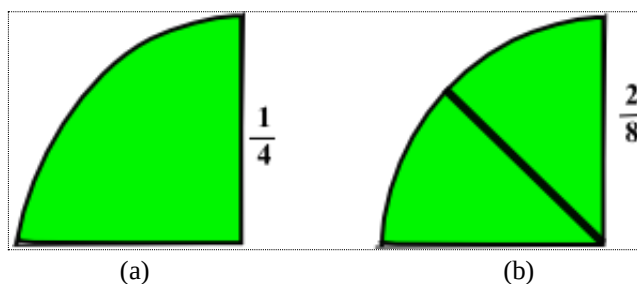


fig. 2

Questo autorizza a scrivere:

$$\frac{1}{4} \equiv \frac{2}{8}.$$

Si legge: “un quarto è equivalente a 2 ottavi”.

Analogamente:

$$\frac{3}{4} \equiv \frac{6}{8}.$$

Si legge: “3 quarti è equivalente a 6 ottavi”

Si può far notare un'altra cosa e precisamente che in due frazioni equivalenti i prodotti incrociati sono uguali. Vale a dire: $1 \times 8 = 2 \times 4$ nel primo caso; $3 \times 8 = 4 \times 6$ nel secondo caso.

Si accetta questo fatto come **regola generale**.

Si può continuare con il confronto di due frazioni e constatare che, per esempio:

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{8}; \quad \frac{7}{8} > \frac{2}{4}.$$

Ed inoltre, nel primo caso: $3 \times 8 > 4 \times 5$, nel secondo: $7 \times 4 > 8 \times 2$. Ed anche questo si assume come **regola generale**.

Uguualmente per la relazione “<” (minore).

Attenzione! È assai frequente sentir dire che $\frac{2}{3} < \frac{5}{11}$ dal momento che $2 < 5$.

Bisogna correggere subito questo errore, richiamando all'applicazione della regola generale. Solo così si evita il formarsi di misconcetti che poi, in futuro, è assai arduo eliminare.

Se e quando tali regole saranno ben chiare, possono essere proposti agli alunni interrogativi:

- Di due frazioni aventi uguale denominatore qual è la maggiore?
- Di due frazioni aventi uguale numeratore qual è la maggiore?

Trova inoltre spiegazione la cosiddetta **proprietà invariantiva delle frazioni**:

Se il numeratore ed il denominatore di una frazione sono moltiplicati per uno stesso numero diverso da 0 si ottiene una nuova frazione equivalente a quella data. Così pure se si dividono il numeratore ed il denominatore per un loro divisore comune.

Per esempio:

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{2 \times 4}{3 \times 4}, \text{ vale a dire: } \frac{2}{3} \equiv \frac{8}{12}; \text{ infatti: } 2 \times 12 = 3 \times 8;$$

$$\frac{6}{15} \equiv \frac{6:3}{15:3}, \text{ vale a dire: } \frac{6}{15} \equiv \frac{2}{5}; \text{ infatti: } 6 \times 5 = 15 \times 2.$$

Esercizi che si possono proporre agli alunni:

Completa le seguenti equivalenze:

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{\quad}{6}, \quad \frac{2}{3} \equiv \frac{\quad}{12}, \quad \frac{4}{5} \equiv \frac{\quad}{15}, \quad \frac{2}{7} \equiv \frac{8}{\quad}, \quad \frac{3}{5} \equiv \frac{9}{\quad}.$$

3. Ci sono alcuni ostacoli che bisogna superare.

a) In effetti il primo non è neppure un ostacolo.

Supponiamo di dividere l'intero in 4 parti uguali e di prenderle tutte e 4, oppure di dividerlo in 8 parti uguali e di prenderle tutte e 8. In entrambi i casi è come se prendessimo l'intero medesimo (anche se adesso è spezzettato). Per cui ha senso scrivere:

$$\frac{4}{4} \equiv 1, \quad \frac{8}{8} \equiv 1.$$

E così pure in tutti i casi in cui il numeratore è uguale al denominatore.

b) Un po' più ostico può rivelarsi il secondo ostacolo.

Supponiamo di dividere l'intero in un numero qualsiasi di parti uguali (4, 8, ...) e di prenderne 0. È come se non si fosse preso nulla, cioè per l'appunto 0. Dunque:

$$\frac{0}{4} \equiv 0, \quad \frac{0}{8} \equiv 0.$$

Analogamente in tutti i casi in cui il numeratore è 0, **ma il denominatore è diverso da 0.**

c) Abbiamo precisato sopra, sia nell'ultimo esempio sia implicitamente anche nella proprietà invariante, che il denominatore deve essere diverso da 0. Perché? Ecco, questo è il caso più delicato e bisogna affrontarlo con calma.

Ha senso dividere l'intero in 2 o 3 o 4 ... parti uguali. Tutto sommato ha anche senso supporre di dividerlo in una sola parte, ma per il momento tralasciamo questo caso. Ma che senso avrebbe dividere l'intero in 0 parti? Evidentemente nessun senso. (Ripetiamo: non è un concetto semplice per bambini di 9-10 anni). Questo ci autorizza a dire che **NON** hanno senso le frazioni con denominatore 0. **NON esistono frazioni con denominatore 0.**

4. Le frazioni prese in esame fin qui sono tali che in esse il numeratore non supera il denominatore. In realtà sembrerebbe non aver senso una frazione come $\frac{5}{4}$ che lasci intendere che si debbano prendere più parti (nel caso specifico 5) di quante ne sono state ottenute con una divisione dell'intero in parti uguali (nel nostro caso 4). Se tuttavia si suppone di avere, per esempio, 2 interi (2 torte), entrambe divise nello stesso numero di parti uguali (per esempio 4), allora ha senso prendere i cinque quarti di una torta. Sarebbe come prendere i 4 quarti di una (cioè l'intera torta) ed un quarto dell'altra. In questo modo si ottiene una frazione in cui il numeratore è maggiore del denominatore:

$$\frac{5}{4}.$$

Ecco allora che le frazioni si possono classificare, suddividendole in due categorie: *frazioni proprie* e *frazioni improprie*.

- Si dicono **frazioni proprie** quelle in cui il numeratore è minore del denominatore.
- Si dicono **frazioni improprie** quelle in cui il numeratore è maggiore del denominatore ma non è multiplo di esso.

La denominazione, si capisce bene, è dovuta al fatto che ognuna di esse è maggiore dell'unità frazionata in parti uguali.

- Le frazioni in cui il numeratore è multiplo del denominatore sono dette **frazioni apparenti**.

Questo perché apparentemente si tratta di frazioni. Esse sono in realtà equivalenti ai numeri interi che si ottengono dividendo il numeratore per il denominatore.

Per esempio:

$$\frac{4}{4} \equiv 1, \quad \frac{4}{1} \equiv 4, \quad \frac{6}{2} \equiv 3, \quad \frac{12}{3} \equiv 4, \dots$$

5. Ci si può spingere oltre con le frazioni, proponendo agli alunni semplici somme. Ma per questo è opportuno operare gradualmente.

Per cominciare si possono proporre questioni in cui, disegnato un quadrato o un rettangolo ripartito in quadratini – per esempio 16 quadratini se si tratta di un quadrato (fig. 3) o 20 quadratini se si tratta di un rettangolo (fig. 4) – si chiede loro di colorare (come vogliono) i $\frac{7}{16}$ (nel caso del quadrato) o i $\frac{13}{20}$ (nel caso del rettangolo). Quindi si procede con le domande: quanta parte della figura rimane scoperta, cioè non colorata?

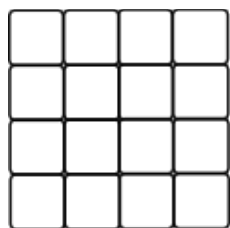


fig. 3

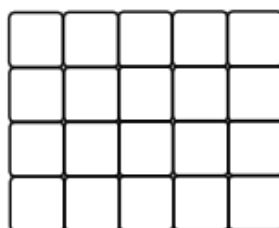


fig. 4

A conclusione del discorso si può chiedere agli alunni:

Secondo voi hanno senso le seguenti somme e se sì quanto valgono?

$$\frac{7}{16} + \frac{9}{16}, \quad \frac{13}{20} + \frac{7}{20}.$$

Si può estendere la discussione a somme che non sono uguali ad 1, purché le frazioni che si sommano abbiano lo stesso denominatore.

In parole povere, con quest'attività o con attività equivalenti si spera che possa scaturire la regola che permette di sommare due frazioni aventi lo stesso denominatore.

Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore, il modello della suddivisione in quadratini non funziona più. Per prima cosa, infatti, bisogna far sì che le frazioni abbiano lo stesso denominatore e per questo si può ricorrere alle frazioni equivalenti. Non è semplice, tuttavia, e nemmeno banale per bambini di 9-10 anni trovare un numero che sia multiplo comune di due numeri dati, specialmente se questo dovesse essere il minimo comune multiplo. Nondimeno il

prodotto dei due numeri come loro multiplo comune potrebbe essere accettato senza tante storie. Conviene allora accontentarsi di questo senza accennare al minimo comune multiplo.

Per esempio:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4}{24} + \frac{6}{24} = \frac{10}{24}.$$

La sottrazione di due frazioni non presenta difficoltà diverse da quelle dell'addizione.

Più complesso è il discorso riguardante la moltiplicazione e la divisione di due frazioni. Nel senso che non è semplice capire come saltano fuori le regole per tali operazioni, regole che fortunatamente sono assai semplici e che ogni insegnante conosce.

Molti esperti ritengono che il materiale strutturato possa risolvere la questione della comprensione. Quello già citato di Maria Pia Saitta, cioè il “Contafacile”, è uno dei tanti materiali. Altro materiale è stato prodotto da Ennio Monachesi ed anche questo è rintracciabile sul web¹. Altri ritengono che il problema possa persistere anche con l'uso di materiale strutturato. Ad ogni buon conto, tentar non nuoce e utilizzare quel materiale può essere effettivamente produttivo. Lasciamo la decisione agli interessati.

Comunque vadano le cose è però consigliabile non insistere con esercizi in cui le operazioni richieste siano complicate.

È piuttosto opportuno richiamare l'attenzione degli alunni su errori come questo:

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{3 \times 5};$$

naturalmente quando commettono effettivamente l'errore.

L'errore si evita se, ogni volta che si moltiplica un numero intero per una frazione, come nel caso precedente, si pensa al numero intero come ad una frazione che ha 1 al denominatore (ed ovviamente il numero stesso al numeratore). Per cui, tenendo presente questo fatto (e la regola generale) si ha:

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5}.$$

6. Fin qui abbiamo mostrato un aspetto della frazione: la frazione intesa come **operatore** su una grandezza.

Ripercorriamo brevemente quanto abbiamo fatto vedere: siamo partiti da un intero e lo abbiamo supposto suddiviso in parti uguali (dove per “intero” si intende un qualcosa che si considera un tutt'uno, come una torta, un sacchetto di confetti, un'asta, un cerchio, ecc.). Ciascuna delle parti uguali, indipendentemente dal loro numero, si chiama *unità frazionaria*. Cosicché sono unità frazionarie:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Abbiamo poi introdotto la “frazione” generica, per esempio $3/4$, la quale, *operando* per l'appunto sull'intero, lo divide in 4 parti uguali e ne prende 3. Oppure, ma con significato equivalente, somma 3 unità frazionarie uguali ad $1/4$, cioè $1/4 + 1/4 + 1/4$.

Ci sono altri due aspetti della frazione che occorre evidenziare:

- la frazione intesa come **rapporto** (o **quoziente**) di due numeri naturali;

¹ <http://www.monachesi.it>

- la frazione intesa come **rappresentante di un numero razionale**.

Ce ne vogliamo occupare, partendo dalla frazione intesa come “rapporto di due numeri naturali”. Per questo riprendiamo la rappresentazione dei numeri decimali sulla retta numerica (fig. 5 – dove sono rappresentati i numeri decimali compresi fra 0 ed 1, ma con una sola cifra decimale). E sulla medesima retta rappresentiamo le frazioni aventi 10 come denominatore. Si nota una coincidenza perfetta fra numeri decimali e frazioni, nel senso che, per esempio, il punto che rappresenta il numero 0,1 rappresenta pure la frazione $\frac{1}{10}$, quello che rappresenta 0,2 rappresenta pure $\frac{2}{10}$, e così via.

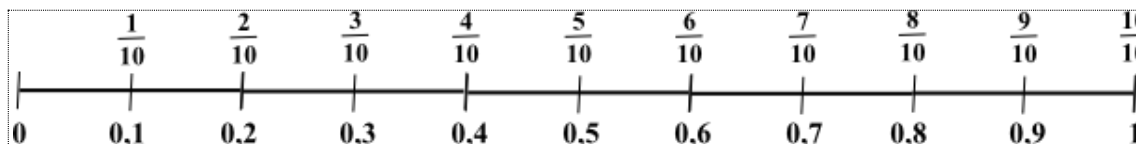


fig. 5

Questo autorizza a scrivere:

$$\frac{1}{10}=0,1=1:10; \quad \frac{2}{10}=0,2=2:10; \quad \frac{3}{10}=0,3=3:10; \quad \text{eccetera}.$$

E mostra nello stesso tempo che una frazione è uguale al numero che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore. In particolare, estendendo il discorso a tutte le frazioni:

$$\frac{3}{5}=0,6; \quad \frac{7}{2}=3,5; \quad \frac{9}{12}=0,75; \quad \frac{3}{150}=0,02.$$

Naturalmente non è possibile ignorare che ci sono frazioni che non generano un numero decimale finito e sono tutte quelle che non si possono trasformare in frazioni decimali, aventi cioè al denominatore una potenza di 10. Tali frazioni, ridotte ai minimi termini, sono tali che il denominatore, scomposto in fattori primi, presenta almeno un fattore diverso da 2 e da 5. È tale, per esempio, la frazione $\frac{5}{6}$, il cui denominatore è uguale a 2×3 . L'insegnante sa che tali frazioni generano numeri periodici. **Ma noi riteniamo che non sia il caso di occuparsene a livello di scuola primaria** (l'argomento sarà invece affrontato nella scuola secondaria, mentre per gli studenti di questo corso di laurea sarà oggetto di studio nel corso di “Fondamenti della matematica”). Come fare allora, quando si presentano tali frazioni?

Noi crediamo che il modo più comodo sia di fermare la divisione alle prime cifre decimali (2, 3, 4 cifre o quelle che servono all'occorrenza) e considerare il numero decimale finito così ottenuto come un “valore approssimato” della frazione in esame. Per esempio:

$$\frac{5}{6} \approx 0,833; \quad \frac{9}{7} \approx 1,28; \quad \frac{7}{15} \approx 0,46.$$

7. Tra le frazioni un particolare interesse meritano quelle che possono essere trasformate in frazioni aventi 100 al denominatore, come le seguenti, tanto per portare qualche esempio:

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{3}{20}, \quad \frac{39}{75}.$$

Esse, infatti, sono equivalenti a queste altre:

$$\frac{80}{100}, \quad \frac{15}{100}, \quad \frac{52}{100}.$$

Il che è come dire che sono uguali ai seguenti numeri decimali:

$$0,80, \quad 0,15, \quad 0,52.$$

Ebbene, ogni frazione con denominatore 100 rappresenta quella che si chiama una **percentuale**. Il suo valore è dato dal numeratore della frazione. Valore percentuale che si scrive facendo seguire al valore del numeratore di tale frazione (con denominatore 100) il simbolo “%”. Cosicché, riprendendo gli stessi esempi precedenti:

$$\frac{4}{5} = 80 \% , \quad \frac{3}{20} = 15 \% , \quad \frac{39}{75} = 52 \% .$$

80% si legge “80 per cento”. Insomma, dire, sempre per esempio, il 15% di una data grandezza è come dire 15/100 di quella grandezza. Appunto perché 15% e 15/100 ma anche 0,15 sono modi diversi di scrivere la stessa cosa.

Ora, ovviamente, non tutte le frazioni possono essere trasformate in altre aventi denominatore 100. Per esempio, $\frac{1}{3}$ è una di esse. In questo caso la percentuale corrispondente alla frazione può essere calcolata solo con approssimazione. Cosicché, essendo:

$$\frac{1}{3} \approx 0,33 = \frac{33}{100} ,$$

si scrive:

$$\frac{1}{3} \approx 33 \% .$$

Esercizi possibili dai quali se ne possono ricavare altri con variazioni sul tema.

1. Segna con una crocetta le risposte che ritieni corrette (ce ne può essere più d’una – fig. 6).

- ☐ La figura colorata in nero è il 50% di quella colorata in rosso.
- ☐ La figura colorata in nero è il doppio di quella colorata in rosso.
- ☐ La figura colorata in nero è $\frac{1}{3}$ di quella colorata in rosso.
- ☐ La figura colorata in nero è $\frac{3}{6}$ di quella colorata in rosso.

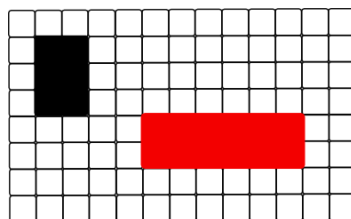


fig. 6

2. Segna con una crocetta le risposte che ritieni corrette (ce ne può essere più d’una – fig. 7).

- ☐ La figura colorata in rosso è l’80% di quella colorata in verde.
- ☐ La figura colorata in rosso è il doppio di quella colorata in verde.
- ☐ La figura colorata in rosso è $\frac{4}{5}$ di quella colorata in verde.
- ☐ La figura colorata in rosso è $\frac{2}{3}$ di quella colorata in verde.

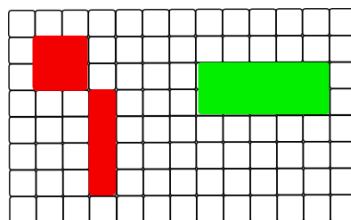


fig. 7

8. Occupiamoci adesso della frazione intesa come “rappresentante di un numero razionale”.

Per prima cosa naturalmente bisogna capire cos'è un numero razionale. Il passo è molto delicato.

I matematici, di fronte ad una questione come questa, parlerebbero di relazione di equivalenza, di classi di equivalenza, di passaggio al quoziente: tutti concetti che anche chi insegna matematica in una scuola primaria deve conoscere (l'argomento sarà ripreso e approfondito nel corso di “Fondamenti della matematica”). Si deve però guardare bene dal trattarne in classe, anche se può trarne qualche idea sul piano didattico.

Il primo scoglio da superare per giungere a comprendere il significato di numero razionale è di trovare un modo di rappresentare tutte le frazioni. La cosa è possibile, anche se solo potenzialmente (nel senso che si fa vedere come si possano rappresentare tutte le frazioni ma non rappresentarle effettivamente: cosa ovvia dal momento che sono in numero infinito) solo dopo che gli alunni avranno avuto modo di familiarizzarsi con il piano cartesiano, ancorché limitato al solo primo quadrante.

Si prendono allora due semirette perpendicolari aventi la stessa origine O (fig. 8) e su ciascuna di esse si riportano i numeri naturali. Per rappresentare una frazione, mettiamo $5/7$, si traccia per il punto 5 dell'asse orizzontale la parallela all'asse verticale e per il punto 7 dell'asse verticale la parallela all'asse orizzontale. Il punto in cui tali parallele s'incrociano (si dice che è un *nodo*) rappresenta per l'appunto la frazione $5/7$. L'insieme di tutti i nodi così ottenuti, eccezion fatta per quelli situati sull'asse orizzontale, sono punti rappresentativi di tutte le frazioni.

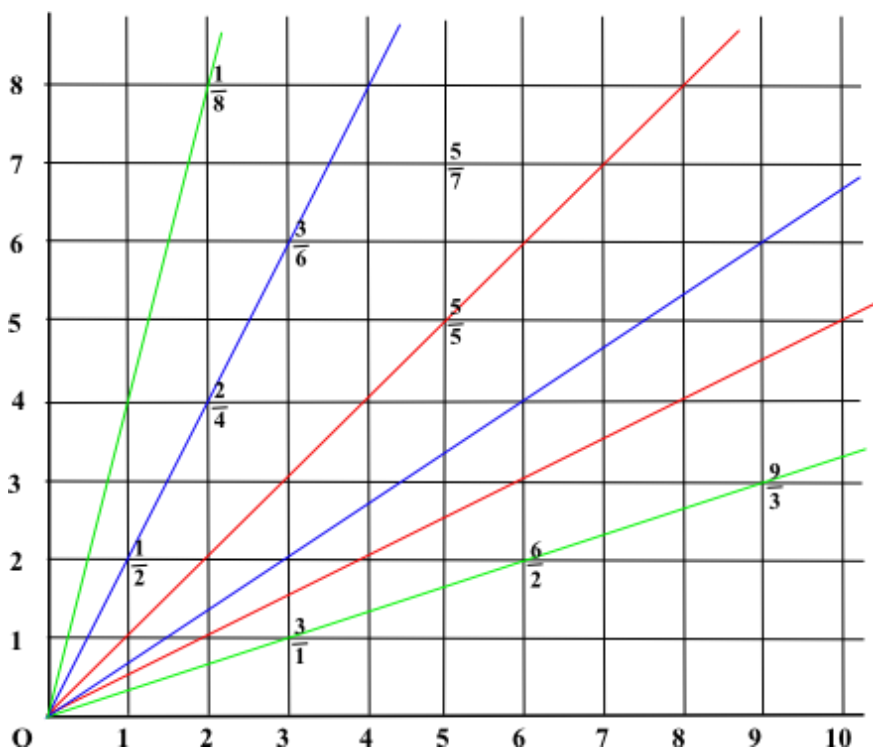


fig. 8

Ribadiamo che ai punti della semiretta orizzontale, compreso il punto O, origine delle due semirette, non corrisponde alcuna frazione. Invece ai punti della semiretta verticale, fatta eccezione ovviamente per il punto O, si fanno corrispondere le frazioni che hanno 0 al

numeratore ed il numero corrispondente al denominatore, vale a dire le seguenti frazioni equivalenti:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \dots$$

Tutte le altre frazioni si ottengono con la costruzione già descritta sopra.

Ora, si può notare un fatto fondamentale: tutte le frazioni equivalenti sono rappresentate da punti allineati con il punto O. Così, per esempio, sono allineati con il punto O i punti che rappresentano le seguenti frazioni:

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \dots$$

Come lo sono quelli che rappresentano le frazioni:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots$$

E così via.

Ebbene, ogni insieme di frazioni equivalenti, vale a dire di frazioni rappresentate da punti allineati con O, si chiama **numero razionale**.

Dunque un numero razionale è un insieme di frazioni equivalenti. Si pone il problema di operare con tali numeri “strani”.

Ora, ogni numero razionale può essere rappresentato da una delle frazioni dell’insieme senza però identificarsi con la frazione medesima. Esso infatti può essere rappresentato anche da ogni altra frazione equivalente. Di solito si prende come rappresentante del numero razionale la frazione i cui termini sono i più piccoli possibile (vale a dire la frazione ridotta ai minimi termini). Così, per esempio, con riferimento ai due numeri suddetti, si prendono solitamente come loro rappresentanti le frazioni:

$$\frac{3}{1} \text{ e } \frac{1}{2}.$$

Ma questo non accade sempre e qualche volta è più comodo prendere altre frazioni.

Si capisce che, per evitare di fare confusione fra numero razionale e frazione, bisognerebbe trovare un modo di rappresentazione dei numeri razionali che li differenzi dalle frazioni. Per esempio il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{1}{2}$ potrebbe essere rappresentato nel modo seguente:

$$\left[\frac{1}{2} \right].$$

E così per gli altri numeri razionali. Ma i matematici ritengono che questo, invece di semplificare le cose, finirebbe per complicarle. Per cui, pur con abuso di notazione, scrivono i numeri razionali esattamente come scrivono le frazioni e, soprattutto, **operano con i numeri razionali esattamente come operano con le frazioni**. L’esperienza aiuterà a comprendere quando una frazione è usata come tale e quando è usata invece come numero razionale.

Tanto per fare un esempio, se si scrive:

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{4}{6}$$

e evidente che le frazioni sono usate come tali. Se invece si scrive:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

esse sono usate come numeri razionali. È infatti chiaro che il numero razionale rappresentato dalla prima frazione è lo stesso numero razionale rappresentato dalla seconda. Ed il segno “=” sta appunto per la locuzione “è uguale”, cioè “è lo stesso”.

9. Laboratorio di matematica.

Gli esercizi proposti in chiusura del paragrafo 7 sono già “laboratorio di matematica”. Adesso proponiamo qualche altra questione.

- Uno degli obiettivi da far conseguire agli alunni è, come noto: “*Stimare il risultato di una operazione*”. Alcuni esercizi che possono contribuire a raggiungere lo scopo potrebbero essere i seguenti.

a) Stima mentalmente se la seguente somma è maggiore o minore di 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

b) Stima mentalmente se la seguente somma è maggiore o minore di 2.

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3}.$$

- Il seguente è un esercizio forse un po’ ambizioso per l’età dei bambini, ma tentar non nuoce se l’aiuto e la guida del maestro sono efficaci.

Si consideri la seguente somma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

Calcolare se è maggiore, minore o uguale ad 1.

Se è maggiore di 1, dire se fra le frazioni ce n’è una, togliendo la quale si ottiene 1.

Se è minore di 1, dire quale frazione bisogna sommare a quelle date per ottenere 1.

- Un commerciante fa rifornimento d’olio. Dopo 3 mesi fa di nuovo rifornimento e decide di comprarne una quantità tripla. Scopre che il prezzo dell’olio è raddoppiato. Quanto pagherà per il secondo rifornimento?

[A] Il doppio del prezzo del primo rifornimento.

[B] Il triplo del prezzo del primo rifornimento.

[C] Sei volte il prezzo del primo rifornimento.

[D] Non si può sapere.

Una sola delle alternative proposte è quella corretta. Trovarla e spiegare la scelta operata.

- Un anno fa il pane che compra la tua mamma costava 4,85 €/kg. Oggi costa 5,35 €/kg. In quale percentuale è aumentato il prezzo del pane?

- Disegna un rettangolo formato da 12 quadratini (N.B.: ci sono vari modi di costruire un tale rettangolo - 1×12 , 2×6 , 3×4 – e sono tutti accettabili) e colorane in rosso la terza parte. Colora quindi in verde la metà della parte rimanente e in giallo la quarta parte della nuova parte rimasta. Quale percentuale del rettangolo di partenza non è stata colorata?

- Un dialogo immaginario fra il maestro e la classe, che pure potrebbe verificarsi.

M. – Bambini, adesso facciamo un gioco con le frazioni. Ditemi un po’, le due frazioni

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{4}$$

sono equivalenti o non lo sono?

Bambini in coro: Non sono equivalenti.

M. – Bene. Se non sono equivalenti ce n'è una più piccola ed una più grande. Siete d'accordo?

Bambini in coro: Sì.

M. – Mi sapete dire qual è la più piccola e qual è la più grande?

Qualche bambino si trova in difficoltà, ma la maggior parte, seppure dopo qualche minuto di riflessione e di calcoli, dà la risposta giusta:

$$\frac{1}{4} \text{ è la frazione minore, } \frac{1}{2} \text{ la maggiore.}$$

M. – Pensate che fra le due frazioni se ne possa mettere qualcuna che è più grande di $\frac{1}{4}$ e più piccola di $\frac{1}{2}$?

Il numero dei bambini che si trovano in difficoltà aumenta, ma Luca tenta la risposta: - Sì, penso di sì.

M. – Sapresti indicarmi una tale frazione, Luca?

Luca, trascinato forse dal fatto che 3 è compreso fra 2 e 4:- la frazione $\frac{1}{3}$.

M. – Bravo Luca. Allora bambini, Luca ha indicato la frazione $\frac{1}{3}$. Mi sapete dire se, oltre ad essa, ce n'è qualche altra compresa fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?

Calma piatta. Adesso le cose si sono complicate veramente e nessuno dei bambini si arrischia a dare una risposta. Il maestro li sollecita: - Non abbiate paura. Dite ciò che pensate.

Sempre Luca, che ormai si sente un'autorità in materia: - No, non ce ne sono altre.

M. – E sapresti spiegare perché non ce ne sono altre, Luca?

Luca: - Siccome 3 è l'unico numero (naturale ovviamente) compreso fra 2 e 4 allora $\frac{1}{3}$ è l'unica frazione compresa fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Nota Bene.

Luca sta ragionando per analogia. Ora, i ragionamenti per analogia spesso portano ad errori, ma non bisogna rifiutarli, poiché a volte funzionano. In ogni caso portano a qualcosa, giusta o sbagliata che sia, permettono cioè una congettura. Questa congettura va controllata con altri mezzi, prima di accettarla o scartarla.

M. – *Non corregge la risposta sbagliata di Luca, ma suggerisce una strada:* Avete detto prima che la frazione $\frac{1}{4}$ è più piccola della frazione $\frac{1}{2}$. Come avete fatto a stabilirlo?

Coro dei bambini: - Facendo i prodotti incrociati.

M. – Va bene. Qualcuno di voi saprebbe indicare un modo diverso dai prodotti incrociati per confrontare due frazioni?

Silenzio assoluto.

M. – Se vi dicessi che un metodo nuovo ricorda il modo di sommare due frazioni, vi sarei di qualche aiuto?

Qualche timido intervento, ma ancora nessuna risposta chiara.

M. – Di cosa bisogna assicurarsi quando si sommano due frazioni?

Vittoria, un po' timidamente: - Devono avere lo stesso denominatore.

M. – Brava Vittoria. E allora, possiamo sfruttare questa modalità per il confronto delle frazioni? Che ne dici?

Vittoria: - Penso di sì, ma non saprei come.

M. – Qualcuno lo sa?

Marco: - Scriviamo le frazioni equivalenti a

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

ma con lo stesso denominatore.

M. – Bravo Marco. Bambini, seguiamo l'idea di Marco: trovate tre frazioni equivalenti a quelle che egli ha elencate, ma in modo che abbiano lo stesso denominatore. Ma prima mettamoci d'accordo sul denominatore comune. Quale pensate che debba essere?

Marco, più svelto di tutti: - Penso che debba essere $4 \times 3 \times 2$, cioè 24.

M. – Va bene 24, ma vi faccio notare che poteva anche essere 12, oppure 48, oppure ... altri denominatori li lascio pensare a voi. Comunque trasformate le 3 frazioni di prima in modo che tutte e tre abbiano denominatore 24, come ha suggerito Marco.

A conti fatti, i bambini comunicano il risultato: - Le nuove frazioni, equivalenti alle altre, sono:

$$\frac{6}{24}, \frac{8}{24}, \frac{12}{24}.$$

M. – Siete in grado adesso di dirmi se tra le frazioni $1/4$, che è equivalente a $6/24$, ed $1/2$, che è equivalente a $12/24$, se ne possono inserire altre?

Coro di bambini, tutti contenti: - Sì. Sono le frazioni

$$\frac{7}{24}, \frac{8}{24}, \frac{9}{24}, \frac{10}{24}, \frac{11}{24}.$$

M. – Bravi. Avete trovato 5 frazioni comprese fra $1/4$ e $1/2$. Ma questo perché abbiamo deciso di scegliere 24 come denominatore comune. Avremmo potuto scegliere anche 240 ed allora pensate a quante altre frazioni si possono inserire fra quelle due. Oppure avremmo potuto scegliere un denominatore ancora più grande, come 2400, o 24000, o ...

Marco: - Ma allora sono tantissime le frazioni che si possono inserire fra $1/4$ e $1/2$?

M. – Sì Marco, sono tantissime. I matematici dicono che sono in numero infinito.