

MATEMATICA GENERALE VS II (secondo semestre)

Prof.ssa Elisabetta Michetti

A. MATRICI

1. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{vmatrix} 2a & -2 \\ a+1 & a \end{vmatrix} = 0$.
3. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che il determinante di $A = \begin{pmatrix} 2k & k & k-2 \\ k+1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sia 4.
5. Risolvere la seguente disequazione: $\begin{vmatrix} k & k-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} > 0$
6. Si scriva una matrice $A(5 \times 5)$ avente determinante nullo.
7. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1/2 & -3/4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 11/2 & 8 \end{pmatrix}$, calcolare il determinante.
8. Il determinante di $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -a & 7 \\ b & -3/4 & -b & 1 \\ c & -1 & -c & 7 \\ d & 0 & -d & 8 \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ è nullo. Vero o falso? Perché?
9. Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
10. Risolvere la seguente equazione: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

B. FUNZIONI DI DUE VARIABILI

B.1 DOMINIO

Determinare per via grafica il dominio delle seguenti funzioni:

1. $z = \sqrt{y - 2x + 1} + \ln(x^2 + y - 3)$

2. $z = \ln(x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4)$

3. $z = \frac{\sqrt{-x^2 - y^2 + 9}}{x - 2y + 4}$

4. $z = \ln\left(y - \frac{1}{x} + 2\right)$

5. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 8} + \ln(x^2 - y - 1)$

6. $z = \sqrt{\frac{y - 2x + 1}{x^2 + y^2 - 9}} + \ln(x)$

7. $z = \sqrt{y + 1} + \ln[(x^2 - y - 1)(x^2 + y^2 + 2y - 3)]$

8. $z = \sqrt{\frac{y - x}{y + x}} + \ln(-x^2 - y^2 + 9)$

B.2 CURVE DI LIVELLO

Tracciare le curve di livello delle seguenti funzioni:

1. $z = y - \frac{3}{x}$

2. $z = y - e^x$

3. $z = x^3 - y$

4. $z = 4y - 3x + 1$

5. $z = 2y + 6x - 1$

6. $z = x^2 + y^2$

7. $z = x^2 + y$

B.3 MASSIMI E MINIMI LIBERI

Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni:

1. $z = x^2 + 2y^2 - 8y + 5$

2. $z = -x^4 + 2y^4 + 3$

3. $z = y^2 - 2x^2 + xy$

4. $z = 2y^4 + 8y + 2x^4$

5. $z = \frac{y^3}{3} - y + x^2 + 1$

6. $z = x^3 + 3x^2 + y^2 - 1$
7. $z = -x^3 + 3x + y^4 - 4y$
8. $z = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2y$
9. $z = x^2y^2 + 2x^2y + 2x^2 + x$
10. $z = \frac{2}{3}x^3y^2 + x^2y^2 + y^2 + y$
11. $z = x^4y^2 + \frac{4}{3}x^3y^2 + y^3 - 3y$
12. $z = (x - y)(y^2 + y)$
13. $z = (x^3 + x^2)(y + 2) + 2x$
14. $z = (x^2 - y)(y^2 - 1)$

B.4 MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

(1) Determinare i punti di massimo e minimo relativi delle seguenti funzioni soggette ai vincoli di seguito indicati.

1. $z = 3xy$ con vincolo $2x + 4y - 1 = 0$
2. $z = xy^2$ con vincolo $x - 2y + 1 = 0$
3. $z = x^2 + y^2 - 2$ con vincolo $y - x = 0$
4. $z = y(x - x^2)$ con vincolo $y - 3x = 0$
5. $z = xy + y - 1$ con vincolo $y - x^2 + 1 = 0$
6. $z = 2x + 2y + 1$ con vincolo $x^2 + y^2 - 2 = 0$
7. $z = 4x + 2y - 2$ con vincolo $x^2 + y^2 - 20 = 0$
8. $z = x - y - 1$ con vincolo $x^2 + y^2 - 8 = 0$
9. $z = 2x^2 - 4y$ con vincolo $2x^2 + y^2 - 1 = 0$
10. $z = 2y^2 - 8x$ con vincolo $2y^2 - 2x^2 + 8 = 0$
11. $z = 2x^2 + 4y$ con vincolo $2x^2 + y^2 - 4 = 0$
12. $z = -4x + 2y^2$ con vincolo $-x^2 + 2y^2 + 1 = 0$

(2) Determinare per via grafica i punti di massimo e minimo vincolati.

1. $z = y - 2x + 1$ con vincolo $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$
2. $z = xy$ con vincolo $x + y - 5 = 0$
3. $z = 2y - x$ con vincolo $y - x^2 = 0$
4. $z = y + x$ con vincolo $x^2 + y^2 + 2y = 0$
5. $z = x^2 + y^2$ con vincolo $x + y - 4 = 0$

C. FUNZIONI DI UNA VARIABILE

C.1 FUNZIONE COMPOSTA

Date le seguenti funzioni, si dica se esistono le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ ed in caso affermativo le si determinino:

1. $f = x^2 - 1, g = x^3 + 2x$
2. $f = x^2, g = \ln x$
3. $f = \sqrt{x}, g = \frac{1}{x}$
4. $f = -x^2 + 2, g = \ln(x+1)$
5. $f = x \ln x, g = \sqrt{e^{x-1}}$
6. $f = \sqrt{x^3 + 2}, g = \ln(x^2 + 1) - 3$

C.2 FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

I) Si risolvano le seguenti disequazioni:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x-10} < -2$
2. $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$
3. $\ln(3+x) + \ln(2x) < 0$
4. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 1$
5. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-2}{x}\right) > 2$
6. $e^{\frac{(x-1)^1}{x}} \geq 1$

II) Dopo aver studiato il dominio delle seguenti funzioni, determinare le intersezioni con gli assi e studiarne il segno:

1. $y = (x^2 + x - 2) \ln(x - 1)$
2. $y = \frac{x+5}{\ln(x+3)}$
3. $y = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3} - 1 \right] x$
4. $y = \frac{1}{x} \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$
5. $y = \frac{e^x}{-x^2 - 2x + 3}$
6. $y = (x-1) \ln(x+3)$
7. $y = (e^{3x} - 1) \log_{\frac{1}{2}}(2x+6)$

III) Calcolare i seguenti limiti:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3x^2+2}{x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5^+} x^2 \ln(x-5)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}{2x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1}$$

IV) Dopo aver determinato il dominio delle seguenti funzioni, calcolare gli opportuni limiti:

$$1. y = (2x+1)\ln(x-3)$$

$$2. y = \frac{\ln(x+2)}{x-1}$$

$$3. y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$4. y = (x-2)e^x$$

$$5. y = 2x e^{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$6. y = \frac{\ln x}{x^2-1}$$

V) Determinare i massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

$$1. y = \frac{e^{4x+2}}{3x-1}$$

$$2. y = e^{\frac{x+2}{2x-1}}$$

$$3. y = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

$$4. y = \ln\left(\frac{2x-2}{3x+1}\right)$$

VI) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$1. y = (x+1)e^{-x-2}$$

$$2. y = \frac{e^x}{x}$$

$$3. y = (x-1)\ln(x-1)$$

$$4. y = \frac{\ln x}{x}$$

$$5. y = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

D. INTEGRALI IMMEDIATI

Si risolvano i seguenti integrali

$$1) \int_{-1}^2 \frac{x^2}{3} - 2 dx$$

$$2) \int -5e^x + \frac{2}{x} dx$$

$$3) \int \sqrt[5]{x^2} dx$$

$$4) \int_0^3 \frac{2}{x^2} dx$$

$$5) \int \frac{1}{2x} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$6) \int_1^2 \frac{e^x}{4} - x^5 dx$$

Si risolvano i seguenti integrali

$$1) \int (2\sqrt[3]{x^2} - 1) dx$$

$$2) \int_{-1}^1 x(x^2 + 2)^2 dx$$

$$3) \int \frac{-1}{x} dx$$

$$4) \int \frac{3x}{x^2 + 1} dx$$

$$5) \int_0^1 \frac{1}{e^{3x}} dx$$