

Modelli e verità

Queste note presentano la nozione di modello in una maniera che differisce da quella riscontrabile in Varzi et al., *Logica*, § 6.4. La differenza riguarda in particolare il modo in cui sono trattate le fbf quantificate universalmente o esistenzialmente (ossia le fbf della forma $\forall\beta\Psi$ o $\exists\beta\Psi$ (cfr. Varzi et al., p. 171). La trattazione qui presentata è (si spera) più intuitiva e vicina a quella standard (che verrà comunque illustrata sotto, per gli interessati).

Un *modello* M per il linguaggio FOL (linguaggio della logica del prim'ordine, First-Order Logic) è dato da un insieme non vuoto di oggetti, D , e da una interpretazione I (Quindi scriviamo $M = \langle D, I \rangle$). I è una funzione che associa ad ogni costante individuale, α , un membro $I(\alpha)$ di D ; ad ogni predicato a zero posti, Φ , il valore V (vero) o F (falso); ad ogni predicato ad un posto, Φ , una proprietà (insiemisticamente: un insieme $I(\Phi)$ di membri di D); ad ogni predicato ad n posti, per $n > 1$, Φ , una relazione $I(\Phi)$ (insiemisticamente: un insieme $I(\Phi)$ di insiemi ordinati con n oggetti, ciascuno dei quali è un membro di D). Inoltre assumeremo che per ogni membro, d , di D esiste una specifica costante individuale *aggiuntiva* v , diversa dalle costanti individuali di FOL, tale che $I(v) = d$. NB: ad ogni membro di D corrisponde dunque una diversa costante individuale aggiuntiva.

NB: Le costanti individuali aggiuntive generano delle formule che non sono fbf del linguaggio FOL (perché contengono delle costanti che non fanno parte del vocabolario di FOL). Ma le possiamo considerare fbf relativamente al modello che ci mette a disposizione le costanti aggiuntive in questione. Ricorriamo a queste costanti aggiuntive perché non vogliamo dare per scontato che nel nostro linguaggio ci sia un nome per ogni oggetto, reale o possibile che sia. Però per nostra comodità supponiamo che ogni modello ci mette a disposizione, per ogni oggetto, un corrispondente nome (una costante aggiuntiva) in modo da poter parlare di quell'oggetto anche se nel nostro linguaggio di partenza manca un nome per quell'oggetto. (L'espedito delle costanti aggiuntive viene utilizzato da Raymond Smullyan nel suo libro *First-order Logic*).

Adesso definiamo ricorsivamente quando una fbf Φ è vera nel modello M :

Con " $M \models \Phi$ " abbreviamo "la fbf Φ è vera nel modello M ".

Con " $M \not\models \Phi$ " abbreviamo "è falso che la fbf Φ è vera nel modello M ".

Abbreviamo anche "se e solo se" con "sse".

Ecco la definizione ricorsiva:

(1a) se Φ è atomica, della forma Ψ , dove Ψ è un predicato a zero posti, allora $M \models \Phi$ a seconda che $I(\Psi) = V$ oppure $= F$.

(1b) se Φ è atomica, della forma $\Psi\alpha$, allora $M \models \Phi$ sse dal punto di vista del modello M , $I(\alpha)$ ha la proprietà $I(\Psi)$. (In termini insiemistici $I(\alpha) \in I(\Phi)$).

(1c) se Φ è atomica, della forma $\Psi\alpha_1 \dots \alpha_n$, $M \models \Phi$ sse dal punto di vista del modello M , $I(\alpha_1), \dots, I(\alpha_n)$ stanno nella relazione $I(\Psi)$. (In termini insiemistici $\langle I(\alpha_1), \dots, I(\alpha_n) \rangle \in I(\Phi)$).

(2) se Φ è della forma $\sim \Psi$ allora $M \models \Phi$ sse $M \not\models \Psi$.

(3) se Φ è della forma $(\Psi \ \& \ X)$ allora $M \models \Phi$ sse: $M \models \Psi$ e $M \models X$.

(4) se Φ è della forma $(\Psi \vee X)$ allora $M \models \Phi$ sse: $M \models \Psi$ oppure (in senso inclusivo) $M \models X$.

(5) se Φ è della forma $(\Psi \rightarrow X)$ allora $M \models \Phi$ sse: $M \not\models \Psi$ oppure (in senso inclusivo) $M \models X$.

(6) se Φ è della forma $(\Psi \leftrightarrow X)$ allora $M \models \Phi$ sse: $M \models (\Psi \rightarrow X)$ ed $M \models (X \rightarrow \Psi)$

(7) se Φ è della forma $\forall\beta\Psi$ allora $M \models \Phi$ sse: per ogni costante individuale aggiuntiva α di M , $M \models \Psi\alpha/\beta$ (dove $\Psi\alpha/\beta$ è la fbf che si ottiene sostituendo ogni occorrenza di β in Ψ con α)

(8) se Φ è della forma $\exists\beta\Psi$ allora $M\models\Phi$ sse: per almeno una costante individuale aggiuntiva α di M , $M\models\Psi\alpha//\beta$

(9) niente è vero in M , se non in virtù delle clausole di cui sopra.

Definiamo adesso "la fbf Φ del linguaggio FOL è una verità logica (della logica del prim'ordine)" (in breve: $\models\Phi$), così: per qualsiasi modello M , $M\models\Phi$.

Definiamo infine la nozione di conseguenza logica così: La fbf Φ del linguaggio FOL segue logicamente dalle premesse $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ (in breve: $\Phi_1, \dots, \Phi_n\models\Phi$) sse, per ogni modello M tale che $M\models\Phi_1, \dots, M\models\Phi_n$, si dà il caso che $M\models\Phi$.

Esercizi per verificare la comprensione

A) Si consideri il modello $M = \langle D, I \rangle$ assumendo che D è l'insieme dei numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, che $I(a) = 1$, $I(b) = 2$, $I(F)$ è l'insieme dei numeri dispari, $I(G)$ l'insieme dei numeri pari, $I(R)$ la relazione 'successore', ossia l'insieme $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \dots\}$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1) $M\models Ga$

2) $M\models Fa$

3) $M\models (Ga \ \& \ \sim Fa)$

4) $M\models \exists xGx$

5) $M\models \forall xGx$

6) $M\models \exists x(\sim Fx \ \& \ \sim Gx)$

7) $M\models \forall x\exists y(Rxy)$

B) Si dimostri che $\forall x(\sim(Px \ \& \ \sim Px))$, $\forall x(Px \vee \sim Px)$, $\forall x(Px \rightarrow Px)$ sono verità logiche.

[Suggerimento: si scelga un modello arbitrario $\langle D, I \rangle$ e si mostri che per ogni costante aggiuntiva α deve essere vero che $M\models \sim(P\alpha \ \& \ \sim P\alpha)$; procedere analogamente per gli altri casi].

C) Si dimostri che $\forall x\exists yRxy$ non è una verità logica.

(Suggerimento: si trovi un modello M tale che $M\models \forall x\exists yRxy$).

PER GLI INTERESSATI

Non ci saranno esercizi né domande di esame su quanto segue. Aggiungo queste note per chi è interessato ad approfondire.

Il modo standard (quello che si trova nella maggior parte dei libri di testo e che riprende più da vicino quanto proposto da Tarski, il fondatore della teoria dei modelli) di trattare le fbf quantificate universalmente o esistenzialmente non utilizza le costanti aggiuntive viste sopra e presuppone che formule con variabili non vincolate da quantificatori possano essere fbf (per es. Rxy). Tali fbf sono chiamate "aperte".

Viene quindi utilizzata la nozione di "assegnazione di valore ad una variabile", sulla base della quale si parla di verità in un modello anche per fbf aperte.

Si procede così:

Un'assegnazione (di valori alle variabili) è una funzione che associa ad ogni variabile, β , del linguaggio un oggetto $s(\beta)$ che appartiene al dominio D . Designeremo con $s[\beta/d]$ l'assegnazione identica ad s , se non, possibilmente, per il fatto che associa a β l'oggetto d (NB: se $s(\beta) = d$, allora $s = s[\beta/d]$). Inoltre, data un'interpretazione, I , ed un'assegnazione, s , definiamo I_s come la funzione che associa ad ogni variabile β l'oggetto che le associa s [ossia $I_s(\beta) = s(\beta)$] e ad ogni costante individuale α l'oggetto che le associa I [ossia $I_s(\alpha) = I(\alpha)$].

Adesso definiamo ricorsivamente quando una fbf, A , è vera nel modello M relativamente all'assegnazione s (abbreviazione: $M \models_s A$):

(1a) se Φ è atomica, della forma Ψ , ossia Ψ è un predicato a zero posti, allora $M \models_s \Phi$ a seconda che $I(\Psi) = V$ oppure $= F$.

(1b) se Φ è atomica, della forma $\Psi \alpha$, allora $M \models_s \Phi$ sse dal punto di vista del modello M , $I_s(\alpha)$ ha la proprietà $I(\Psi)$. (In termini insiemistici $I_s(\alpha) \in I(\Phi)$).

(1c) se Φ è atomica, della forma $\Psi \alpha_1 \dots \alpha_n$, $M \models_s \Phi$ sse dal punto di vista del modello M , $I_s(\alpha_1), \dots, I_s(\alpha_n)$ stanno nella relazione $I(\Psi)$. (In termini insiemistici $\langle I_s(\alpha_1), \dots, I_s(\alpha_n) \rangle \in I(\Phi)$).

(2) se Φ è della forma $\sim \Phi$ allora $M \models_s \Phi$ sse $M \not\models_s \Psi$.

(3) se Φ è della forma $(\Psi \& X)$ allora $M \models_s \Phi$ sse: $M \models_s \Psi$ e $M \models_s X$.

(4) se Φ è della forma $(\Psi \vee X)$ allora $M \models_s \Phi$ sse: $M \models_s \Psi$ oppure (in senso inclusivo) $M \models_s X$.

(5) se Φ è della forma $(\Psi \rightarrow X)$ allora $M \models_s \Phi$ sse: $M \not\models_s \Psi$ oppure (in senso inclusivo) $M \models_s X$.

(6) se Φ è della forma $(\Psi \leftrightarrow X)$ allora $M \models_s \Phi$ sse: $M \models_s (\Psi \rightarrow X)$ ed $M \models_s (X \rightarrow \Psi)$

(7) se Φ è della forma $\forall \beta \Psi$ allora $M \models_s \Phi$ sse: per ogni oggetto d in D , $M \models_s [\alpha/d] \Psi$.

(8) se Φ è della forma $\exists \beta \Psi$ allora $M \models_s \Phi$ sse: per almeno un oggetto d in D , $M \models_s [\alpha/d] \Psi$.

(9) niente è vero in M , relativamente ad una assegnazione s , se non in virtù delle clausole di cui sopra.

(Spesso si dice di una fbf Φ che è *soddisfacibile* in un modello M , se per qualche assegnazione s , $M \models_s \Phi$. Analogamente, potremmo dire " Φ è *soddisfatta* in M relativamente a s " anziché " Φ è vera in M relativamente a s ").

La verità rispetto ad un modello e la verità logica sono così definite:

$M \models \Phi$ sse per ogni assegnazione s , $M \models_s \Phi$;

$\models \Phi$ sse, per ogni modello M , $M \models \Phi$.

(Intuitivamente, quale che sia l'assegnazione che scegliamo, nel momento in cui dobbiamo valutare una fbf con quantificatori, le clausole (7) e (8) ci obbligano a considerare tutte le altre assegnazioni rilevanti e quindi la verità in un modello si può considerare verità relativamente al modello in questione e ad una assegnazione *arbitrariamente scelta*, ossia relativamente a qualsiasi assegnazione).

La definizione di conseguenza logica è la stessa di sopra.

(Si noti che potremmo restringere la definizione di $M \models \Phi$ a fbf non aperte (chiuse). Questo è preferibile, se pensiamo alle formule aperte come né vere né false in quanto contenenti delle variabili non vincolate dai quantificatori e quindi da interpretare; nella trattazione appena vista, tipica di molti libri di testo, abbiamo di fatto trattato una fbf aperta Φ come equivalente alla corrispondente "chiusura universale" $\forall \alpha \Phi$).