

LABORATORIO DI MATEMATICA 2

Prof.ssa Elisabetta Michetti

Seconda parte

1. Grafici di funzioni di due variabili con MatLab
2. Curve di livello
3. Problemi di ottimizzazione

GRAFICO DI FUNZIONE DI DUE VARIABILI

Si vuole tracciare il **grafico** (**plot**) di una funzione di due variabili:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

- ❖ Si definisce in MatLab la funzione
- ❖ Si traccia il plot della funzione

Esistono **due distinti modi** per definire una funzione in MatLab
(a seconda di come si definisce la funzione si genera il grafico):

1) Definizione puntuale

2) Definizione come funzione anonima

1) Plot tramite definizione puntuale

Si procede secondo i seguenti passi:

- a. Individuare gli intervalli di valori per le variabili x e y . Tali intervalli vanno discretizzati usando il comando `linspace` o l'operatore ":"
- b. Definire una griglia di nodi nel piano xy per identificare l'insieme delle coppie (x,y) per le quali calcolare il valore assunto dalla funzione:

il comando `[X Y]=meshgrid(x,y)` genera due matrici X e Y

- c. Definire la funzione $z=f(x,y)$ utilizzando le matrici X e Y e gli operatori puntuali

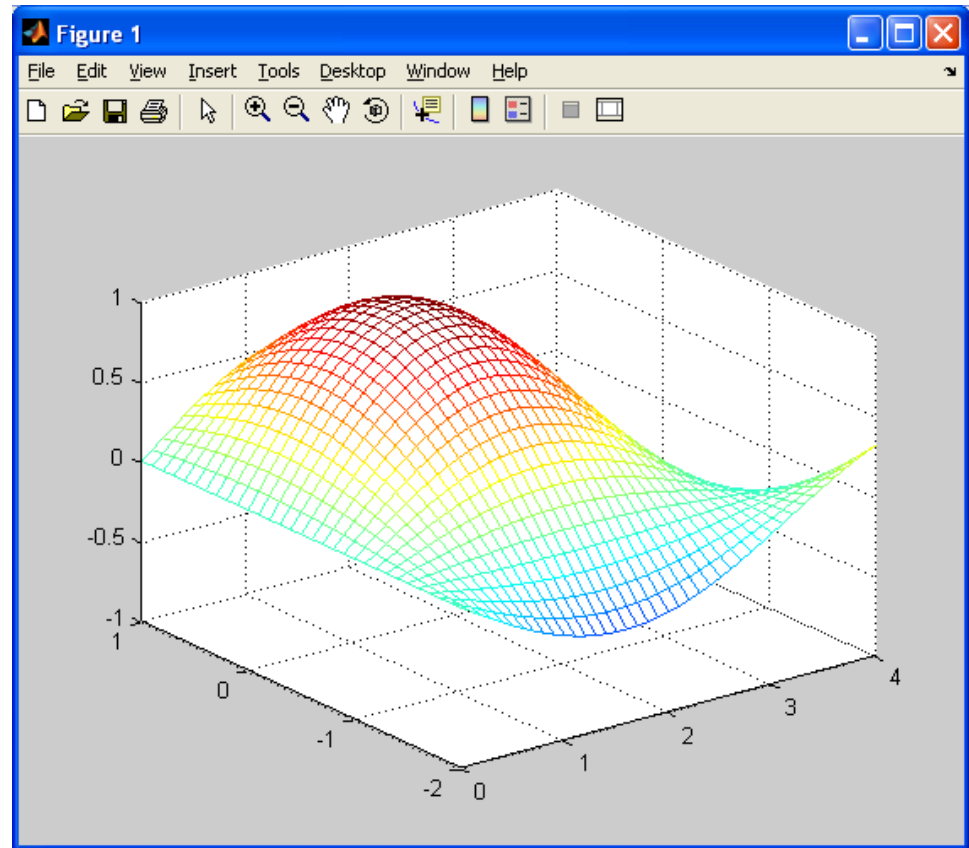
NB In tal modo viene calcolato il valore della funzione in corrispondenza di ogni nodo della griglia

- d. Si traccia il plot tramite i comandi `surf(X,Y,z)` o `mesh(X,Y,z)` che disegna l'insieme dei punti (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$

ESEMPIO

$$(1) \quad z = \sin(x) \cdot \cos(y)$$

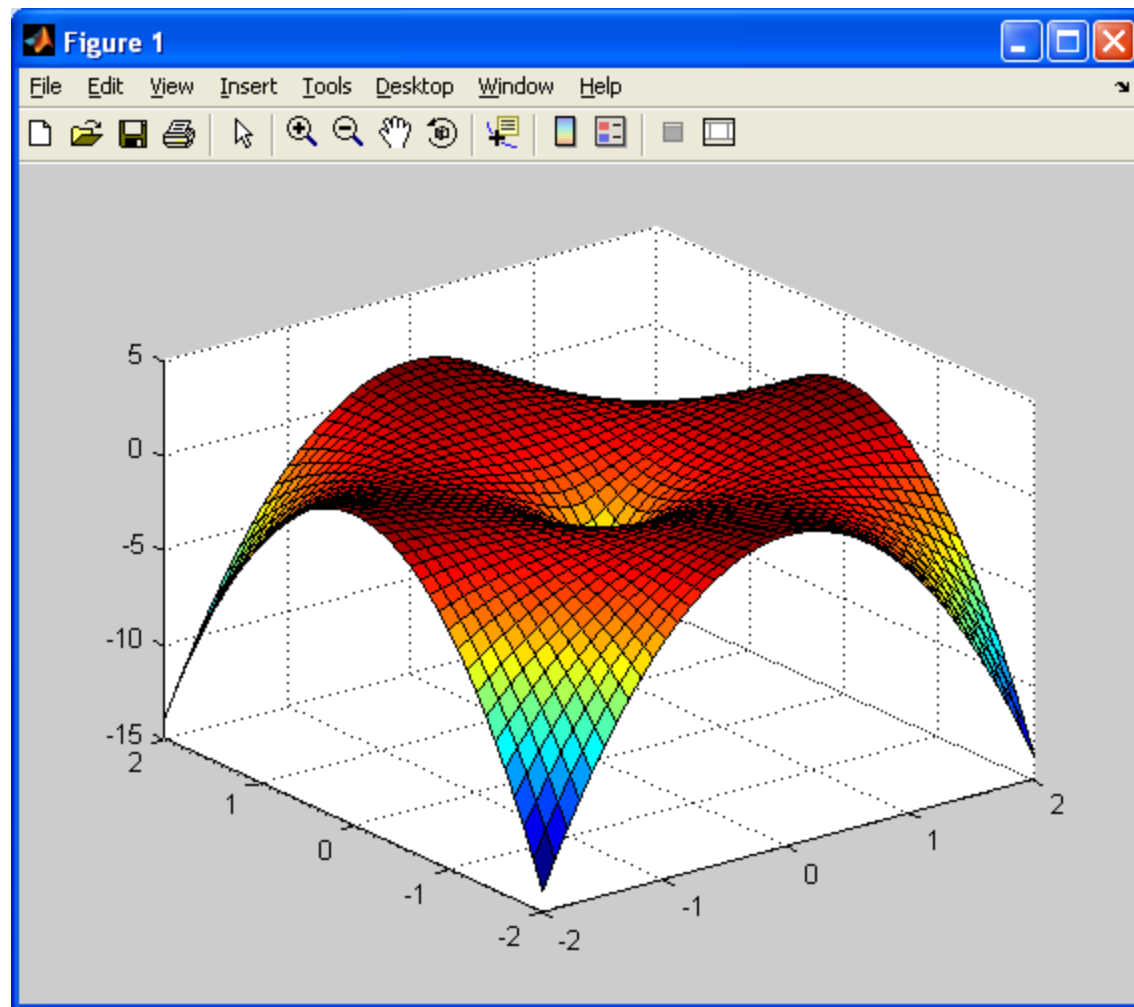
```
>> x=0:0.1:4;  
>> y=-2:0.1:1;  
>> [X Y]=meshgrid(x,y);  
>> z=sin(X).*cos(Y);  
>> mesh(X,Y,z)
```



ESEMPIO

$$(2) \quad z = \ln(x^2 + y^2) - x^2 y^2$$

```
>> x=-2:0.1:2;  
>> y=-2:0.1:2;  
>> [X Y]=meshgrid(x,y);  
>> z=log(X.^2+Y.^2)-(X.^2).*(Y.^2);  
>> surf(X,Y,z)
```



Esercizio proposto

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni mediante discretizzazione

(1) $z = \ln(x) \cdot \ln(y)$

si tracci il grafico per $x \in [1, 4]$ e $y \in [1, 4]$ usando il comando mesh

(2) $z = x^2 + y^2 - \cos(x) - \cos(y)$

si tracci il grafico per $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-1, 1]$ usando il comando surf

1) Plot tramite funzione anonima

Si procede secondo i seguenti passi:

- a.** Definire la funzione anonima secondo l'espressione indicata:

il comando `z=@(x,y) espressione_di_xy`

associa alla variabile `z` l'espressione analitica considerata

NB È possibile calcolare la funzione in un punto (x_0, y_0) del dominio mediante il comando `z(x0,y0)`

- b.** Si traccia il plot tramite i comandi:

`ezsurf(z,[x_min x_max],[y_min y_max])` oppure

`ezmesh(z,[x_min x_max],[y_min y_max])`

che tracciano il grafico per x e y compresi tra i limiti indicati

ESEMPIO

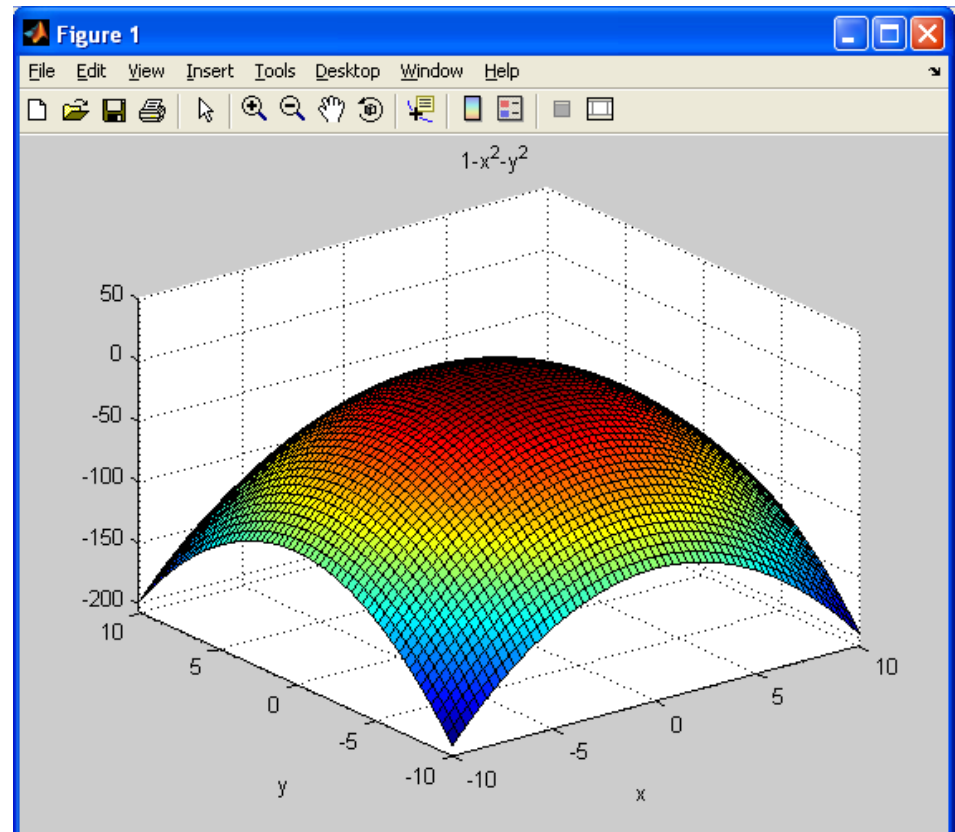
$$(1) \quad z = 1 - x^2 - y^2$$

```
>> z=@(x,y) 1-x.^2-y.^2;  
>> ezsurf(z,[-10 10],[-10 10]);
```

```
>> z(50,50)
```

```
ans =
```

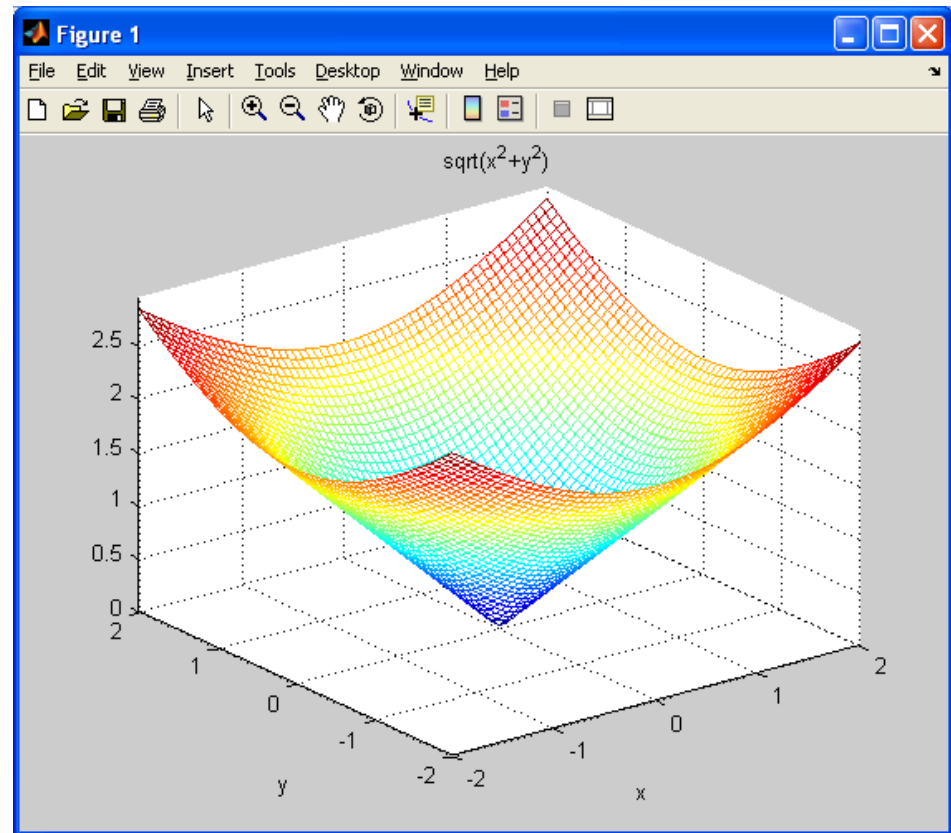
```
-4999
```



ESEMPIO

$$(2) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

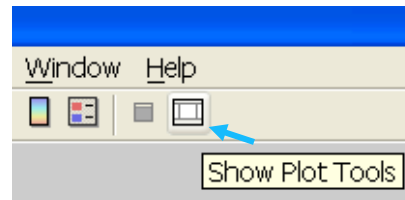
```
>> z=@(x,y) sqrt(x.^2+y.^2);  
>> ezmesh(z,[-2 2],[-2 2]);
```



Opzioni di visualizzazione grafica

Una volta prodotto il grafico è possibile **attivare le opzioni di visualizzazione grafica** utilizzando le barre degli strumenti della finestra grafica

- ❖ si **attivano le barre degli strumenti** della finestra grafica:



- ❖ cliccando sulla **curva** è possibile modificarne le caratteristiche
- ❖ cliccando sul **piano cartesiano** è possibile modificare le proprietà del grafico (inserire il **titolo**, le **etichette** e altro ancora!)

Esercizio proposto

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni dopo averle definite come funzioni anonime

$$(1) \quad z = \sqrt{|x|} y^2 - |x| \quad (\text{si usi il comando ezsurf})$$

$$(2) \quad z = (xy)e^{x^2-y^2} \quad (\text{si usi il comando ezmesh})$$

Si scelga un **opportuno intervallo** per le variabili x e y

Ritoccare i grafici a piacimento utilizzando le barre degli strumenti della finestra grafica

CURVE DI LIVELLO

È possibile tracciare le curve di livello di una funzione $z=f(x,y)$

1. Definizione puntuale della funzione

Dopo aver definito la funzione mediante discretizzazione
il comando `contour(x,y,z)` (o `contourf(x,y,z)`) ne traccia le curve di livello

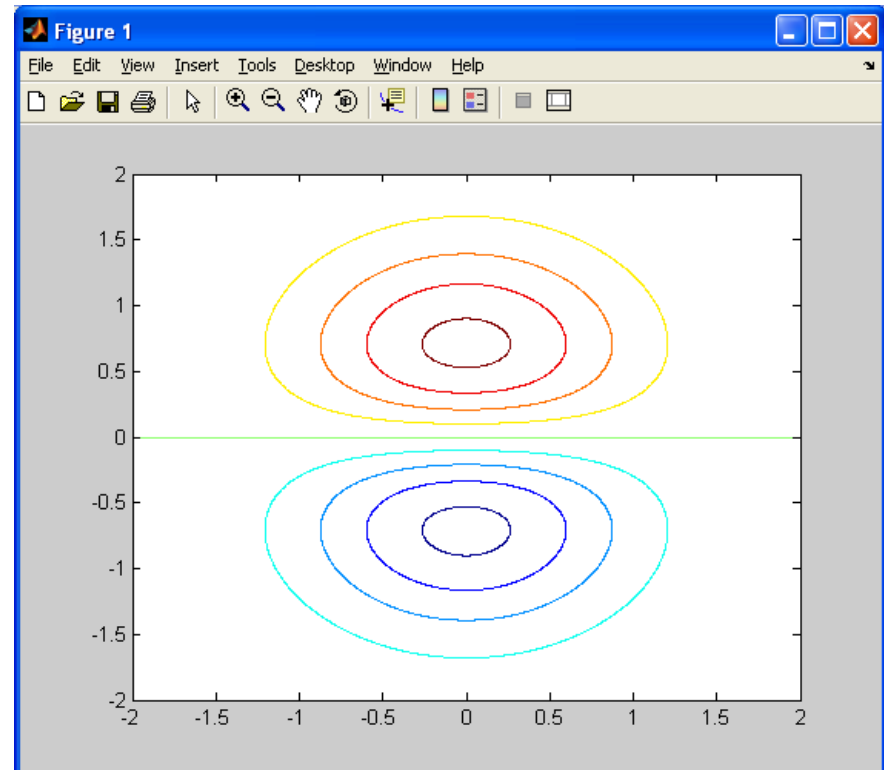
2. Definizione anonima della funzione

Dopo aver definito la funzione mediante definizione anonima
il comando `ezcontour(z,[x_min x_max],[y_min y_max])`
(o `ezcontourf(z,[x_min x_max],[y_min y_max])`) ne traccia le curve di livello

1. Definizione puntuale: ESEMPIO

$$(1) \quad z = ye^{-x^2-y^2}$$

```
>> x=linspace(-2,2,1000);  
>> y=linspace(-2,2,1000);  
>> [X Y]=meshgrid(x,y);  
>> z=Y.*exp(-X.^2-Y.^2);  
>> contour(x,y,z);
```

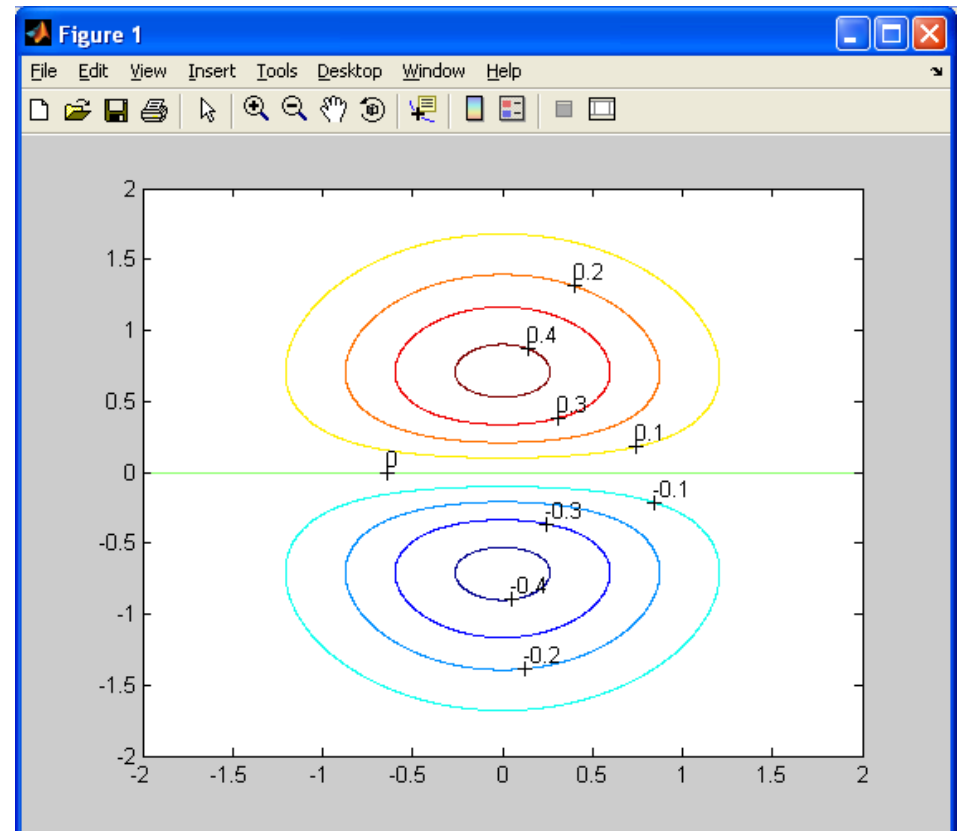


OSS. È possibile inserire il valore della quota relativa ad ogni curva di livello

È necessario memorizzare una variabile in output (ad esempio c) quando si usa il comando contour

Il comando **clabel(c)** indica la quota per ogni curva di livello

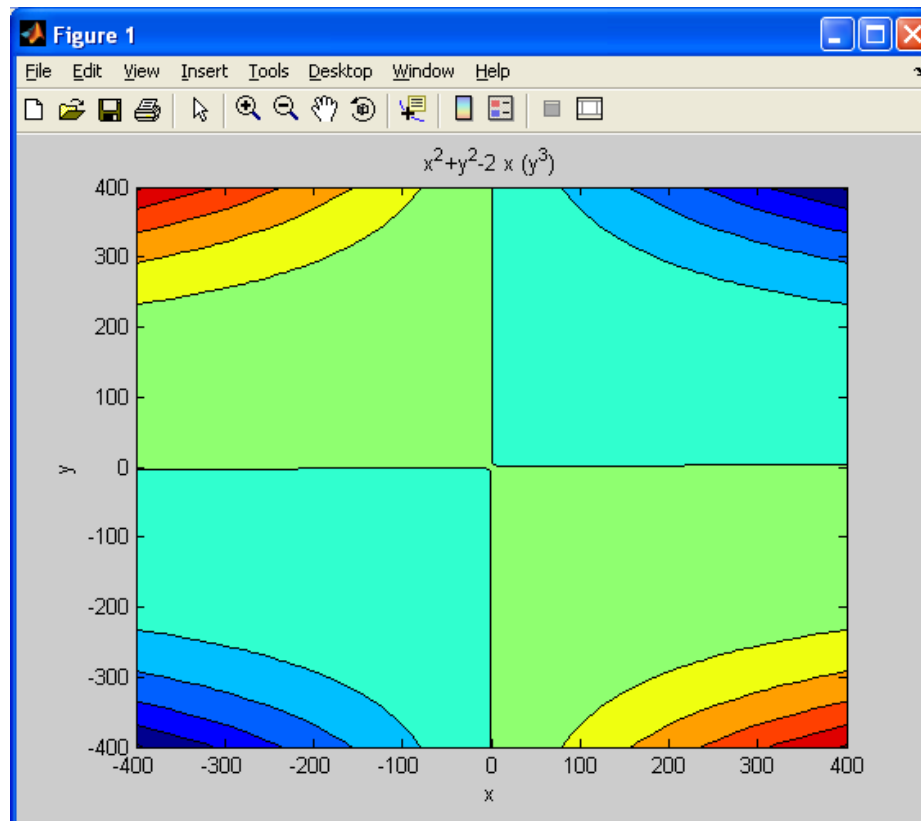
```
>> [c]=contour(x,y,z);  
>> clabel(c);
```



2. Definizione anonima: ESEMPIO

$$(2) \quad z = x^2 + y^2 - 2xy^3$$

```
>> z=@(x,y) x.^2+y.^2-2*x.*(y.^3);  
>> ezcontourf(z,[-400 400],[-400 400]);
```



È possibile tracciare le **curve di livello insieme al grafico** della funzione nello spazio 3D

1. Definizione puntuale della funzione

Dopo aver definito la funzione mediante discretizzazione
il comando **surf(x,y,z)** (o **meshc(x,y,z)**) ne traccia il grafico e le curve di livello

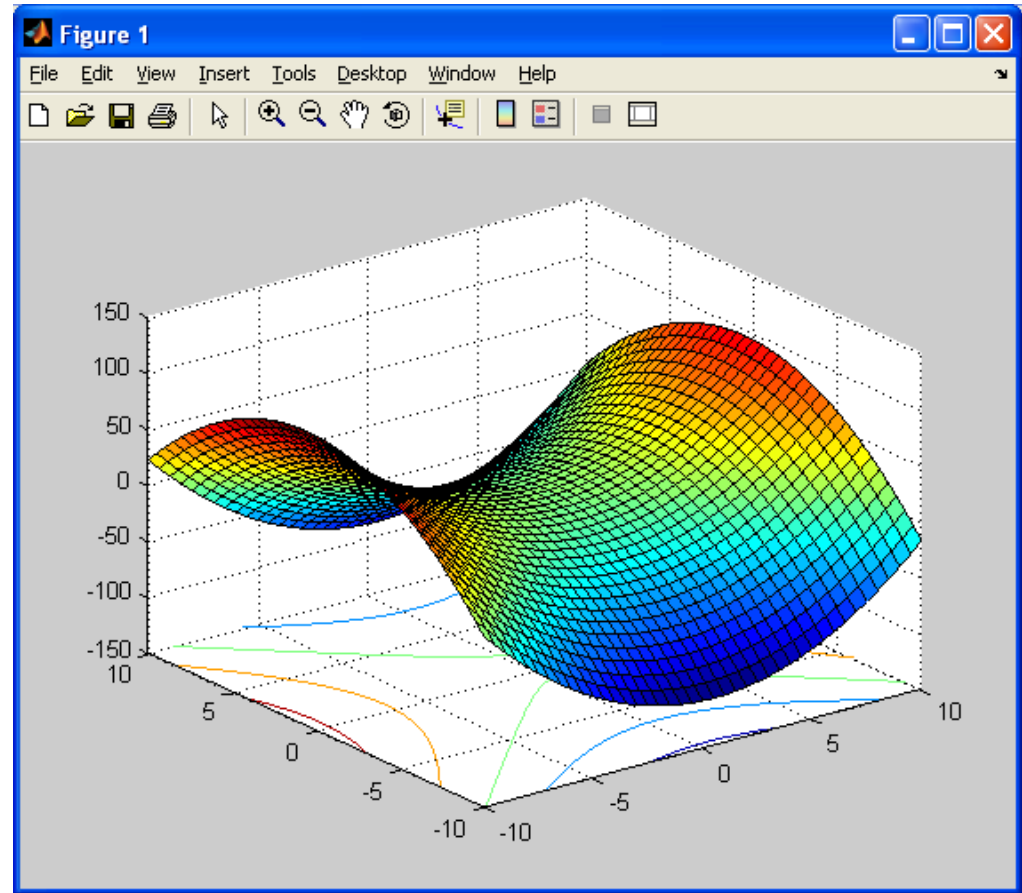
2. Definizione anonima della funzione

Dopo aver definito la funzione mediante definizione anonima
il comando **ezsurf(z,[x_min x_max],[y_min y_max])**
(o **ezmeshc(z,[x_min x_max],[y_min y_max])**) ne traccia le curve di livello

1. Definizione puntuale e curve di livello: ESEMPIO

$$(1) \quad z = x^2 - y^2 - x + 2 + y$$

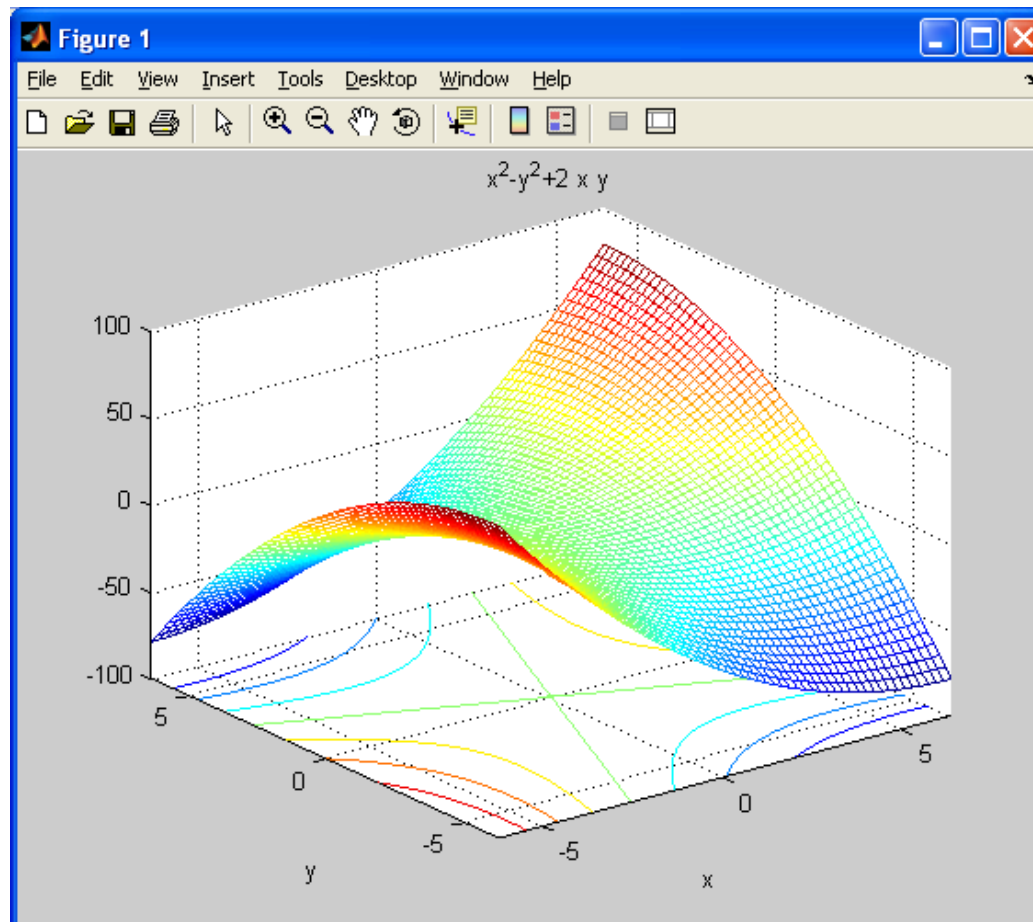
```
>> x=-10:0.5:10;  
>> y=-10:0.5:10;  
>> [X Y]=meshgrid(x,y);  
>> z=X.^2-Y.^2-X+2+Y;  
>> surfc(x,y,z);
```



2. Definizione anonima e curve di livello: ESEMPIO

$$(2) \quad z = x^2 - y^2 + 2xy$$

```
>> z=@(x,y) x.^2-y.^2+2*x.*y;  
>> ezmeshc(z);
```



Esercizio proposto

Si traccino le curve di livello e i grafici delle seguenti funzioni

$$(1) \quad z = \ln(|xy|) + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(2) \quad z = x^2 + y^2 - 1$$

$$(3) \quad z = \sqrt{|x^2 - y^2|} + ye^{x^2 + y^2}$$

$$(4) \quad z = x^2 + y^2 - xy$$

- Si definiscano le funzioni **(1) e (2) mediante discretizzazione**
- Si definiscano le funzioni **(3) e (4) mediante definizione anonima**
- **Ritoccare i grafici** a piacimento utilizzando le barre degli strumenti della finestra grafica

MASSIMI E MINIMI LIBERI

Data la funzione obiettivo $z = f(\underline{x})$ con $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Le funzioni **fminsearch** e **fminunc** restituiscono i minimi relativi di z

- **[x,fval,exitflag,output]=fminsearch(funzione,x0)**

- **[x,fval,exitflag,output]=fminunc(funzione,x0)**

Gli argomenti tra **parentesi quadrate** sono le variabili in uscita (**output**),
le variabili tra **parentesi tonde** sono quelle in entrata (**input**), quindi:

- **output**: informazioni richieste dall'utente

- **input**: dati del problema

Variabili in input

- **funzione** è la funzione della quale si cercano i minimi relativi, essa deve essere definita come funzione anonima del vettore x di componenti $x(1)$ e $x(2)$
- **$x0$** è il punto di partenza, cioè il vettore a partire dal quale inizia la ricerca dei punti di minimo

Variabili in output

- **x** è il vettore delle coordinate di un punto di minimo (quello più vicino al vettore iniziale $x0$)
- **fval** è il valore della funzione obiettivo nel punto di minimo
- **exitflag** indica il motivo della fine della ricerca (per cui l'algoritmo si arresta) ed è un numero intero: **1** se l'algoritmo converge ad x , **0** se si è raggiunto il numero massimo di iterazioni, **-1** se non si sono trovati punti di minimo
- **output** restituisce diverse informazioni circa l'algoritmo usato

OSS: le variabili in output **fval**, **exitflag**, **output** non sono obbligatorie

NB 1

Le funzioni viste restituiscono **un solo punto di minimo relativo** che dipende dalla scelta del vettore iniziale x_0 , quindi:

È IMPORTANTE VALUTARE PRIMA QUANTI PUNTI DI MINIMO RELATIVO ESISTONO E DA QUALE PUNTO INIZIALE SI VUOLE PARTIRE

(ad esempio tracciando le curve di livello della funzione obiettivo)

NB 2

È POSSIBILE ESEGUIRE LE FUNZIONI VISTE UTILIZZANDO L'OPTIMIZATION TOOL

(si apre digitando **optimtool** nella command window)

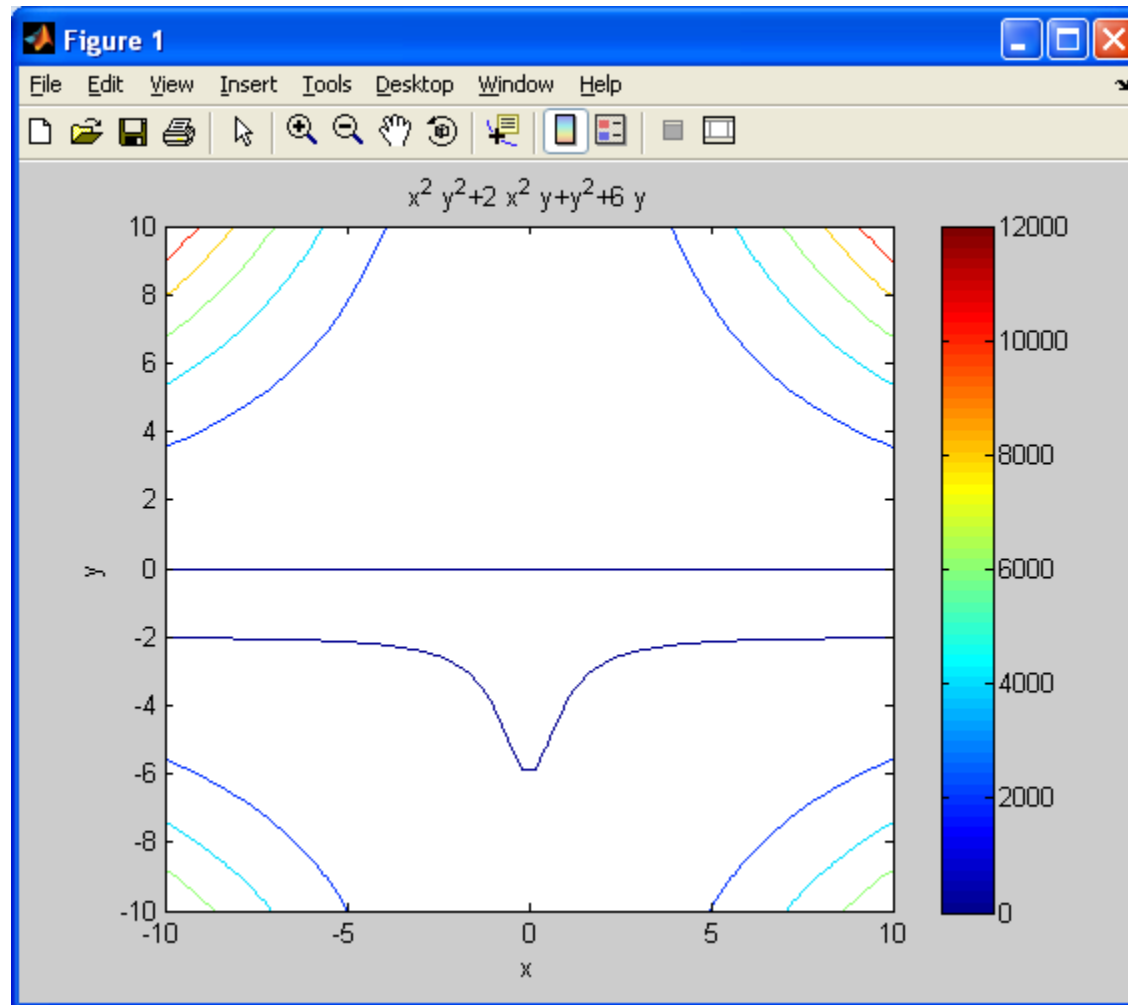
ESEMPIO 1

Si vogliono determinare i minimi relativi della seguente funzione:

$$z = x^2 y^2 + 2x^2 y + y^2 + 6y$$

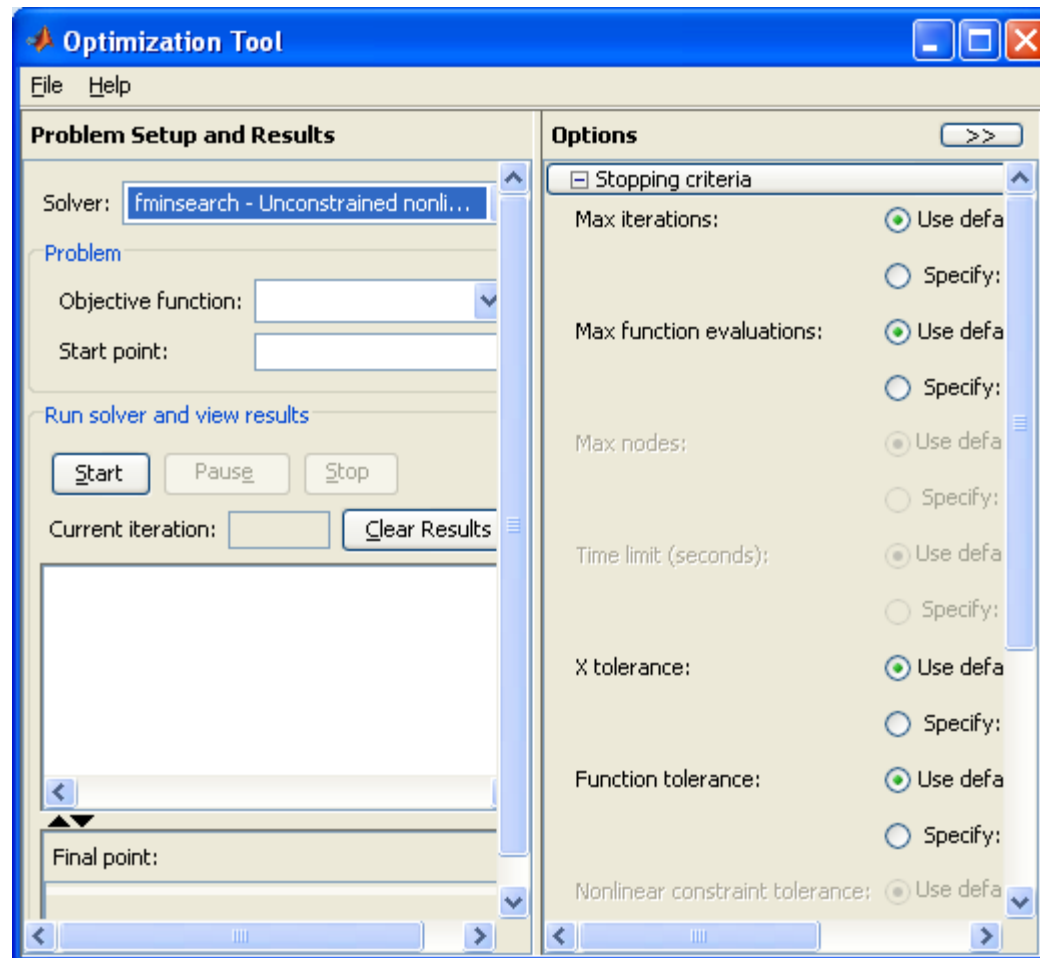
1) Tracciamo le curve di livello

```
>> z=@(x,y) x.^2.*y.^2+2*x.^2.*y+y.^2+6*y;  
>> ezcontour(z,[-10 10], [-10 10])
```



2) Apriamo l'optimization tool:

>> optimtool



3) Utilizzando l'optimization tool, possiamo:

- Selezionare la funzione fminsearch per risolvere il problema (o fminunc)
- Selezionare l'algoritmo (MatLab suggerisce la scelta dell'algoritmo)
- Definire la funzione obiettivo:

$$@ (x) x(1)^2 x(2)^2 + 2 x(1)^2 x(2) + x(2)^2 + 6 x(2)$$

(funzione anonima del vettore x di componenti $x(1)$ e $x(2)$
dove non si è fatto uso delle operazioni puntuali)

- Definire il vettore iniziale:

$$[0 \ -2]$$

CLICCANDO SU START VIENE ESEGUITA LA FUNZIONE fminsearch

Si ottiene:

IL PUNTO

Final point:	
1	2
-0	-3

INFORMAZIONI SULL'ALGORITMO

Current iteration:

Optimization running.
 Optimization terminated.
 Objective function value: -8.99999999774802
 Optimization terminated:
 the current x satisfies the termination criteria using OPTIONS.TolX of 1.000000e-004
 and F(X) satisfies the convergence criteria using OPTIONS.TolFun of 1.000000e-004

OSS

se si sceglie un punto iniziale x_0 troppo lontano dal punto di minimo
 l'algoritmo si arresta producendo un risultato non esatto e notificando il
 motivo dell'arresto

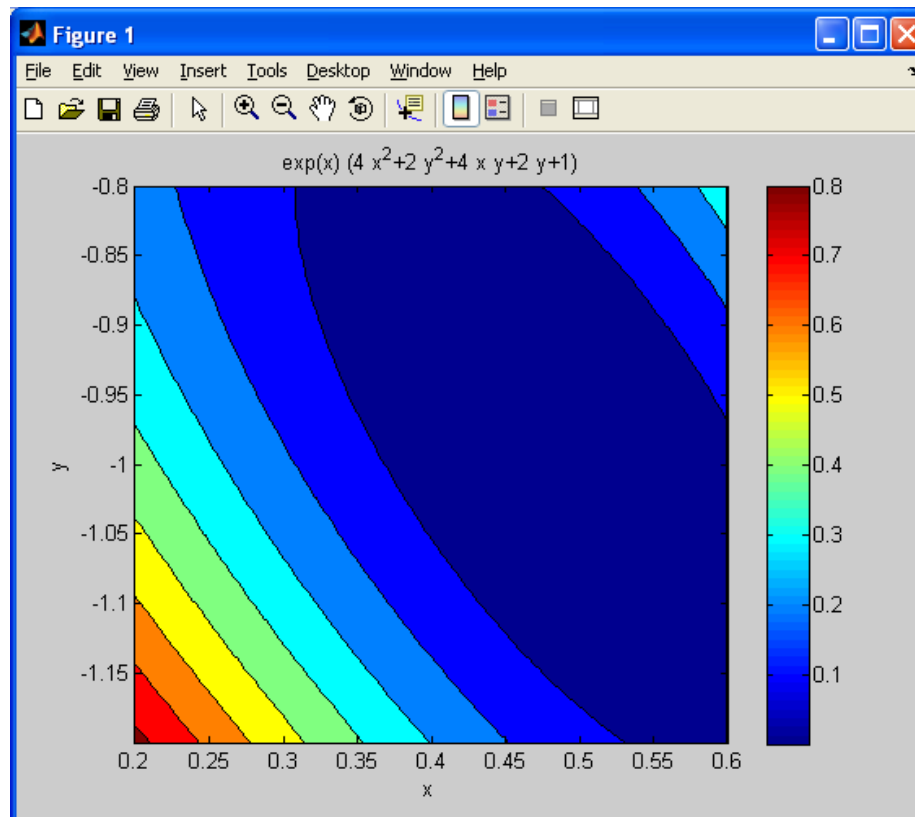
ESEMPIO 2

Si vogliono determinare i massimi relativi della seguente funzione:

$$f(x, y) = -e^x(4x^2 + 2y^2 + 4xy + 2y + 1)$$

NB RICERCARE I MASSIMI DI f È EQUIVALENTE A RICERCARE I MINIMI DI $-f$

**Curve di
livello di $-f$:**



1) Apriamo l'optimization tool:

```
>> optimtool
```

2) Utilizziamo l'optimization tool:

- Selezionare la funzione fminunc
- Selezionare l'algoritmo
- Definiamo la funzione obiettivo -f:

$$@(\mathbf{x}) \exp(\mathbf{x}(1)) * (4 * \mathbf{x}(1)^2 + 2 * \mathbf{x}(2)^2 + 4 * \mathbf{x}(1) * \mathbf{x}(2) + 2 * \mathbf{x}(2) + 1)$$

- Definiamo il vettore iniziale: $[0.6 \ -0.6]$

START

Si ottiene:

Final point:	
1	2
0,5	-1

Optimization running.

Optimization terminated.

Objective function value:

1.0250511118040976E-14

Optimization terminated: relative infinity-
norm of gradient less than options.TolFun.

ESERCIZI PROPOSTI

Determinare i massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

$$1) z = (2x^2 + y)(x - y)$$

$$2) z = y^3 + 3y^2 + x^3 - 3x$$

$$3) z = 2x^2 + y^2 - 4x$$

$$4) z = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + y^2$$

$$\left[1) M \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{16} \right) \quad 2) M(-1, -2), m(1, 0) \quad 3) m(1, 0) \quad 4) m(1, 0) \right]$$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Data la funzione obiettivo $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$z = f(\underline{x}) \text{ tale che } g(\underline{x}) = 0$$

La funzione **fmincon** restituisce i minimi vincolati di z
ed è eseguibile mediante **l'optimization tool**

OSS

la funzione fmincon permette di risolvere problemi di minimo in cui
sono presenti più vincoli

(lineari - non lineari- di uguaglianza – di disuguaglianza)

Nel caso di un unico vincolo di uguaglianza questo può essere:

1) LINEARE

2) NON LINEARE

ESEMPIO 1 (vincolo lineare)

Si vogliono determinare i massimi vincolati della seguente funzione:

$$f(x, y) = xy \quad \text{t.c.} \quad x + 2y - 1 = 0$$

Per valutare quanti minimi vincolati esistono possiamo tracciare le curve di livello della funzione -f insieme al vincolo

NB Il vincolo è definito da una curva piana

Dobbiamo quindi tracciare il plot di una funzione implicita:

1) Si definisce g come funzione anonima di x e y:

```
>> g=@(x,y) x+2*y-1;
```

2) Si esegue il comando **ezplot(g,limiti)**:

```
>> ezplot(g,[-2 2],[-2 2])
```

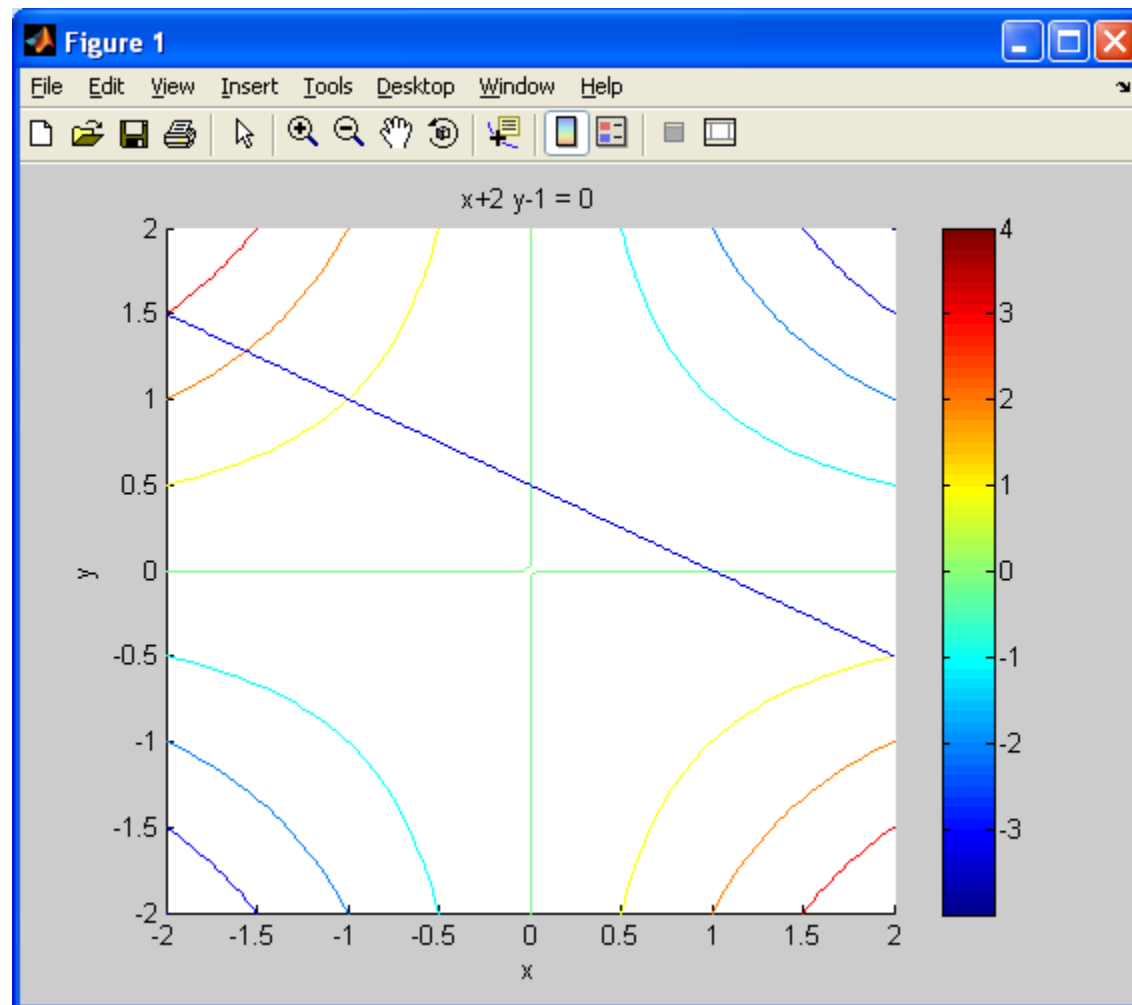
Quindi:

```
>> f=@(x,y) -(x.*y);  
>> g=@(x,y) x+2*y-1;  
>> hold on  
>> ezcontour(f,[-2 2],[-2 2])  
>> ezplot(g,[-2 2],[-2 2])
```

NB

IL COMANDO **hold on** PERMETTE DI TRACCIARE I DUE PLOT
(CURVE DI LIVELLO E IL GRAFICO DI g)
SULLO STESSO PIANO

Si ottiene:



1) Apriamo l'optimization tool:

```
>> optimtool
```

2) Utilizziamo l'optimization tool:

- Selezionare la funzione fmincon
- Selezionare l'algoritmo
- Definiamo la funzione obiettivo -f:

$$@(x)-(x(1)*x(2))$$

- Definiamo il vettore iniziale: [0 0]

- Definiamo il **VINCOLO LINEARE**

NB un vincolo lineare ha la seguente forma:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

DOBBIAMO QUINDI DEFINIRE A ,b

nei campi Aeq e beq ("LINEAR EQUALITIES")

$$\begin{array}{lcl} \text{Aeq:} & & [1 \ 2] \\ \text{b:} & & 1 \end{array}$$

START

OTTENIAMO:

Current iteration: 3

Optimization running.
 Optimization terminated.
 Objective function value: -0.12500000000000003
 Optimization terminated: first-order optimality measure less
 than options.TolFun and maximum constraint violation is less
 than options.TolCon.

Final point:	
1	2
0,5	0,25

ESEMPIO 2 (vincolo non lineare)

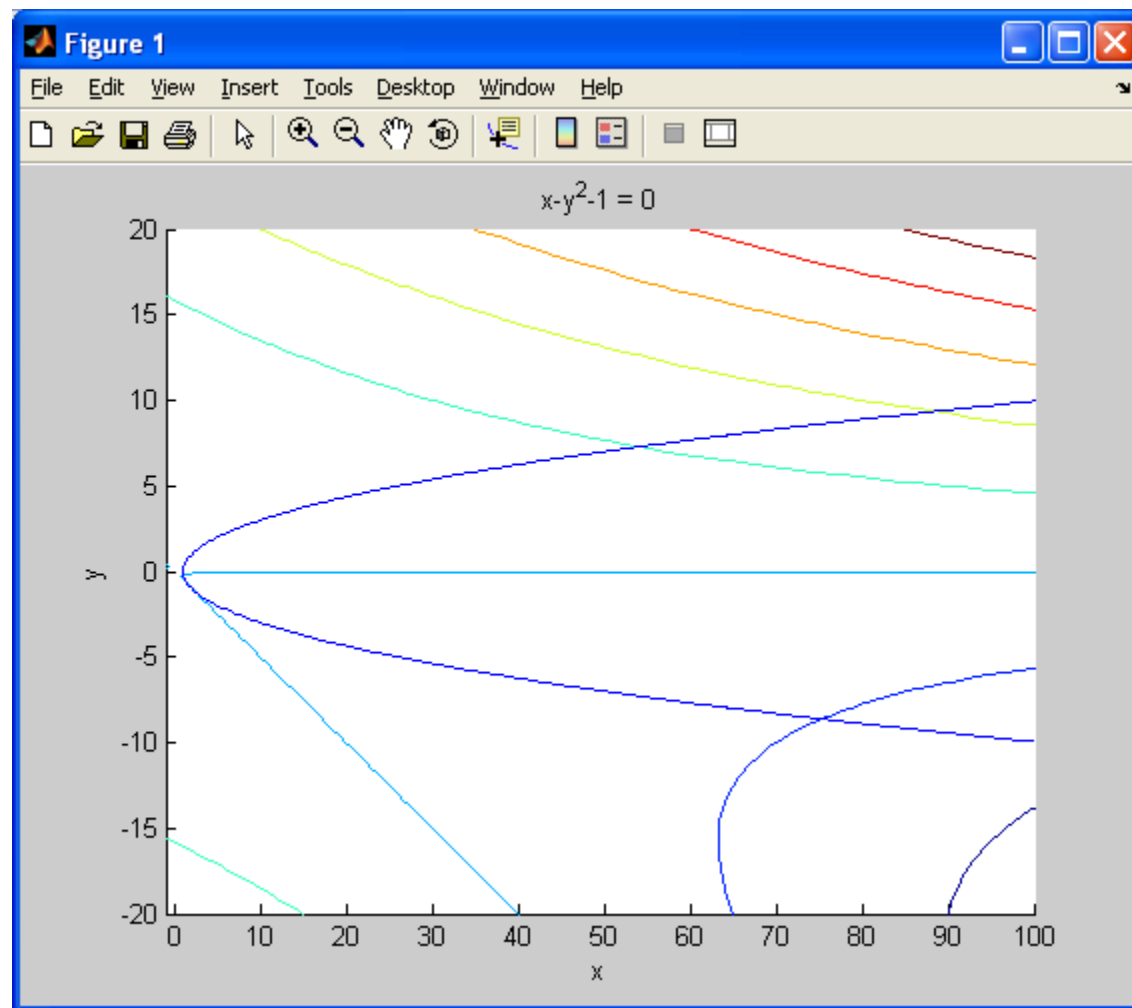
Si vogliono determinare i minimi vincolati della seguente funzione:

$$z = xy + 2y^2 \quad \text{t.c.} \quad x - y^2 - 1 = 0$$

Tracciamo le curve di livello della funzione insieme al vincolo:

```
>> f=@(x,y) x.*y+2*y.^2;  
>> g=@(x,y) x-y.^2-1;  
>> hold on  
>> ezcontour(f,[-1,100],[-20 20])  
>> ezplot(g,[-1,100],[-20 20])
```

Si ottiene:



1) Apriamo l'optimization tool:

```
>> optimtool
```

2) Utilizziamo l'optimization tool:

- Selezionare la funzione fmincon
- Selezionare l'algoritmo
- Definiamo la funzione obiettivo :

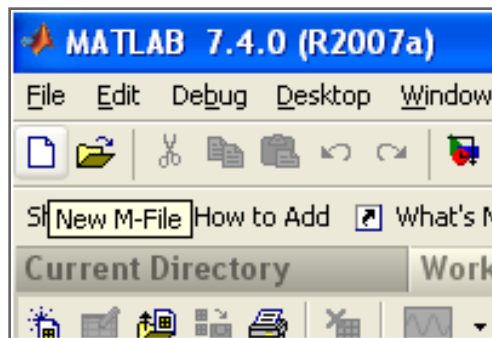
$$@ (x) x(1) * x(2) + 2 * x(2) ^ 2$$

- Definiamo il vettore iniziale: [1 -1]

- Definiamo il **VINCOLO NON LINEARE**

NB La funzione non lineare del vincolo deve essere definita in un **M-file**:

Apriamo un M-file :



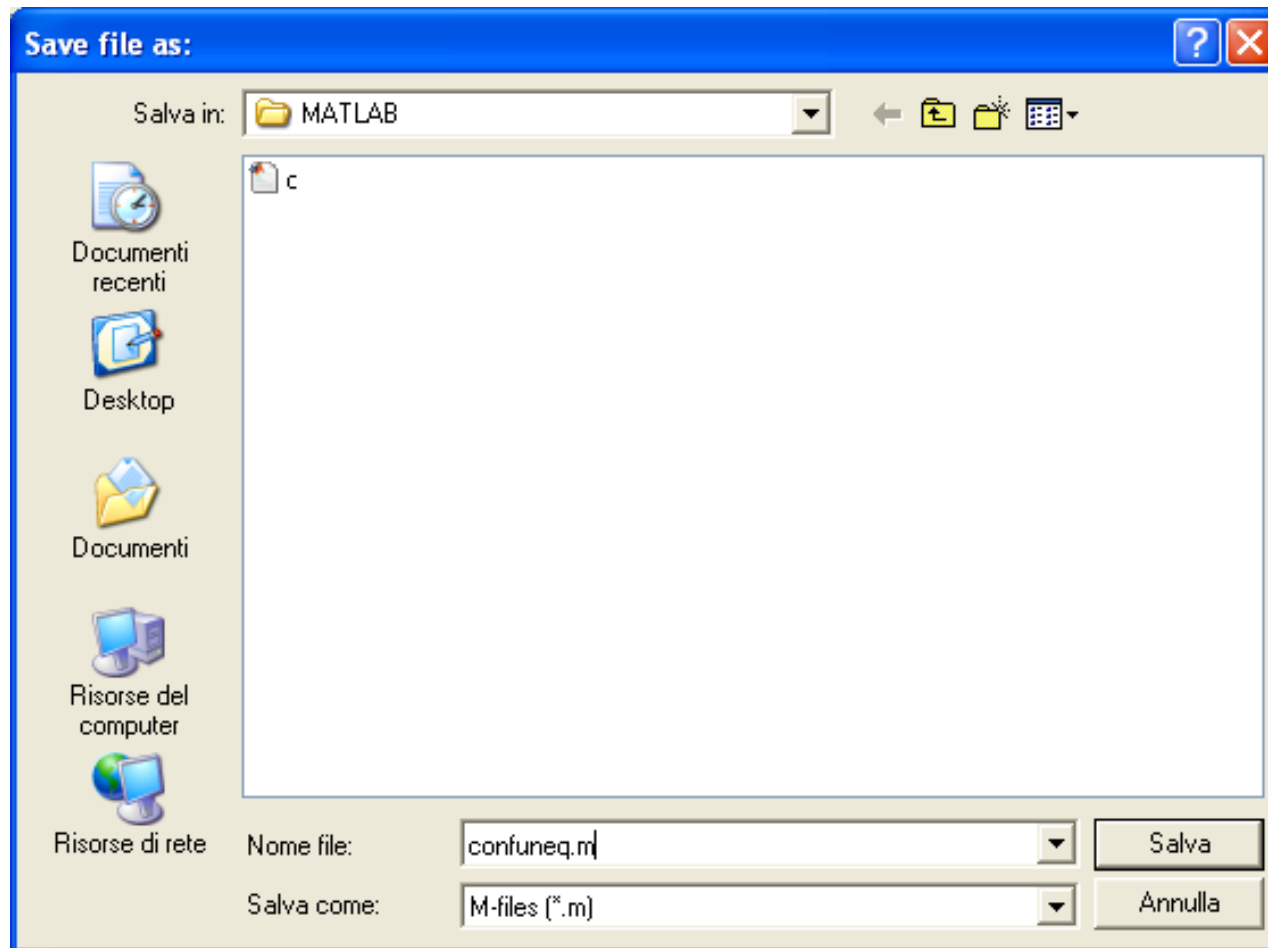
Definiamo nel M-file il vincolo non lineare
(distinguendo i vincoli di uguaglianza da quelli di disuguaglianza):

```

1 function [c, ceq] = confuneq(x)
2 % vincoli non lineari di disuguaglianza (assenti)
3 c = [];
4 % vincolo non lineare di uguaglianza
5 ceq = x(1)-x(2)^2-1;

```

Salviamo il file **.m** nella cartella MATLAB:



A questo punto basta richiamare il nome del file (@confuneq) nell'optimization tool:

The screenshot shows the MATLAB Optimization Tool window. The title bar is blue with the text "Optimization Tool". Below the title bar is a menu bar with "File" and "Help". The main area is titled "Problem Setup and Results". It contains several input fields and dropdown menus for configuring an optimization problem. The "Solver" is set to "fmincon - Constrained nonlinear minimization". The "Algorithm" is set to "Medium scale". The "Problem" section is expanded, showing the "Objective function" as "@(x)x(1)*x(2)+2*x(2)^2", "Derivatives" as "Approximated by solver", and "Start point" as "[1 -1]". The "Constraints" section is also visible, with fields for "Linear inequalities", "Linear equalities", "Bounds", and "Nonlinear constraint function". The "Nonlinear constraint function" is set to "@confuneq".

Optimization Tool

File Help

Problem Setup and Results

Solver: fmincon - Constrained nonlinear minimization

Algorithm: Medium scale

Problem

Objective function: $\text{@(x)x(1)*x(2)+2*x(2)^2}$

Derivatives: Approximated by solver

Start point: [1 -1]

Constraints:

Linear inequalities: A: b:

Linear equalities: Aeq: beq:

Bounds: Lower: Upper:

Nonlinear constraint function: @confuneq

Derivatives: Approximated by solver

START

Current iteration:	8	Clear Results
----- Optimization running. Optimization terminated. Objective function value: -0.14814814814062985 Optimization terminated: first-order optimality measure less than options.TolFun and maximum constraint violation is less than options.TolCon.		

Final point:	
1	2
1,111	-0,333

ESERCIZI PROPOSTI

Determinare i massimi e minimi vincolati delle seguenti funzioni soggette ai vincoli indicati:

$$1) z = 2x + 2y + 1 \text{ t.c. } x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$2) z = 2x^2 - 4y \text{ t.c. } 2x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$3) z = \frac{x}{y^2 + 1} \text{ t.c. } x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$4) z = x^2 y \text{ t.c. } 2x + y - 5 = 0$$

$$5) z = x^3 + y^2 \text{ t.c. } 2x + y = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 1) M(1,1), m(-1,-1) \quad 2) M(0,-1), m(0,1) \quad 3) M(3,0), m(-3,0) \\ 4) M\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right), m(0,5) \quad 5) M\left(-\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right), m(0,0) \end{array} \right]$$