

ciamo ad ogni enunciato atomico che interviene nel discorso un certo numero naturale n . Scriviamo p_n al posto dell'enunciato con il numero n . Ogni volta che incontriamo un enunciato composto, mettiamo il simbolo del connettivo adatto tra i segni adottati per rappresentare le sue componenti e mettiamo tra parentesi il complesso simbolico così ottenuto. Vedremo tra breve che i connettivi finora studiati sono sufficienti per rendere conto di *ogni* situazione logica che si possa incontrare. A questo punto non ci resta che da calcolare una tavola di verità più o meno complessa, secondo il numero degli enunciati atomici che compaiono nel nostro discorso. Se il risultato di questi calcoli è sempre 1, quali che siano i valori di verità che associamo a $p_1, p_2, \dots, p_n$, il nostro discorso è sicuramente vero. Se invece vi sono combinazioni di valori di verità che danno il risultato 0, occorre controllare se una situazione del genere si può verificare nel nostro contesto, poiché ciò significherebbe che il discorso non è corretto logicamente.

Una funzione di verità è dunque nient'altro che una funzione che ha per argomenti certe combinazioni di valori di verità, cioè certe successioni finite dei simboli 0 e 1, e che prende i suoi valori nell'insieme $\{0, 1\}$ che ha per elementi i soli simboli 0 e 1 che sono i valori di verità. La logica si presenta dunque a questo punto sotto la veste della teoria delle funzioni finitarie di un insieme con due elementi in se stesso! Infatti, abbiamo scelto i simboli 0 e 1 arbitrariamente: quindi non ha nessuna importanza che si parli dell'insieme $\{0, 1\}$ o di un qualunque altro insieme, purché abbia esattamente due elementi. Diciamo che si tratta di funzioni *finitarie*, poiché supponiamo ragionevolmente che i nostri discorsi abbiano una lunghezza finita, e ciò implica che solo un numero finito di enunciati atomici intervengono in essi. Un discorso determinerà in particolare una funzione *binaria*, se due sono gli enunciati atomici che vi compaiono; un discorso che consiste di un solo enunciato atomico o di una sola negazione di un enunciato atomico, o nel quale compare comunque un solo enunciato atomico, come per esempio il « discorso »: « Piove e

piove, o non piove » determina una funzione *unaria*; analogamente diciamo che la funzione di verità di un discorso è *ternaria* se intervengono tre enunciati atomici e così via.

Occupiamoci ora del problema al quale si accennava poco fa: sono i connettivi finora studiati sufficienti per trascrivere *ogni* discorso nella maniera sopra descritta? In altre parole, possiamo rappresentare ogni funzione di verità, cioè ogni funzione finitaria da un insieme con due elementi in se stesso, come composizione delle funzioni associate ai connettivi finora incontrati? L'equivalenza delle due domande è una conseguenza del principio di vero-funzionalità: se la verità o falsità di un discorso dipende solo dai valori di verità degli enunciati atomici, e non dal significato di questi, saper descrivere la struttura logica di ogni discorso è la stessa cosa che conoscere ogni funzione di verità.

Vediamo dunque intanto quante sono le funzioni *unarie* da un insieme con due elementi in se stesso: il loro elenco è presto fatto, poiché ne esistono esattamente quattro che si possono descrivere così:

TAV. 9 - Le quattro funzioni di verità unarie

	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Conosciamo già f_3 : non è altro che la funzione associata alla negazione. Ma conosciamo anche f_2 : è questa la funzione di verità associata ad ogni discorso che consiste in un solo enunciato atomico, poiché allora il valore di verità dell'intero « discorso » coincide con il valore di verità della sua unica componente.

Può sembrare che f_1 e f_4 sono funzioni molto banali: quale che sia il valore di verità dell'unico enunciato atomico che compare nel discorso, il discorso cui si associa f_1 è sempre vero, mentre il discorso cui si associa f_4 è sempre falso! Ve-

dremo che questi discorsi sono invece estremamente importanti.

Se A è un enunciato, un discorso che ha f_1 come funzione di verità è per esempio A o non- A , infatti se A è vero, non- A è falso e se A è falso, non- A è vero, almeno uno dei membri della disgiunzione è sempre vero, dunque la funzione di verità di A o non- A è proprio la f_1 . Ciò significa che nella nostra logica vale il principio del *terzo escluso*: non può essere che né A né non- A siano veri. Un altro esempio di « discorso » con f_1 come funzione di verità è questo: non-non- A se e solo se A : *la doppia negazione equivale all'affermazione*.

Vediamo ora un discorso che ha f_4 come funzione di verità: sia di nuovo A un qualunque enunciato atomico, è facile vedere che ad « A e non- A » va associata la f_4 . Questo significa che nella nostra logica vale il principio della *non-contraddizione*: la contraddizione per eccellenza, l'affermazione contemporanea di un enunciato e della sua negazione, non è mai vera.

Oltre a scoprire che questi principi logici sono validi nella nostra logica, abbiamo così visto che sappiamo descrivere tutte le quattro funzioni di verità uparie con i mezzi di cui disponiamo.

Proseguiamo! Quante sono le funzioni binarie da un insieme con due elementi in se stesso? Sono 16: il lettore verificherà facilmente che esistono 2^2 funzioni di verità n -arie; per $n = 4$ dovremmo già studiare 65.536 tali funzioni! Fortunatamente, un risultato della teoria delle funzioni di verità stabilisce che, in un certo senso, le abbiamo già tutte studiate: ogni funzione di verità, quale che sia il numero dei suoi argomenti, si può ottenere componendo la negazione con la congiunzione; o piuttosto le funzioni di verità ad esse associate. Vediamo come si può ottenere questo risultato, almeno per il caso delle funzioni di verità binarie. Dietro questo risultato tecnico si nascondono infatti tante leggi logiche¹⁴.

¹⁴ Cfr. per es. Quine [4], cap. 1, 2.

Ecco la tavola di tutte le funzioni di verità binarie:

TAV. 10 - Le sedici funzioni di verità binarie

		g_1	$\vee$	$\leftarrow$	g_4	$\rightarrow$	g_6	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$ $	$\dot{\vee}$	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Abbiamo riportato il simbolo a suo tempo introdotto per i connettivi che già conosciamo sulla colonna che riassume la corrispondente funzione di verità. Abbiamo invece indicato con $g_1, g_4, \dots, g_{16}$ le funzioni corrispondenti a connettivi finora non discussi. Il simbolo sulla terza colonna richiede forse qualche spiegazione: mentre nella quinta colonna si trova la funzione di verità associata ad un enunciato del tipo $A \rightarrow B$, la terza colonna viene associata ad un enunciato del tipo $B \rightarrow A$, come è facile verificare. Cominciamo la nostra opera di riduzione: vediamo che, delle sedici funzioni, quelle che compaiono nelle ultime otto colonne possono esprimersi mediante quelle che compaiono nelle prime otto colonne più la negazione. Prendiamo per esempio la nona colonna, associata al simbolo $|$, cioè all'« o » della incompatibilità: essa si può ottenere a partire dalla ottava colonna scambiando tutti i simboli, cioè scrivendo 0 dov'era un 1, e 1 dove era 0. Ora, questo modo di scambiare i simboli equivale a comporre la funzione originale con la negazione (per esattezza si dovrebbe dire « con la funzione associata alla negazione »), poiché questa fa appunto corrispondere 1 a 0 e viceversa. Quel che sembra un gioco formale traduce un fatto degno di interesse: l'incompatibilità equivale alla negazione della congiunzione. Nello stesso modo si verifica che la negazione dell'equi-