

MATEMATICA GENERALE VS I (primo semestre)

Prof.ssa Elisabetta Michetti

A. DISEQUAZIONI

A.1 Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

2. $x^2 + x \geq 7x - 10$

3. $(2x + 5)(x - 1) < 0$

4. $\frac{x+5}{x-2} \leq 0$

5. $\frac{3x+2}{3} < \frac{x-7}{2x+1}$

Soluzioni:

1.

$$2x^2 + 5x - 3 > 0, \quad y = 2x^2 + 5x - 3, \quad a = 2 > 0, \quad \Delta = 25 + 24 = 49 > 0,$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0, \quad x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$$

$$S = (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

2.

$$x^2 + x \geq 7x - 10, \quad x^2 + x - 7x + 10 \geq 0, \quad x^2 - 6x + 10 \geq 0$$

$$y = x^2 - 6x + 10, \quad a = 1 > 0, \quad \Delta = 36 - 40 = -4 < 0$$

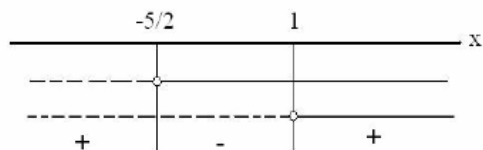
$$S = R$$

3.

$$(2x + 5)(x - 1) < 0$$

$$\text{I) } 2x + 5 > 0 \quad 2x > -5 \quad x > -\frac{5}{2}$$

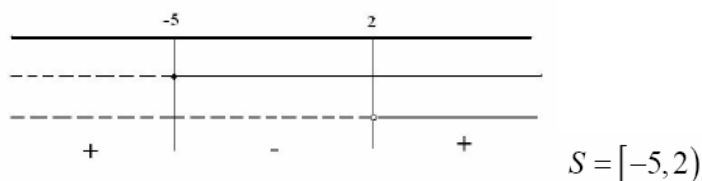
$$\text{II) } x - 1 > 0 \quad x > 1$$



$$S = \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

4.

$$\frac{x+5}{x-2} \leq 0 \quad \text{I) } x+5 \geq 0 \quad x \geq -5 \quad \text{II) } x-2 > 0 \quad x > 2$$



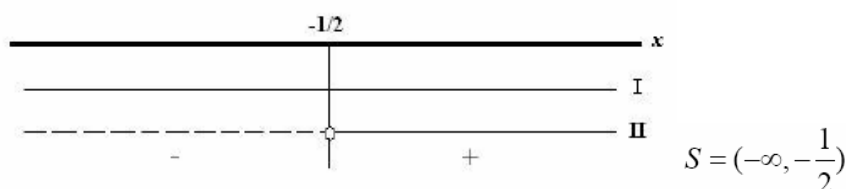
5.

$$\frac{3x+2}{3} < \frac{x-7}{2x+1} \quad \frac{3x+2}{3} - \frac{x-7}{2x+1} < 0 \quad \frac{(3x+2)(2x+1) - 3(x-7)}{3(2x+1)} < 0$$

$$\frac{6x^2 + 3x + 4x + 2 - 3x + 21}{3(2x+1)} < 0 \quad \frac{6x^2 + 4x + 23}{3(2x+1)} < 0$$

I) $6x^2 + 4x + 23 > 0 \quad y = 6x^2 + 4x + 23 \quad a = 6 > 0 \quad \Delta = 16 - 552 < 0$

II) $3(2x+1) > 0 \quad 2x+1 > 0 \quad 2x > -1 \quad x > -\frac{1}{2}$



A.2 Risolvere le seguenti disequazioni:

6. $\frac{x-5}{x+3} + \frac{x-8}{3-x} \leq 0$

7. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} > 1$

8. $\frac{x^2-3}{2} + \frac{x^2-5}{3} < \frac{1}{6}$

9. $\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2-1} \leq \frac{1}{4}$

Risultati:

6. $S = (-3, 3) \cup [13, +\infty)$

7. $S = (\frac{5}{2}, 3) \cup (4, +\infty)$

8. $S = (-2, 2)$

9. $S = (-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup [5, +\infty)$

A.3 Risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo

1. $x^3 + 2x^2 + 4x \geq 0$

2. $x^3 + x^2 - x - 1 < 0$

3. $2x^4 - 3x^2 \geq 0$

4. $x^4 - 1 \leq 0$

5. $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 > 0$

A.4 Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

$$1. \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x + 2}{3x^2 - 3x + 1} \geq 0 \\ (x+2)(x-3) \leq 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3x > 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x^4 + 2x^2 - 4 \leq 0 \\ \frac{2}{x} + 1 - \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{-x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x + 10} \geq 0 \\ \frac{x+1}{2-x} > 1 \end{cases}$$

B. DOMINIO

B.1 Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

2. $y = \sqrt{\frac{3x^2+5x-2}{x^2-7x+12}}$

3. $y = \sqrt{1 - \frac{x+5}{x-1}}$

4. $y = \sqrt{x - \frac{1}{4x-3}}$

5. $y = \ln(x^2 - 9)$

6. $y = \ln \frac{x-2}{x+7}$

7. $y = \ln \frac{x-1}{x^2+2x+2}$

Risultati:

1. $S = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$

2. $S = (-\infty, -2] \cup [\frac{1}{3}, 3) \cup (4, +\infty)$

3. $S = (-\infty, 1)$

4. $S = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cup [1, +\infty)$

5. $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

6. $S = (-\infty, -7) \cup (-2, +\infty)$

7. $S = (1, +\infty)$

B.2 Determinare il dominio delle seguenti funzioni

1. $y = \frac{\sqrt{-x^2-3x-2}}{\ln(x-1)}$

2. $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+x}} - \frac{1}{2} + \ln(4x+8)$

3. $y = \frac{\ln(x^2-9)}{\sqrt{x^3+2x^2-3x}}$

4. $y = \ln\left(\frac{x^2+x+3}{x^2+x-6}\right) - \sqrt{-x+10}$

C. GRAFICI DI FUNZIONI

C1. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni a partire da quelle elementari (dire se sono iniettive o suriettive e individuare l'insieme immagine)

$$1. f(x) = |x^2 - 1|$$

$$2. f(x) = |x|^3$$

$$3. f(x) = |\log |x||$$

$$4. f(x) = e^{x-2} - 1$$

$$5. f(x) = e^{|x|}$$

$$6. f(x) = x^2 + x - 1$$

$$7. f(x) = |x^3 - 2|$$

$$8. f(x) = \log |x| - 3$$

$$9. f(x) = ||x|^2 - 1|$$

$$10. f(x) = |x| + 3$$

$$11. f(x) = |e^x| - 2$$

$$12. f(x) = |x^2 - 2| + 1$$

$$13. f(x) = |(x-1)^2|$$

C.2 Determinare per via grafica il dominio delle seguenti funzioni

$$1. y = \sqrt{|\ln |x+2|| - e^{|x|+1}}$$

$$2. y = \sqrt{||x|-3| - \ln |x+1|}$$

$$3. y = \ln(x^2 + |x^2 - 1|)$$

$$4. y = \ln((e^{|x|} - 1) - |\ln(x+1)|)$$

D. PROPRIETA' DI FUNZIONI

D.1 Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari

1. $y = x^2 + 2x^4 - 3$

2. $y = \frac{\ln(1-x^2)}{x}$

3. $y = \frac{x^3}{-x^2+1}$

D.2 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni e dire se sono monotone, strettamente monotone, invertibili

1. $y = |\ln(x+1)|$

2. $y = |e^x + 3| - 1$

3. $y = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

D.3 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni e individuare eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti

1. $y = \begin{cases} |\ln x| & \text{se } x > 0 \\ |x^2-2|-1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} e^{|x|} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1-x & \text{se } x \geq 1 \\ (x-1)^3 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

E. LIMITI E ASINTOTI

E.1 Calcolare i seguenti limiti

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + x - 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{-x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x}{\ln x}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + 4x$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 2}{x - 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 1}{x - 2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

10. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{2x + 2}$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{2x + 5}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 6}{x^3 - 4}$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 4x}{3x^2 - 1}$

14. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - x^2 + 5}{(2 - x)^2}$

E.2 Individuare gli eventuali asintoti posseduti dalle seguenti funzioni

1. $y = \frac{3x^3 + x^2}{2x^2 + 1}$

2. $y = \frac{x^3 - 1}{3x - 6}$

3. $y = \frac{1 - x}{x^2 - 1}$

4. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2 - 3x}$

5. $y = \frac{x^2}{x^4 + 2}$

F. CONTINUITA'

F.1 Date le seguenti funzioni, stabilire se sono continue nel loro dominio o classificare gli eventuali punti di discontinuità

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & x > 3 \\ x^2 - 5 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & x > 0 \\ x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{-x+3}{x^2+1} & x \geq 2 \\ e^{|x-2|} & x < 2 \end{cases}$$

F.2 Date le seguenti funzioni, determinare per quale valore del parametro k esse sono continue in x_0

$$1. y = \begin{cases} 2kx + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{kx^2 + 1}{x + 5} & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

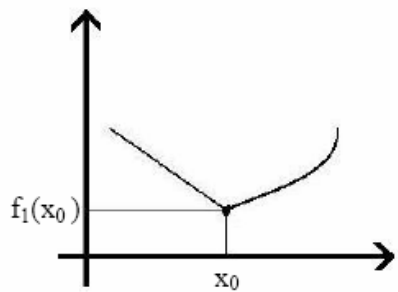
$$2. y = \begin{cases} (kx)^2 - 2 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 4}{2x - 4} & \text{se } x > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$$

$$3. y = \begin{cases} 2kx^2 - 6 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{kx}{3x + 2} & \text{se } x < 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

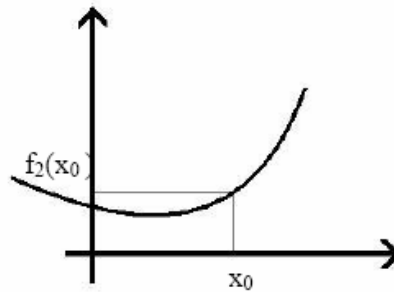
G. DERIVABILITA'

G.1 Rispondere ai seguenti quesiti

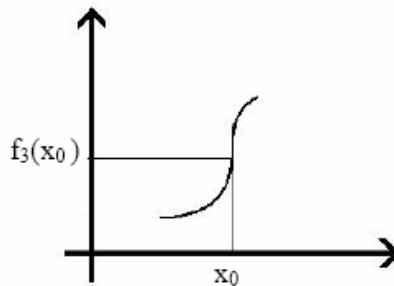
- 1) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$), sia $x_0 \in A$ punto di accumulazione di A .
Si dice che f è derivabile in x_0 se
La derivata di una funzione in un punto coincide con il
della retta
- 2) Sia f derivabile nel punto $x_0 \in A$, esiste allora la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate e l'equazione di tale retta è
- 3) Date le funzioni i cui grafici sono rappresentati in (a), (b), (c):



(a)



(b)



(c)

stabilire quali di esse sono derivabili nel punto x_0 . Le tre funzioni sono continue nel punto x_0 ?

- 4) Stabilire, in base a definizione, se la funzione $f(x) = ax + b$, con a e b costanti ($a, b \in \mathbb{R}$), è derivabile nel generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
In caso di risposta affermativa, definire la funzione $f'(x)$, eventualmente $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$...
 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$?
- 5) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel punto $x=0$ e nel punto $x=2$.
- 6) Stabilire, in base a definizione, se le funzioni $f(x) = k$ e $f(x) = x^3$ sono derivabili nel generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$. In caso di risposta affermativa, definire la funzione $f'(x)$.

G.2 Determinare gli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & x \in (-\infty, -1) \\ 2x - 1, & x \in [-1, +\infty) \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}, & x < 1 \\ \frac{x^2 + 3}{16}, & x \geq 1 \end{cases}$

G.3 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$

2. $f(x) = \frac{-2x + 1}{x + 3}$

3. $f(x) = 3x^4 + 2\sqrt{x}$

4. $f(x) = x^2 + 5 \ln x$

5. $f(x) = \frac{3x^2}{\ln x - 1}$

6. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^3}$

7. $f(x) = \frac{2}{x} \ln x$

8. $f(x) = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 4}$

9. $f(x) = e^x(3 - x - 2x^3)$

10. $f(x) = (x^4 - 2x^3 + 1)(-7x^5 + x^2 - 3x)$

11. $f(x) = (3x^2 - 2e^x)(-3x + 7)$

12. $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{1 + e^x}$

13. $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

14. $f(x) = \frac{\ln x + x}{x^3 - 1}$

15. $f(x) = \frac{-7x^2 + x}{x^4 - 5x^2 + 4}$

16. $f(x) = \frac{1}{2}e^x(x^3 + 11)$

17. $f(x) = \frac{-x^3 \ln x}{2(x + 1)}$

18. $f(x) = (x^2 + \sqrt{x}) \ln x$

19. $f(x) = \frac{2x^2}{2 - \ln x}$

20. $f(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x}}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

G.4 Date le seguenti funzioni, determinare l'equazione della retta tangente nel punto x_0

1. $y = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1$

2. $y = e^x(x^2 + 2x - 1), \quad x_0 = 0$

3. $y = \frac{3x^2 - 1}{x + 2}, \quad x_0 = 1$

4. $y = (x^3 - x)(x^2 - 2), \quad x_0 = 2$

G.5 Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni

1. $y = (-2x^2 - 4x + 6)(1 - x)$

2. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

3. $y = \ln x + \frac{1}{x}$

4. $y = (x^2 - 1)(x^2 + x)$

5. $y = \ln x - 2x^2$

6. $y = e^x(x^2 - 1)$

G.6 Determinare gli eventuali punti di flesso delle seguenti funzioni

a. $f(x) = \ln x + \frac{x^2 - 1}{x}$

b. $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

c. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

d. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{4} - \ln x$

e. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$

H. STUDIO DI FUNZIONE

H.1

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

H.2

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)}{(x-2)(x+1)} & , \text{ se } x < -1 \\ x+4, & \text{ se } x \geq -1 \end{cases}$. Determinare

gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

H.3

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3 + x - 2x^2 - 2}{x-2}$. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti.

H.4

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+3}, & x < -3 \\ \frac{1}{2}x, & x \geq -3 \end{cases}$. Determinare gli

eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti.