

Matematica Generale VS (2)

Esercizi di preparazione alla prima prova parziale

Elisabetta Michetti

- 1) Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni soggette ai vincoli di seguito indicati:

- a) $z = x^2 y$ t.c. $2x + y - 5 = 0$ (per via analitica)
- b) $z = x \cdot y$ t.c. $x + 2y - 1 = 0$ (per via analitica)
- c) $z = y + x$ t.c. $y + x^2 = 0$ (per via analitica)
- d) $z = x^2 + y^2$ t.c. $x \cdot y = -2$ (per via grafica)
- e) $z = 2y^2 - 8x$ t.c. $2y^2 - 2x^2 + 8 = 0$ (per via analitica)
- f) $z = 2x + 2y + 1$ t.c. $x^2 + y^2 - 2 = 0$ (per via analitica e grafica)
- g) $z = y + \frac{1}{2}x$ t.c. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ (per via grafica)
- h) $z = x \cdot y$ t.c. $x + y - 2 = 0$ (per via grafica)

- 2) Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

- a) $z = (2x^2 + y)(x - y)$
- b) $z = x^3 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$
- c) $z = y^3 + x^2 y^2 - 2x^3$

- 3) Determinare per via grafica il dominio delle seguenti funzioni:

- a) $z = \sqrt{\frac{-2x^2 - 2y^2 + 4x + 16}{-x + y + 1}} + \ln(x^2 - y - 1)$
- b) $z = \ln[(y - x^2 + 1)(-x^2 - y^2 + 2x + 8)] - \sqrt{-xy}$

Scheda A: Esercizi di ricapitolazione con risoluzione

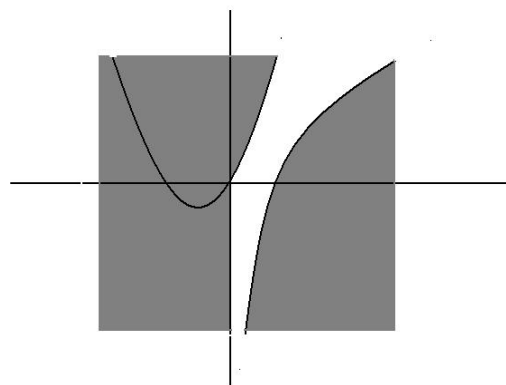
- 1) Determinare per via grafica il dominio della funzione

$$z = \ln[y - \ln x] + \sqrt{x^2 - y + x}.$$

$$\begin{cases} y - \ln x > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - y + x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = \ln x,$$

$$y = x^2 + x \Rightarrow x_v = -\frac{1}{2}, y_v = -\frac{1}{4}$$



DOMINIO: parte bianca (esclusi i punti appartenenti alla curva $y = \ln x$ e dell'asse y , inclusi i punti della parabola)

- 2) Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$z = x^3 + 2x^2 + x + y^2 - 2y$$

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 4x + 1 = 0 \\ z_y = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -1, y = 1$$

$$P_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1\right), P_2 = (-1, 1)$$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \det H(P_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, z_{xx}(P_1) = 2 > 0 \Rightarrow P_1 \text{ minimo}$$

$$\det H(P_2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow P_2 \text{ punto di sella}$$

- 3) Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione:

$$z = 2x + y - 1 \text{ soggetta al vincolo } x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = 2x + y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

$$\begin{cases} L_x = 2 - 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 5 = 0, \frac{4+1-20\lambda^2}{4\lambda^2} = 0, \lambda^2 = \frac{1}{4}, \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, x_1 = 2, y_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \left(2, 1, \frac{1}{2}\right); \lambda_2 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2, y_2 = -1 \Rightarrow P_2 = \left(-2, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{H}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}, \det \tilde{H}(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 20 > 0 \Rightarrow P_1 \text{ massimo vincolato}$$

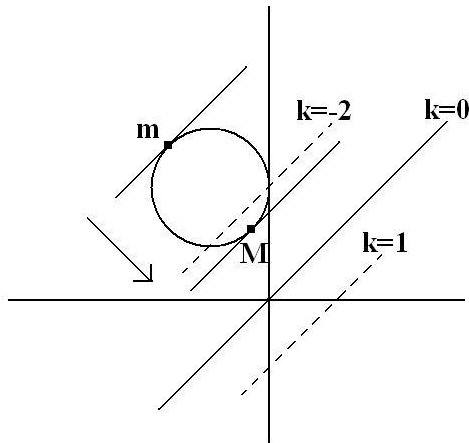
$$\det \tilde{H}(P_2) = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -20 < 0 \Rightarrow P_2 \text{ minimo vincolato}$$

4) Determinare per via grafica i punti di massimo e minimo relativi della funzione:

$$z = x - y \text{ soggetta al vincolo } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow C = (-1, 2), r = \sqrt{1 + 4 - 4} = 1$$

$$x - y = k \Rightarrow y = x - k$$



M = massimo vincolato, m = minimo vincolato