

METODI E TECNOLOGIE PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Lezione n°6

«La geometria può essere significativa solo se esprime le sue relazioni con lo spazio dell'esperienza....essa è una delle migliori opportunità per matematizzare la realtà»

Hans Freudental

«La matematica in generale e la geometria in particolare debbono la loro esistenza al nostro bisogno di sapere qualcosa circa il comportamento degli oggetti reali»

Albert Einstein

QUANDO USIAMO LA GEOMETRIA?

Proviamo a rispondere:

- Segnali stradali
- Per misurare
- Forme delle banconote e delle monete
- In cucina
- Per produrre e montare i mobili
- Arredare
- Per comunicare informazioni
- Orientamento

QUANDO USIAMO LA GEOMETRIA?

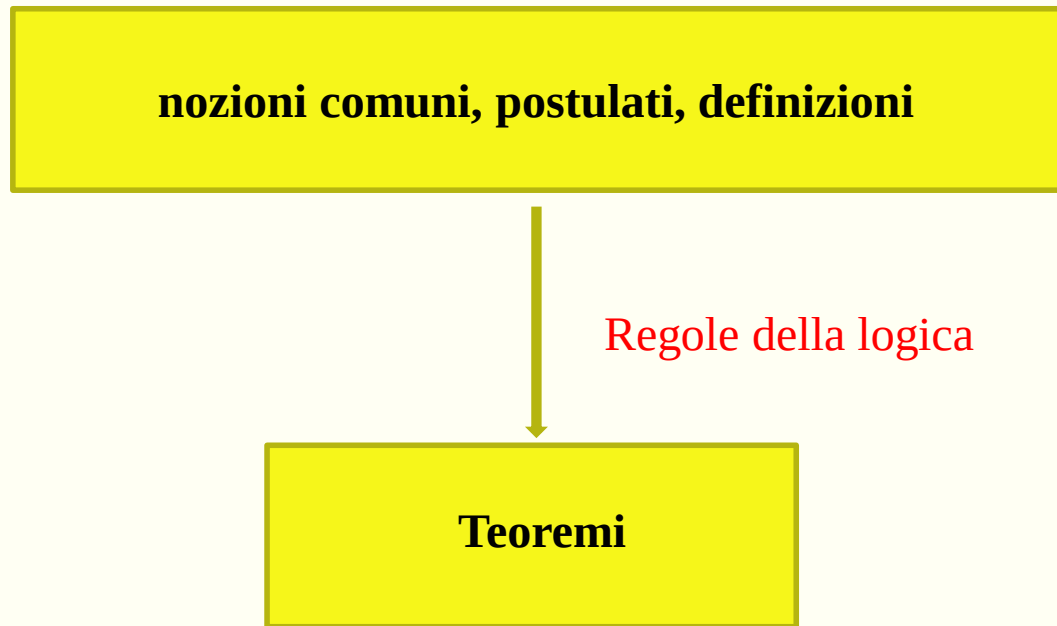
- Nello Sport
- Forme delle costellazioni
- Le forme del materiale di cancelleria
- Descrizione della fisionomia
- Cartine geografiche
-

Brevissimi cenni storici

- La geometria è la più antica tra le teorie create dall'uomo
- Inizialmente è uno strumento che si presenta sotto la forma di un insieme di semplici regole prive di connessione fra loro, rispondenti a problemi che nascono nella vita quotidiana della gente. (Egizi, Babilonesi,...)
- È solo nel mondo greco, intorno al 600 a.C., che avviene il passaggio che fonda la geometria come *scienza formale*, le cui dimostrazioni si conducono per via logica, anziché con l'ausilio di metodi sperimentali.

ELEMENTI DI EUCLIDE

- Prima sistemazione del pensiero geometrico come teoria razionale.



DEFINIZIONI

- *DEFINIZIONE 1*: Punto è ciò che non ha parti
- *DEFINIZIONE 2*: Linea è lunghezza senza larghezza
- *DEFINIZIONE 3*: Estremi di una linea sono i punti
- *DEFINIZIONE 4*: Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.
- *DEFINIZIONE 5*: Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
- *DEFINIZIONE 6*: Estremi di una superficie sono linee
- *DEFINIZIONE 7*: Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.
-

POSTULATI

1. Risulti postulato: che da qualsiasi punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto.
2. E che si possa prolungare una linea retta finita continuamente in linea retta
3. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza
4. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro
5. E che se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti

NOZIONI COMUNI

1. Le cose che sono uguali a una stessa cosa sono uguali tra loro
2. E se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali
3. E se da cose uguali si sottraggono cose uguali, i resti sono uguali
4. E le cose che coincidono fra loro sono tra loro uguali
5. E il tutto è maggiore della parte

IL PROBLEMA DEL QUINTO POSTULATO

E che se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti

*Non è evidente come tutti gli
altri*

La geometria ,quindi, nel mondo greco ma fino a tutto il secolo XVIII, viene considerata come una **trattazione razionale delle esperienze spaziali dell'uomo**, una scienza perfetta e certa.

Si presuppone una realtà esterna, la cui esistenza stessa garantisce la coerenza delle esperienze, cosicché, partendo da alcune proposizioni “**vere perché evidenti**” , si possono dedurre proposizioni **ugualmente vere, anche se non evidenti**.

Tale certezza si è attenuata con la nascita delle **Geometrie non Euclidee** e con l'acceso dibattito legato alla "**Crisi dei fondamenti** " (a cavallo tra '800 e '900)

Henri Poincaré (1854 – 1912)

L'esperienza svolge un ruolo indispensabile nella genesi della geometria; sarebbe, però, un errore concluderne che la geometria è una scienza sperimentale, sia pure in parte. Se fosse sperimentale non sarebbe che approssimativa e provvisoria. E che approssimazione grossolana!

La geometria non sarebbe che lo studio dei movimenti dei solidi; in realtà, essa non si occupa dei solidi naturali, ma ha per oggetto certi solidi ideali, assolutamente invariabili, i quali non sono che un'immagine dei primi semplificata e molto lontana.

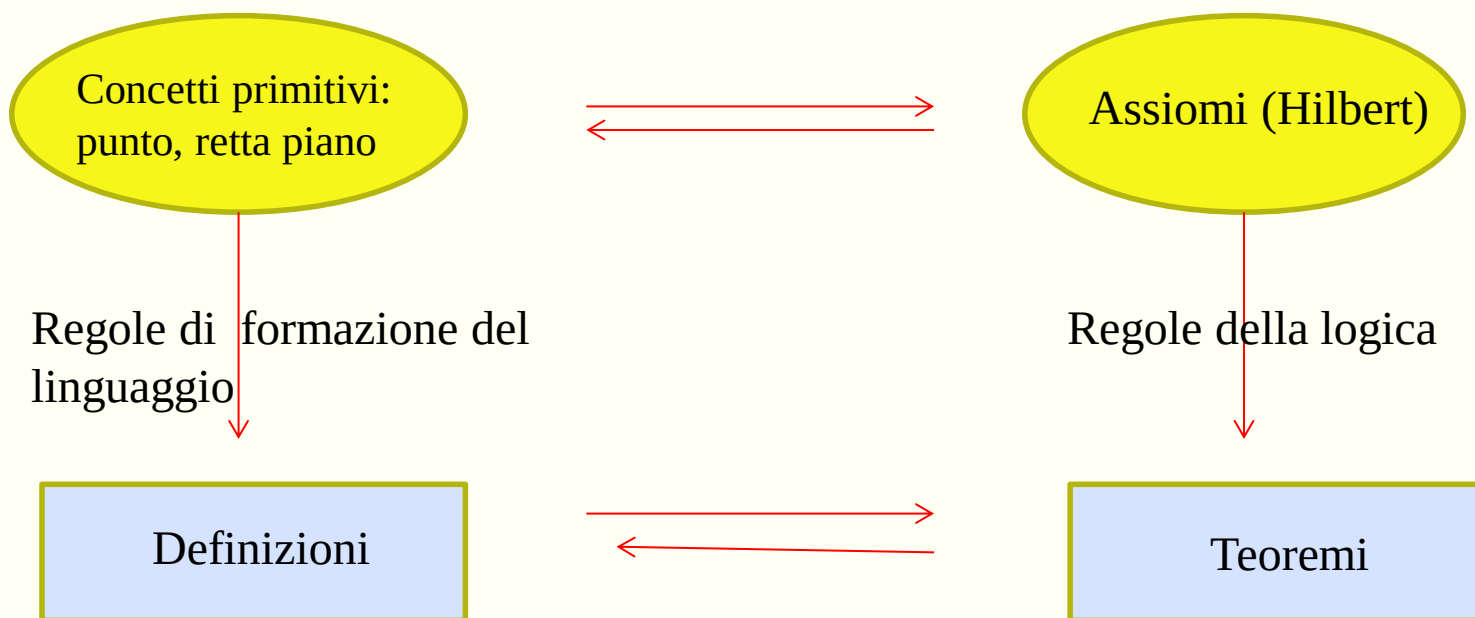
La nozione di questi corpi ideali è interamente frutto della nostra mente e l'esperienza non è altro che l'occasione che ci spinge a farla emergere.

LA GEOMETRIA OGGI

Giunge a maturità l'idea della geometria come **scienza formale**, teoria ipotetico-deduttiva:

- gli **assiomi** non descrivono più **proprietà** dello **spazio fisico**, ma sono solo **affermazioni** prese come **punto di partenza**
- la validità delle dimostrazioni riposa sulla **struttura** piuttosto che sulla **natura** particolare del loro **contenuto**.

TEORIA IPOTETICO-DEDUTTIVA



«La geometria può essere significativa solo se esprime le sue relazioni con lo spazio dell'esperienza.....»Hans Freudental

COME INIZIARE?

Nella scuola dell'infanzia (dalle Indicazioni nazionali)

- Il bambino raggruppa e ordina oggetti e materiali secondo criteri diversi, ne identifica alcune proprietà, confronta e valuta quantità; utilizza simboli per registrarle; esegue misurazioni usando strumenti alla sua portata.
-
- Individua le posizioni di oggetti e persone nello spazio, usando termini come avanti/dietro, sopra/sotto, destra/sinistra, ecc.; segue correttamente un percorso sulla base di indicazioni verbali.

ALCUNI ESEMPI

- Linee, intrecci, superfici
- Scopriamo le forme geometriche
- Solidi e strutture

Pierre e Dina van Hiele (1986): Livelli di sviluppo del pensiero geometrico

1) Livello visivo

I bambini riconoscono le forme presentate loro a livello percettivo, ma non sono in grado di creare delle immagini mentali delle forme geometriche. A questo livello, una figura è un rettangolo “perché è simile ad una porta”, non vi è, pertanto, una comprensione delle proprietà delle figure. I bambini di questo livello possono apprendere il vocabolario geometrico, identificare e riprodurre le figure in modo corretto.

2) Livello descrittivo-analitico

I bambini iniziano a riconoscere le figure in base alle loro proprietà. Le immagini perdono di importanza rispetto alle loro proprietà, ma i bambini non sono ancora in grado di differenziarle in termini di definizioni e proposizioni, e non sono ancora capaci di spiegare le relazioni tra le varie figure geometriche. Ad esempio un quadrato non è ancora riconosciuto come un particolare rettangolo.

Livelli di sviluppo del pensiero geometrico

3) Livello delle deduzioni informali o della geometria euclidea

Il bambino comincia ad osservare le varie relazioni tra le figure dal punto di vista logico, ad esempio il quadrato è un caso particolare di rettangolo poiché soddisfa una possibile definizione di rettangolo. Questo presuppone la conoscenza di una terminologia specifica appropriata e delle definizioni, così da poter riconoscere classi di figure e dedurre alcune proprietà. A questo livello, tuttavia, non vi è ancora una comprensione degli assiomi e delle dimostrazioni.

4) Livello deduttivo, o della logica formale

I ragazzi cominciano ad essere in grado di distinguere formalmente tra una proposizione e la sua inversa, e possono capire le dimostrazioni, i postulati, gli assiomi ed i teoremi.

5) Livello del rigore geometrico

Gli studenti possono apprendere la geometria non-euclidea e confrontare diversi sistemi di assiomi. La geometria viene pertanto rappresentata in modo astratto

NOTA BENE

Sulla base di alcuni studi sperimentali, **Clements e Battista (1992)** hanno inserito un livello precedente a quello visivo, **un livello zero, denominato di pre-riconoscimento**, nel quale i bambini percepiscono le forme in modo corretto ma non sono in grado di classificarle o di riprodurle attraverso il disegno; non sono in grado di identificare molte forme comuni perché non prestano adeguata attenzione a tutte le loro caratteristiche visive.

Proprietà del modello "van Hiele"

1) Proprietà del passaggio tra i livelli.

I progressi da un livello al successivo dipendono non tanto dall'età ma dall'educazione fornita al bambino. La completa assenza di un'istruzione formale non consentirebbe alcuno sviluppo, pertanto i metodi di insegnamento sono fondamentali, alcuni favoriscono il passaggio ad un livello successivo, altri lo impediscono. La maturazione che conduce ad un livello superiore sembra essere un processo essenzialmente legato all'apprendimento e all'istruzione e non di ordine biologico. È possibile dunque favorire ed accelerare tale processo.

Proprietà del modello "van Hiele"

2) Proprietà linguistica

Ogni livello è caratterizzato da un utilizzo specifico del linguaggio che può essere considerato corretto all'interno di quel particolare livello, ma può essere ulteriormente ampliato ad un livello successivo. Ad esempio una figura può avere più di un nome: un quadrato è un rettangolo, ma è anche un parallelogramma, un trapezio e un quadrilatero. Tali distinzioni non sono utilizzabili al secondo livello, ma diventano fondamentali dal terzo livello in avanti.

Proprietà del modello "van Hiele"

3) Proprietà della discrepanza

Il tipo di educazione fornita deve essere coerente con il livello dello studente; se viene fornita un'istruzione che si colloca ad un livello più alto, lo studente incontrerà difficoltà nel seguire i processi di pensiero formulati dall'insegnante. Come sostenevano gli stessi van Hiele, infatti, due persone che ragionano a due diversi livelli hanno difficoltà nel comprendersi. Ciò accade spesso tra insegnante e studente. Nessuno dei due riesce a capire il percorso mentale dell'altro ed il loro dialogo continua unicamente poiché lo studente tenta di intuire il pensiero dell'insegnante e ad esso si uniforma.

Nella scuola primaria: (dalle Indicazioni nazionali)

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola primaria

Spazio e figure

- Percepire la propria posizione nello spazio e stimare distanze e volumi a partire dal proprio corpo.
- Comunicare la posizione di oggetti nello spazio fisico, sia rispetto al soggetto, sia rispetto ad altre persone o oggetti, usando termini adeguati (sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, dentro/fuori).
- Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno, descrivere un percorso che si sta facendo e dare le istruzioni a qualcuno perché compia un percorso desiderato.
- Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche.
- Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Spazio e figure

- Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri.
- Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria).
- Utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti.
- Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.
- Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.
- Confrontare e misurare angoli utilizzando proprietà e strumenti.
- Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità, parallelismo.
- Riprodurre in scala una figura assegnata (utilizzando, ad esempio, la carta a quadretti).
- Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti.
- Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule.
- Riconoscere rappresentazioni piane di oggetti tridimensionali, identificare punti di vista diversi di uno stesso oggetto (dall'alto, di fronte, ecc.).

IL NOSTRO PROGRAMMA

Modulo 3 – Spazio e figure.

- Sottomodulo 3/1: Geometria piana: figure geometriche.
- Sottomodulo 3/2: Misure di lunghezze e superfici piane.
- Sottomodulo 3/3: Geometria solida.
- Sottomodulo 3/4: Trasformazioni geometriche.