

LABORATORIO DI MATEMATICA 2

Prof.ssa Elisabetta Michetti

Terza parte

1. Applicazioni economiche

Problema del consumatore

Si considerino due beni (1) e (2).

Il consumatore trae utilità dalle quantità consumate di ciascun bene $x(1)$ e $x(2)$.

La **funzione di utilità** è del tipo

$$u(x(1), x(2)) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

La funzione di utilità è funzione delle due variabili $x(1)$ e $x(2)$

della quale è possibile tracciare le curve di livello (**curve di indifferenza**)

Alcuni esempi di funzioni di utilità:

1) *lineare* : $U(x(1), x(2)) = x(1) + x(2)$

2) *di secondo grado* : $U(x(1), x(2)) = (x(1) + x(2))^2$

3) *Cobb – Douglas* : $U(x(1), x(2)) = x(1)^a x(2)^{1-a}, 0 \leq a \leq 1$

Il consumatore ha a disposizione un **reddito fissato R** pertanto,
dati i prezzi di ciascun bene $p(1)$ e $p(2)$,
le quantità massime che il consumatore potrà consumare di ciascun bene
devono rispettare il seguente **vincolo di bilancio** (lineare)

$$p(1)x(1) + p(2)x(2) = R$$

L'obiettivo del consumatore è quello di
MASSIMIZZARE L'UTILITA' DATO IL VINCOLO DI BILANCIO (e di non-negatività)

ESEMPIO 1

Data la seguente funzione di utilità $u(x(1), x(2)) = x(1)^2 + 2x(2)^2$

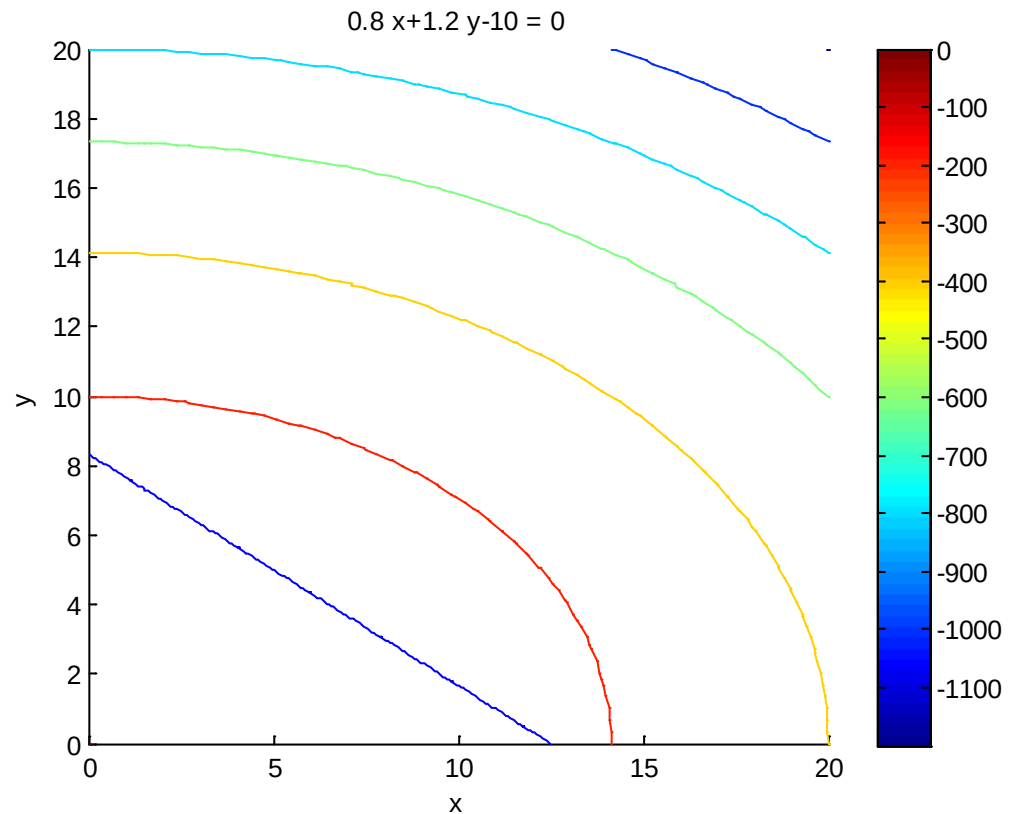
Siano $p(1)=0.8$ e $p(2)=1.2$ i prezzi dei due beni e sia $R=10$ il reddito disponibile,

Si risolva il problema del consumatore

A) Graficamente

```
>> f=@(x,y) -x.^2-2*y.^2;
>> g=@(x,y) 0.8*x+1.2*y-10;
>> hold on
>> ezcontour(f,[0 20],[0 20])
>> ezplot(g,[0 20],[0 20])
```

Le curve di livello sono le curve di indifferenza



B) Analiticamente

Problema di minimo di $-f$
con vincolo lineare
e vincoli di non negatività

NB il vincolo di non negatività
[0 0] deve essere inserito in
lower bounds

Solver:

Algorithm:

Problem

Objective function:

Derivatives:

Start point:

Constraints:

Linear inequalities: A: b:

Linear equalities: Aeq: beq:

Bounds: Lower: Upper:

Nonlinear constraint function:

Derivatives:

Run solver and view results

Current iteration:

Optimization running.
Optimization terminated.
Objective function value: -138.888888888889
Optimization terminated: first-order optimality measure less than options.TolFun and maximum constraint violation is less than options.TolCon.

< >

Final point:

1	2
0	8,333

ESERCIZIO PROPOSTO

Data la seguente funzione di utilità

$$u(x(1), x(2)) = \sqrt[3]{x(1)^2 x(2)}$$

Siano $p(1)=2$ e $p(2)=1.5$ i prezzi dei due beni
e sia $R=20$ il reddito disponibile,

Si risolva il problema del consumatore

dal punto di vista analitico e grafico

Problema dell'impresa

Si considerino due fattori di produzione (1) e (2) (in genere capitale e lavoro).

L'impresa impiega le quantità $x(1)$ e $x(2)$ dei due fattori
per produrre un livello di output z .

La **funzione di produzione** è del tipo

$$z(x(1), x(2)) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

La funzione di produzione è funzione delle due variabili $x(1)$ e $x(2)$
della quale è possibile tracciare le curve di livello (**isoquanti**)

Alcuni esempi di funzioni di produzione:

1) *lineare* : $z = x(1) + x(2)$

2) *di secondo grado* : $z = (x(1) + x(2))^2$

3) *Cobb – Douglas* : $z = Ax(1)^a x(2)^b, 0 < a, b < 1$

($A > 0$ dipende dal livello tecnologico dell'azienda)

Siano $c(1)$ e $c(2)$ i **costi unitari** di ciascun fattore. Il costo totale è dato da

$$C = c(1)x(1) + c(2)x(2)$$

Le linee di livello della funzione costo sono quelle curve (in genere delle rette) che rappresentano le possibili combinazioni dei due fattori (ad es. capitale e lavoro) che lasciano invariato il costo totale per l'azienda e prendono il nome di **isocosti**

Possibili problemi dell'impresa:

- 1. Determinare la combinazione dei fattori che minimizza il costo totale mediante il vincolo della quantità prodotta**
- 2. Determinare la combinazione dei fattori che massimizza la produzione con il vincolo del costo**

ESEMPIO 2

Data la seguente funzione di produzione (di Cobb-Douglas) $z = 10x(1)^{0.8}x(2)^{0.5}$

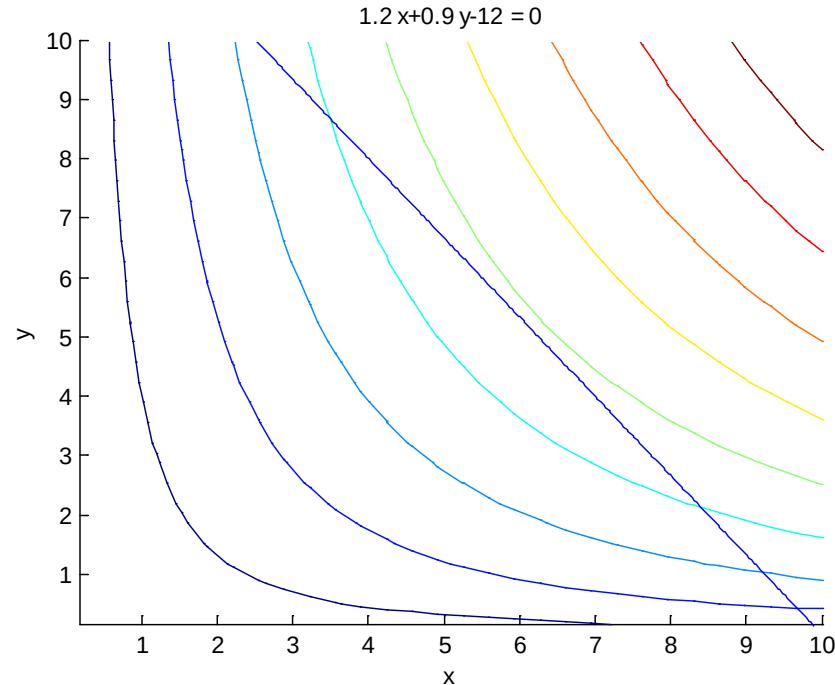
Siano $c(1)=1.2$ e $c(2)=0.9$ i costi dei due fattori di produzione.

Si determini la combinazione dei due fattori che massimizza la produzione dato il costo totale $C=12$ (problema di tipo 2)

A) Graficamente

```
>> f=@(x,y) 10*x.^(0.8)*y.^(0.5);
g=@(x,y) 1.2*x+0.9*y-12;
hold on
ezcontour(f,[-10 10],[-10 10])
ezplot(g,[-10 10],[-10 10])
```

Le curve di livello della funzione di produzione si chiamano isoquanti



ESEMPIO 2**B) Analiticamente**

Problema di minimo di $-f$
 con vincolo lineare
 e vincoli di non negatività

Optimization Tool

File Help

Problem Setup and Results

Solver: fmincon - Constrained nonlinear minimization

Algorithm: Active set

Problem

Objective function: $@(x) -(10*x(1)^(0.8)*x(2)^(0.5))$

Derivatives: Approximated by solver

Start point: [6 6]

Constraints:

Linear inequalities: A: b:

Linear equalities: Aeq: [1.2 0.9] beq: 12

Bounds: Lower: [0 0] Upper:

Nonlinear constraint function:

Derivatives: Approximated by solver

Run solver and view results

Start Pause Stop

Current iteration: 3 Clear Results

Optimization terminated:

Objective function value: -96.89469543193606

Optimization terminated: magnitude of directional

Final point:

1	2
6,154	5,128

ESEMPIO 3

Data la seguente funzione di produzione $z = x(1)^2 + x(2)^2 + 2x(1)$

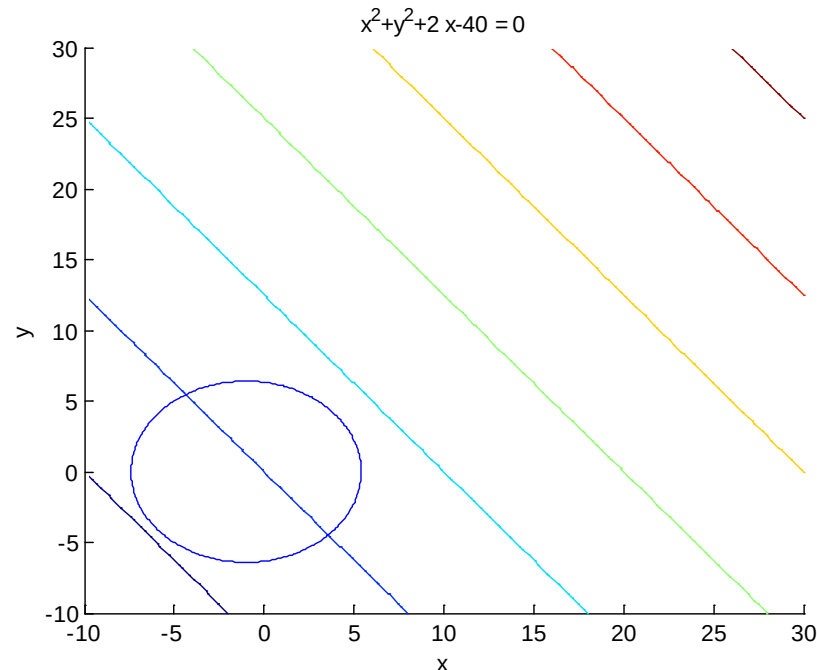
Siano $c(1)=2$ e $c(2)=1.6$ i costi dei due fattori di produzione.

Si determini la combinazione dei due fattori che minimizza il costo totale data una produzione $z=40$ (problema di tipo 1)

A) Graficamente

```
>> f=@(x,y) 2*x+1.6*y;
g=@(x,y) x^2+y^2+2*x-40;
hold on
ezcontour(f,[-10 30],[-10 30])
ezplot(g,[-10 30],[-10 30])
```

Le curve di livello della funzione di costo si chiamano isocosti



ESEMPIO 3**B) Analiticamente**

Problema di minimo di f
con vincolo non lineare
e vincoli di non negatività

m file `confuneq.m`

```
function [c, ceq] = vincolo(x)
% Nonlinear inequality constraints
c = [];
% Nonlinear equality constraints
ceq = x(1)^2+x(2)^2+2*x(1)-40;
```

Optimization Tool

File Help

Problem Setup and Results

Solver:

Algorithm:

Problem

Objective function:

Derivatives:

Start point:

Constraints:

Linear inequalities: A: b:

Linear equalities: Aeq: beq:

Bounds: Lower: Upper:

Nonlinear constraint function:

Derivatives:

Run solver and view results

Current iteration:

Optimization running.
Optimization terminated.

Final point:

1	2
5,403	0

ESERCIZIO PROPOSTO

Data la seguente funzione di produzione $z = x(1)^2 + x(2)^{0.8}$

Siano $c(1)=1.3$ e $c(2)=1.7$ i costi dei due fattori di produzione.

Si determini la combinazione dei due fattori che massimizza la produzione dato il costo totale $C=20$

Si determini la combinazione dei due fattori che minimizza il costo totale data una produzione $z=30$