

I FONDAMENTI DELLA PSICOLOGIA MODERNA

collana pubblicata sotto gli auspici della
SOCIETÀ ITALIANA DI PSICOLOGIA SCIENTIFICA

M. WERTHEIMER - *Il pensiero produttivo*

Costituisce una delle più affascinanti esplorazioni in quella terra incognita rappresentata dal pensiero quando crea, quando fa dei passi in avanti, quando risolve un problema. Insieme all'opera di Duncker, pubblicata anch'essa in questa collana, il lavoro di Wertheimer rappresenta un approccio fresco, pionieristico in un campo nel quale per lungo tempo l'indagine sperimentale aveva dato risultati di una estrema sterilità. Nessuno che si occupi di psicologia, di pedagogia o di filosofia può ignorare questo libro.

Opere già pubblicate in questa Collana:

- J. DOLLARD e coll. - *Frustrazione e aggressività*
- K. DUNCKER - *La psicologia del pensiero produttivo*
- G. KATONA - *Memoria e organizzazione*
- W. KÖHLER - *Principi dinamici in psicologia*
- K. LEWIN - *Teoria dinamica della personalità*
- W. METZGER - *I fondamenti della psicologia della gestalt*
- A. MICHOTTE - *La percezione della causalità*
- J. PIAGET - *Il giudizio morale nel fanciullo*
- L.S. VYGOTSKY - *Pensiero e linguaggio*
- H. WERNER - *Psicologia comparata dello sviluppo mentale*
- M. WERTHEIMER - *Il pensiero produttivo*

ISBN 88-09-21119-7



9 788809 211193

C.M. 02008-H

Prezzo L. 38.000

I FONDAMENTI DELLA PSICOLOGIA MODERNA

collana pubblicata sotto gli auspici della
SOCIETÀ ITALIANA DI PSICOLOGIA SCIENTIFICA

Max Wertheimer

IL PENSIERO PRODUTTIVO

a cura di Paolo Bozzi



1

IL PENSIERO PRODUTTIVO

PSICOLOGIA

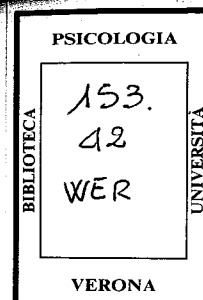
153

42

WER

UNIVERSITÀ

VERONA



I FONDAMENTI DELLA PSICOLOGIA MODERNA

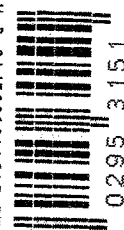
collana diretta da

Paolo Bozzi, Gaetano Kanizsa, Guido Petter

pubblicata sotto gli auspici della

SOCIETÀ ITALIANA DI PSICOLOGIA SCIENTIFICA

Università di Verona
Sistema Bibliotecario d'Ateneo



0295 3151

ws 70125

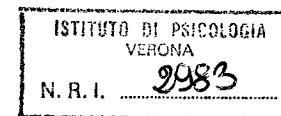
MAX WERTHEIMER

Il pensiero produttivo

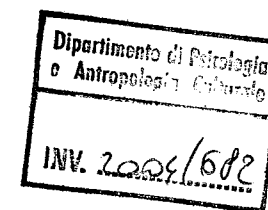
a cura di Paolo Bozzi



Traduzione di
Massimo Giacometti
e
Rosetta Bolletti



70



GIUNTI

70125

Titolo originale dell'opera:

PRODUCTIVE THINKING

ENLARGED EDITION 1959

HARPER & BROTHERS PUBLISHERS - NEW YORK

Copyright 1945, 1959 by Valentine Wertheimer

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta
senza il consenso scritto dell'editore

ISBN 88-09-21119-7

© 1965, 1997 Giunti Gruppo Editoriale, Firenze

Sul metodo di Wertheimer

Questa traduzione italiana del libro di Max Wertheimer dedicato allo studio del pensiero produttivo è stata condotta sulla seconda edizione americana, uscita nel 1959, molto arricchita ed estesa rispetto alla prima, grazie al lavoro di Michael Wertheimer e alla collaborazione di parecchi studiosi e amici dell'Autore, tra i quali Rudolf Arnheim e Solomon E. Asch.

La prima edizione era apparsa nel 1945.

Le preoccupazioni teoretiche che guidano quest'opera, e alcuni degli esempi più significativi che appaiono nel corso delle dimostrazioni, già si trovano nella terza delle *Drei Abhandlungen*, pubblicate nel 1925, quella intitolata *Ueber Schlussprozesse im produktiven Denken*. Una nota all'inizio di questo saggio avverte che esso era stato scritto per essere stampato in un volume commemorativo dedicato a Carl Stumpf dai suoi allievi, in occasione del suo settantesimo compleanno. Dunque i temi fondamentali di quest'opera devono essere stati compiutamente pensati già prima del 1918 (l'anno settantesimo di Stumpf) o del 1920, quando De Gruyter a Berlino pubblicò il *Festschrift*. Sono pensieri che hanno accompagnato Wertheimer durante tutta la sua attività scientifica.

Solo dieci anni prima — tra il 1907 e il 1910 — era ancora viva la polemica tra Wundt e Bühler intorno ai caratteri della metodologia introspezionista della scuola di Würzburg, scatenata dalla pubblicazione degli esperimenti condotti da Bühler nel 1907, dopo i lavori già abbastanza discussi di Watt e Messer.¹ Sulla *Psychological Review*, anzi, c'è ancora nel 1915 un articolo di T.V. Moore, « The Temporal Relations of Meaning and Imagery », scritto nello spirito della tradizione di Würzburg, in parziale e controllata difesa del metodo sostenuto da Kül-

¹ WATT, H. J., « Experimentelle beiträge zu einer Theorie des Denkens », *Arch. für die Ges. Psych.*, 1904, 4. MESSER A. W., « Experimentell-psychologische Untersuchungen über das Denken », *Arch. für die Ges. Psych.*, 1906, 8. WUNDT, W., *Psychol. Stud.*, III (4), 1908.

pe. Oggi quella polemica sembra molto lontana, poco più di una curiosità storica. Mentre Wertheimer fissava i punti essenziali del suo metodo d'indagine, probabilmente, nei laboratori di psicologia, la discussione non era del tutto spenta. Non era uscito il libro fondamentale di Otto Selz, *Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums* (1922), né quello di Gustav Störing, *Das urteilende und schliessende Denken in kausaler Behandlung* (1926), e forse neppure quello di Wilhelm Betz, *Psychologie des Denkens* (1918). Alla luce delle date, le idee centrali che ricorrono in Wertheimer sarebbero dunque vecchie. Eppure lo studioso di psicologia che oggi voglia soddisfare una propria curiosità andando a leggere qualche capitolo di queste opere — sempre assai istruttive, benché non altrettanto divertenti — difficilmente potrà sottrarsi all'impressione di aver a che fare con autori che in qualche modo hanno preparato e percorso, con il loro lavoro, il lavoro di Wertheimer.

Negli ambienti in cui si svolge la ricerca scientifica c'è, spesso, la tendenza a considerare vecchio tutto quello che non è molto recente; questo succede specialmente quando il linguaggio di cui si è servito un autore non è organizzato in modo da poter venire agevolmente tradotto in uno dei linguaggi tecnici nati in tempi successivi, e connessi a esigenze metodologiche nuove, che trovano generalmente la loro giustificazione nell'applicazione di strumenti più precisi e sensibili in certi definiti campi di ricerca, anche se non sono facilmente estensibili all'esplorazione di campi differenti. L'uomo di scienza, come l'uomo della strada, è soggetto alla tentazione di generalizzare quei giudizi che ha potuto costruire con successo su alcune classi di esperienze; e spesso tenta di allargare fino ai limiti del ragionevole la portata di un metodo o di una teoria che abbiano dato frutti eccellenti in uno specifico settore dei suoi studi. Questo procedimento può di quando in quando far scoprire problemi nuovi in mezzo a convinzioni vecchie; ma non è escluso che altre volte metta lo studioso nella deprecabile condizione di non vedere più il senso di un problema che magari offre qualche resistenza al suo tentativo di reimpostazione, ma che, d'altra parte, ripensato nella versione « classica », ancora potrebbe dar luogo a riflessioni ed esperienze produttive.

Credo che l'accelerazione del processo di « superamento » di concezioni e punti di vista del passato che caratterizza la scienza d'oggi possa essere in più di un caso interpretato alla luce di questo schema.

In alcuni settori della psicologia sperimentale le cose sono andate molto in fretta, negli ultimi vent'anni; le ricerche più recenti hanno soppiantato teorie e concetti che pochi anni fa parevano solidamente fondati; a volte questa sostituzione è avvenuta in modo vistoso e radicale, come è accaduto negli studi sulla personalità dopo l'introduzione

dei metodi che impiegano l'analisi fattoriale, o nel caso della psicologia del linguaggio, grazie alle tecniche della psicolinguistica.

In particolar modo gli strumenti statistici hanno permesso in queste ed altre regioni della ricerca psicologica alcune vere e proprie rivoluzioni. Ma se proviamo a guardare le cose da vicino, non sono stati i grossi successi di tali tecniche in quei settori a provocare nuove idee — per esempio — nella teoria della percezione o nello studio del pensiero (del pensiero come fatto distinguibile dal linguaggio o da altri comportamenti non verbali che intervengono nei processi di comunicazione); non pare che i tentativi di procedere su questa strada abbiano dato molta soddisfazione a quegli studiosi che trovano interessante inventare delle domande intorno all'organizzazione dell'esperienza del mondo esterno, oppure intorno alla propria o altrui abilità nel vedere i problemi e le vie delle possibili soluzioni — anche se in linea di principio non esiste alcuna obiezione decisiva contro l'applicabilità dei più sottili criteri quantitativi a tali aspetti dell'esperienza umana. Non si è veduto, per ora, che dalla loro applicazione siano nate idee veramente nuove, tali da mettere in crisi il senso dei problemi tradizionali. In luogo di questo, è semplicemente accaduto che alcuni problemi hanno finito coll'essere trascurati, come se avessero perduto un po' del loro fascino, o fossero diventati il segno di una cultura scientifica non più *à la page* tanto che non varrebbe neppure la pena di indicare un'accusa concreta e circostanziata capace di liquidarli.

Affrontando i capitoli di questo libro di Wertheimer, in breve, il lettore deve lasciare da parte per un momento l'encomiabile desiderio di essere o di apparire *à la page*, e mettersi invece nella condizione di spirito di colui che è veramente animato dalla curiosità di sapere come accadono certe cose: com'è che un problema si configura e si risolve, come può aver luogo in effetti un procedimento inferenziale, una derivazione analitica, una soluzione puramente analogica, un errore, o una scoperta, per piccola che questa sia.

Se entriamo nei panni di chi vuol mettere la propria cultura al corrente leggendo un nuovo libro, per avere le carte in regola di fronte al « caso Wertheimer », per poter citare a proposito il suo nome e maneggiare agevolmente le sue idee in discussioni di psicologia, di logica o di filosofia, per innestarle in un quadro culturale aggiornato e, come si suol dire, aperto, forse ci mettiamo nella peggiore condizione per capire quello che dice.

Il lettore colto in psicologia o in filosofia può incontrare alcune delusioni. Può disturbare il fatto che Wertheimer non abbia usato le tecniche della logica matematica (che invece Piaget o altri padroneggiano con grande sicurezza e profitto), o addirittura il sospetto che egli sia stato poco al corrente dei progressi compiuti da questa disciplina:

nei vent'anni tra le due guerre; oggi di logica matematica parlano tutti, ed è una diffusa forma di civetteria il fare uso di quel tanto che se ne sa. Altri possono trovare fastidioso il fatto che Wertheimer non ha trattato con adeguato rigore i dati quantitativi, che pure avrebbero potuto emergere dalle sue ricerche, o il fatto che ne parla in breve e senza specificare le condizioni della sperimentazione — a volte come se si trattasse di piccoli racconti, non privi di una certa vena d'immaginazione; oppure il fatto che a volte egli cita non soltanto le risposte veramente ottenute, ma anche quelle che semplicemente sarebbero state possibili, e analizza il caso immaginario come se fosse reale; o quando interpreta la struttura logica dei procedimenti impiegati da Galileo nel trattare in modo unitario le leggi della caduta, dell'inerzia e dei piani inclinati senza citare fonti, testimonianze o passi galileiani.

Tenterò di costruirlo, intorno a questi possibili capi d'accusa, una difesa di Wertheimer — non perchè ritenga che è necessario difenderlo da qualcosa, ma per illustrare meglio il modo più giusto di leggere quello che egli ha scritto.

Per quanto riguarda lo scarso impiego della logica simbolica c'è da dire questo: se le situazioni prese in considerazione da Wertheimer l'avessero veramente richiesto (come, per esempio, succede nel caso dei problemi trattati da Inhelder e Piaget nel libro *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*), non vi è ragione per credere che egli non se ne sarebbe servito. Nei problemi che egli presenta — e del resto in tutti quelli che nella vita quotidiana impegnano la nostra riflessione — non compaiono relazioni logiche particolarmente complesse. Quando diciamo: « o questo, o quello, oppure tutti e due » possiamo certamente trascrivere la struttura del nostro enunciato così: $p \vee q$; quando diciamo una frase avente la forma « se ... allora ... » possiamo bene esprimerla in questa forma: $p \supset q$, o in quest'altra $\sim (p. \sim q)$, o anche in quest'altra $\sim p \vee q$. Però, finché la nostra esplorazione si aggira nell'ambito di relazioni come queste, definibili per mezzo di matrici elementari, o anche se parliamo di connessioni tra semplici funzioni proposizionali, il linguaggio comune non può utilmente essere rimpiazzato dai simboli; è inutile mettere qualche lettore in condizioni di non capire, dal momento che scrivendo le cose chiare e tonde tutti le possono capire benissimo, e dal momento che le strutture dei reali processi di pensiero assomigliano più a quelle rintracciabili nella sintassi della lingua madre che a quelle escogitate per connettere opportunamente i simboli. Le tecniche più raffinate occorrono solo quando la complessità dei rapporti analizzati richiede una maggiore finezza dello strumento formale; d'altra parte, nessuno dei sistemi logici elaborati mentre Wertheimer lavorava o anche più tardi ha dimostrato — per esempio — che l'implicazione, in luogo d'essere una relazione asimmetrica come sempre si è creduto, ha rivelato

d'essere, alla luce di una teoria più approfondita, una relazione simmetrica, per cui d'ora innanzi dall'affermazione « se H allora K » sarà possibile ricavare che « se K allora H ». Così, mentre i logici perfezionano i loro sistemi e a volte li mettono in crisi fin dalle radici, quando un bambino ricava H da K sapendo solo che H implica K, sbaglia, ed è giusto tentar di capire la natura e le condizioni del suo errore. Nessuna crisi evolutiva della scienza matematica ha fatto in modo che 3×7 facesse 18 o 23, mentre anche concetti molto più importanti e complessi venivano trasformati radicalmente o sostituiti. Proprio in questo senso l'analisi degli effettivi procedimenti del pensiero logico è possibile, indipendentemente dallo stato in cui la scienza logica si trova in un momento storico particolare, e le conclusioni di Wertheimer o di Dunker o di Woodworth restano corrette, anche quando nelle concezioni degli studiosi di logica ad essi contemporanei siano intervenute profonde trasformazioni. La misurazione di una soglia differenziale d'intensità luminosa, del resto, non dà risultati diversi a seconda della teoria fisica della luce che decidiamo di accettare, o con il progressivo sostituirsi di una interpretazione fisica a un'altra più soddisfacente negli ambienti scientificamente qualificati.

Resta vero, d'altra parte, che il progresso delle discipline logiche può da un momento all'altro mettere in luce nuovi problemi riguardanti la struttura e la dinamica dei fatti del pensiero, intesi come classi di eventi dell'esperienza fenomenica: la scuola di Piaget, per esempio, ha potuto presentare in maniera sperimentalmente aggredibile moltissimi problemi di psicologia del pensiero proprio grazie all'uso dei più recenti strumenti formali costruiti dai logici: la collezione « *Études d'Épistémologie Génétique* », in cui quelle esperienze sono esposte e discusse, è nata proprio grazie alla collaborazione tra logici e psicologi. Fermo restando tutto questo — però — non è detto che quando i problemi affrontati interessano connessioni logiche molto elementari (dal punto di vista psicologico le più istruttive) sia utile abbandonare l'uso delle forme logiche come esse si presentano nel discorso comune, per sostituirle con le corrispondenti rappresentazioni simboliche.

Per quanto riguarda, invece, il fatto che Wertheimer non si è soffermato a trattare quantitativamente i risultati delle sue esperienze, neppure in quegli aspetti che erano facilmente quantificabili (tante soluzioni di questo tipo e tante di quest'altro, età dei bambini, numero dei bambini esaminati, tempo impiegato per raggiungere la soluzione, numero di passaggi errati, ecc.), il lettore desideroso di spiegazioni le troverà nelle parole stesse dell'Autore, oltre che nel significato complessivo di questo libro. « Se il lettore ora mi chiedesse: prima hai detto che alcuni hanno risolto il problema e altri no; ma quanti lo hanno risolto? quanti hanno sbagliato? quanti anni avevano? — vorrebbe dire che non

ha colto il senso del problema. A noi interessa qui di trovare *come* i bambini hanno raggiunto la soluzione, quali fattori hanno giocato un ruolo nel corso di questa prestazione produttiva. Dal momento che non mi accontentavo di risposte solo generiche, come l'esperienza passata, il funzionamento delle connessioni apprese, l'intenzionalità che guida il pensiero verso una certa meta ecc., ho introdotto nella situazione alcune variazioni». « *Nella situazione* », cioè *nel* problema, non in alcune circostanze esterne che riguardano la struttura del problema solo indirettamente o per nulla affatto.

Che su dieci bambini o dieci adulti posti di fronte a un compito solo tre siano stati capaci di risolverlo dice solo che quel compito contiene qualche difficoltà; ma questa circostanza è già nota allo sperimentatore che ha inventato il compito proprio per vedere come mai un passaggio logico invece d'essere semplicemente un altro passo avanti è « una difficoltà ». Non dice nulla intorno all'articolazione dell'evento noetico intercorso tra l'assegnazione del problema e la soluzione. L'età dei bambini ha importanza nella costruzione di un test di livello, perché in questo caso la difficoltà di un problema è adoperata proprio per misurare l'esito di una prestazione e metterlo in rapporto con esiti analoghi già classificati in funzione dell'età dei bambini; poco può dire a colui che vuole sapere come vanno le cose nel corso delle trasformazioni che il problema subisce mentre qualcuno è intento a trovare la via giusta per impostarlo bene.

La questione è proprio questa: se siamo interessati al problema di Wertheimer: « a volte il nostro pensiero lavora veramente e produttivamente: che cosa succede in simili occasioni? che cosa avviene in realtà durante lo svolgimento di questo processo? », allora quello che ci deve importare sono i fattori che intervengono a configurare l'itinerario logico in una piuttosto che in un'altra maniera, e non altro. Potremo scoprire in questo modo che la soluzione di un problema di geometria, benché materialmente presente nella figura lì davanti, non è veduta, non è avvertita come tale — finché non interviene qualcosa a renderla psicologicamente presente; e che lo spostamento di uno solo degli elementi che costituiscono il problema è capace di dare corso a un ordine di riflessioni radicalmente diverso da quello che fin qui avevamo seguito; o che — a un certo momento — il tentativo di trovare per via empirica la prova della validità di una conclusione deduttiva permette di capire il senso di alcuni passaggi logici della derivazione che prima erano stati allineati meccanicamente; oppure, al contrario, che il ricorso all'esemplificazione empirica impedisce di capire la natura del problema che abbiamo davanti. (Tutte queste circostanze sono analizzate nel primo capitolo del libro). Mentre accadono queste cose non ha molta importanza l'età che io ho, o il fatto che altre persone abbiano o no risolto lo stesso problema. Le

variabili agenti nel progredire del mio lavoro, per me che sono il protagonista dell'operazione, funzionano in quanto sono presenti qui e ora — in una forma più o meno definita — nel campo dell'esperienza, nel reale ambiente del mio comportamento, e sono costituite da rapporti che intercorrono momento per momento all'interno del problema fra i suoi termini, e tra questi e l'esito dei tentativi che ho compiuto; non sono rintracciabili in fatti che, rispetto alla struttura del campo d'esperienza in un momento dato, sono esterni, cioè privi di connessioni verificabili con quel sistema isolato che è costituito dal mio lavoro sul problema. Gli stessi stati emozionali, la tensione, i momenti di distrazione, la stanchezza, il piacere di sentirsi avviati sulla strada buona, ecc., possono non essere rilevati nella comprensione della dinamica che regola il processo di soluzione. Infatti, se essi hanno realmente a che vedere con lo stadio raggiunto nel corso del lavoro, avrà maggiore importanza per noi sapere *come* quello stadio è stato raggiunto, che non come dobbiamo classificare il tipo di reazione emotiva ad esso concomitante o conseguente. Le motivazioni che spingono a procedere hanno certo il loro peso nei confronti del rendimento: ma non è la loro somma, o l'analisi della loro natura, che ci può far capire perché a quel punto un mezzo logico è stato preferito a un altro.

Una risposta analoga può essere data all'obiezione riguardante la scarsità delle informazioni lasciate da Wertheimer sulle condizioni di sperimentazione. Alcune delle sue esperienze devono essersi svolte press'a poco come colloqui occasionali; ad es., nel caso di quella signorina che gli descrisse l'organizzazione del suo ufficio. Dico esperienze, ma potrei dire esperimenti, perché alcune variabili furono introdotte nel corso della conversazione, alcune ipotesi si affacciarono e furono verificate. Altre prove devono aver avuto luogo collettivamente o quasi collettivamente, come quelle concernenti l'area del parallelogramma o la serie di Gauss. Più ricco di particolari è il capitolo dedicato alla soluzione del problema del ponte, ma la stessa circostanza, lì, è un po' speciale: i bambini erano *sordomuti*, le vie normali di comunicazione erano precluse allo sperimentatore; quindi la tecnica di esplorazione fu adattata al caso, e per questo era necessario, scrivendo quel capitolo, illustrare meglio che altrove i modi di procedere.

La domanda che il lettore si deve porre, però, è un'altra. Fino a che punto una maggiore quantità di dati sulle condizioni di sperimentazione avrebbe giovato alla chiarezza del problema che Wertheimer intendeva esplorare? Se sapessimo in che scuole egli ha lavorato, che tipo di studi i ragazzi avevano seguito fino al quel momento, quanti anni avevano, come il loro maestro li aveva preparati nell'aritmetica e nella geometria, quale era il quoziente intellettuale di ciascuno di essi, se avevano eseguito il loro compito da soli o davanti agli altri compagni di classe, se

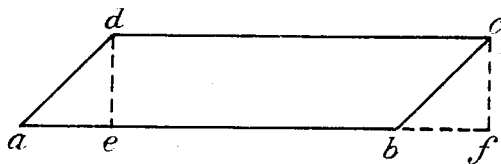
le domande erano state poste sempre nella stessa maniera, se avevano avuto la possibilità di parlare tra loro, di aiutarsi, o no; sapendo bene tutte queste cose saremmo veramente in grado di capire meglio il senso dei problemi e delle soluzioni che sono discusse in questo libro?

La richiesta di dettagli, in breve, sul genere di quelli ora indicati, o addirittura la necessità di standardizzare fin dall'inizio le modalità di presentazione dei quesiti, ha ragione d'esserci quando abbiamo il dubbio che ogni particolare pensabile possa influire in modo determinante sul sistema di eventi che stiamo studiando; quando, cioè, l'oggetto della nostra ricerca risulta talmente instabile e poco strutturato da poter diventare da un momento all'altro qualcosa di diverso da quello che è adesso, o da ciò che vogliamo studiare, a causa di un qualunque imprevedibile motivo; in conclusione, quando il problema da analizzare è stato scelto male.

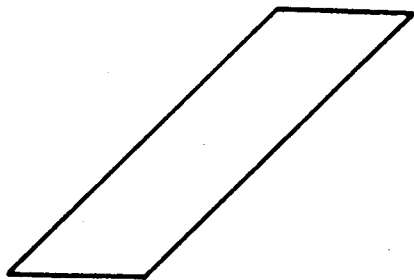
Ma Wertheimer non ha studiato di questi problemi. A un gruppo di bambini è stato insegnato che, se si vuol trovare l'area di una superficie delimitata così:



bisogna ricavare da essa un rettangolo, abbassando due perpendicolari alla base, partendo dagli angoli di sopra, e prolungando la base stessa verso destra:



Quando i bambini hanno ben capito tutto, Wertheimer propone di trovare l'area di questa figura:



Non c'è lettore, suppongo, che possa trovare oscuro il motivo che fece dire ad alcuni bambini « questa figura non l'abbiamo ancora studiata ». Anche il lettore che sa abbastanza geometria, da trovare ingenua una risposta simile, nel momento stesso in cui la giudica tale avverte benissimo il senso che essa ha, vede dove sta il problema. Potrà poi dire che i bambini non erano abituati a vedere la figura orientata a quel modo, o che, in questa nuova posizione, essa stentava ad associarsi col ricordo delle regole apprese, o altro; ma tutta la discussione seguente è dedicata a sfatare l'apparente ovvietà di queste risposte, mentre il fatto che siano state escogitate indica precisamente che il succo della questione, anche al lettore prevenuto, non è sfuggito. La figura è un'altra figura, anche per chi sa che è la stessa. Questo fatto spiega la perplessità di quei bambini. Ora, penso che poche situazioni siano tanto diverse tra loro come quella di un bambino che si trova all'improvviso il compito così mutato, e quella di un lettore di libri di psicologia che legge le prime pagine del capitolo sull'area del parallelogramma.

Se questa osservazione è giusta, se il senso del problema veramente riappare ogni volta che qualcuno se lo ripropone, sia esso un bambino o un colto lettore, allora è dimostrato che le condizioni a volta a volta diverse in cui il problema può essere posto non hanno un peso apprezzabile nei confronti della struttura del problema stesso; le condizioni psicologicamente rilevanti all'interno di esso, non possono essere confuse con le generiche « condizioni psicologiche » in cui inevitabilmente colui che riflette viene in una occasione o in un'altra a trovarsi; i fattori importanti vengono opportunamente variati quando lo sperimentatore sposta i termini del problema, ne modifica le relazioni interne, cambiando ad esempio le proprietà figurali delle superfici che devono essere calcolate, proponendo al soggetto di condurre con mezzi ugualmente semplici la ricerca di figure più complesse, spingendolo sulla strada del ragionamento deduttivo per vedere se e fino a che punto i passaggi logici sono *capiti*: cioè direttamente rapportati alla situazione problemica e allo scopo da raggiungere.

Gli sviluppi di ogni problema sono scelti in modo da soddisfare sempre questa esigenza: il lettore pagina per pagina deve trovarsi davanti alle stesse difficoltà che hanno messo in imbarazzo i soggetti di Wertheimer (o Wertheimer stesso: vedi il capitolo sulla somma degli angoli esterni di un poligono, e l'ultima delle Appendici, sulle serie convergenti) e deve trovare il modo di separarle ristrutturando il materiale volta a volta presente, secondo alcune idee che possono nascere solo dall'analisi del tipo di ordine che tiene insieme quel materiale. Tutto questo avviene anche quando il lettore è abbastanza esperto in matematica o in logica da poter superare le difficoltà agevolmente e senza imbarazzo: l'importante è che egli « avverta » il senso della difficoltà anche sa-

pendo subito risolverla. E questo, nei problemi prospettati da Wertheimer, succede sempre. È il lettore, in definitiva, che fa da soggetto all'Autore, e conferma la giustezza delle sue tesi ritrovando nel materiale che ha davanti le perplessità e gli ostacoli che si frammettono tra le domande e le soluzioni. In tale modo l'atto di seguire la traccia di un ragionamento efficace, produttivo, senza soluzioni di continuità, diventa un modo di « scoprire » qualcosa che prima non era saputo e pure logicamente già implicito nelle premesse date.

Proprio questo fatto, cioè la funzione di protagonista che il lettore assume sotto la guida dell'Autore, fa sì che le esperienze di Wertheimer si svolgano al livello fenomenologico — cioè direttamente sui fatti che interessano — e non solo per via indiretta, come succede quasi sempre negli esperimenti di « problem solving ». Nel caso di Wertheimer solo raramente siamo costretti a inferire la struttura di un processo di pensiero dalla osservazione esterna di un comportamento che non sia identificabile col progredire stesso del lavoro logico. Quasi sempre l'oggetto dell'osservazione è proprio « quello che succede pensando ». In questo senso Wertheimer è riuscito a estendere la metodologia fenomenologica già utilizzata nell'esplorazione dei problemi della percezione al campo dei fatti di pensiero.

Dopo questa breve discussione delle obiezioni che potrebbero essere rivolte al mancato uso di analisi quantitative e alla scarsa standardizzazione delle condizioni di sperimentazione, è ormai abbastanza chiaro quello che si potrà rispondere a chi trovasse strana l'analisi, che qualche volta Wertheimer fa, delle risposte non realmente ottenute, ma tuttavia possibili.

I tipi di procedimenti che possono emergere nel corso della sperimentazione hanno importanza non semplicemente per il fatto che ci sono, ma perché funzionano in una data maniera, perché giocano un ruolo specifico nella situazione complessiva, favorendo o bloccando l'avvicinamento alla soluzione. Il compito del ricercatore, secondo l'impostazione suggerita in questo libro (e in genere secondo il buon senso che deve guidare la logica della scienza), non consiste tanto nel registrare fedelmente tutto quello che succede; ma piuttosto nel vedere in quale modo la ristrutturazione di uno o più aspetti della situazione problematica è legata alla comprensione della soluzione. Il caso immaginario può dunque essere, sotto certe condizioni, altrettanto funzionale di quelli effettivamente riscontrati nel corso del lavoro di ricerca, e diventa reale proprio perché il lettore è in grado di seguirne la struttura e vedere in che modo è connessa a quella degli altri casi. Che esso non si sia presentato come protocollo effettivamente fornito dai soggetti esaminati, ma sia stato pensato dall'Autore nel corso della discussione, non dice nulla nei confronti della sua funzionalità: né pro, né contro. È irrilevante —

abbiamo visto poco fa — il fatto che un altro o più altri abbiano o no trovato la stessa via che sto seguendo io ora mentre lavoro su un problema, al fine di giudicare se questa via è produttiva e « sensibile », e se corrisponde alle esigenze poste dal problema. Il procedimento è quello che è grazie al fatto che è pensato così, e indipendentemente dal fatto che si sia, prima, già affacciato alla mente di qualcuno. Del resto, se volessimo espungere dal testo di Wertheimer le risposte che lui non ha trovato ma inventato, dovremmo togliere dal suo libro più di un capitolo, e tra i più significativi quello sulla somma degli angoli esterni di un poligono e l'appendice sulle serie convergenti.

La domanda giusta che il lettore si deve porre, ancora una volta, riguarda la funzionalità di una variabile, non la sua frequenza, che può essere così bassa da coincidere coll'unico caso rappresentato da quel soggetto che è l'Autore (e implicitamente dal lettore): l'importante è che, seguendo lo sviluppo del procedimento, si veda che esso è « sensibile », e quali sono le caratteristiche che lo rendono tale.

Nel caso speciale del capitolo dedicato a Galileo (« sfortunatamente — scrive Wertheimer — non posso interrogare Galileo in persona sul reale sviluppo del suo processo di pensiero; mi sarebbe piaciuto chiedergli qualcosa di più particolare su certi punti ») non sarebbe stata di grande aiuto l'analisi filologica e critica dei testi galileiani, come è tenuto a svolgerla, ad esempio, lo storico del pensiero scientifico. L'essenziale, qui, non era ricostruire fedelmente e completamente l'itinerario percorso da Galileo, superando uno alla volta gli ostacoli che egli veramente ha incontrato, costituiti per la maggior parte da teorie saldamente stabilite e credute dai suoi colleghi e giustificabili (se non proprio dimostrabili) alla luce delle esigenze interne del sistema aristotelico. Questo modo di procedere probabilmente avrebbe messo in evidenza una quantità di problemi comprensibili — per noi, oggi — solo attraverso una faticosa ricostruzione dell'antica fisica, mettendo in secondo piano la genesi del nucleo centrale della nuova meccanica. Infatti una gran parte dell'attività di Galileo è stata spesa nell'affrontare uno alla volta i punti della polemica con l'aristotelismo, a tutti i livelli, dalle più minute dimostrazioni escogitate per invalidare certe assunzioni particolari, fino alla critica epistemologica e, come è ben noto, al dibattito ideologico.

Dal punto di vista della fenomenologia del pensiero produttivo il problema è molto più limitato, e non può essere affrontato in modo dispersivo, aprendo la discussione su tutti i fronti, come in realtà Galileo dovette fare. Il problema è questo: come mai alcuni fenomeni di movimento, tanto differenti uno dall'altro nelle situazioni concrete in cui li sperimentiamo (la caduta dei gravi e il lancio dei proiettili, lo scivolamento lungo i piani inclinati, il moto degli astri e quello degli oggetti

spinti su un piano parallelo alla superficie della terra), sono obbedienti a un'unica legge; cioè come le loro proprietà, apparentemente assai diverse, possono essere derivate formalmente dall'espressione matematica di una legge sola?

Prese singolarmente, queste varietà di movimenti sembrano avere ben poco in comune. Il semplice confronto tra essi non dice nulla; è una operazione puramente sommativa che non è capace di modificare il loro interno significato. Ma proviamo a disporli uno rispetto all'altro in un certo modo; cioè cercando di vederli come casi particolari di un caso generale. Lasciando correre un oggetto su un piano inclinato la sua accelerazione è sempre più piccola a mano a mano che il piano è meno accentuatamente inclinato rispetto all'orizzontale: le inclinazioni possono essere comprese tra questa orizzontale e la verticale. Se il piano è perfettamente verticale, questo è il caso della caduta, e l'accelerazione è tanta. Se è perfettamente orizzontale l'accelerazione è nulla: né positiva né negativa: e cioè se urtiamo una palla che sia posta su un piano parallelo alla superficie della terra, essa continuerà a camminare sempre alla stessa velocità, perché non accelera né decelera; ed è vero che non si fermerà mai, a dispetto del fatto che tutti gli oggetti del mondo, quando sono animati da un simile movimento, si siano sempre fermati e sempre si fermeranno.

Questo punto essenziale della teoria nasce direttamente dall'aver disposto i vari tipi di movimento in un ordine funzionale, secondo un continuum logico che comprende tutti i casi, dal lancio di un proiettile verso lo Zenith alla caduta di un oggetto verso la terra. Ed è un esempio tipico di ristrutturazione in senso gestaltista, perché il tutto, in tal modo, viene ad essere qualcosa di totalmente diverso dalla somma delle parti (caduta, lancio, piani inclinati, ecc.), e le parti cominciano a voler dire, in questo tutto, qualcosa che prima non dicevano.

Questa strutturazione significativa è avvenuta per la prima volta nella mente di Galileo; ma ritorna ad accadere ogni volta che qualcuno veramente impara e capisce il significato del principio d'inerzia; il vero materiale che compare in questa struttura sono alcuni concetti della vita quotidiana e l'ordine è un ordine logico; il materiale non è costituito dai passi che possiamo stralciare dagli scritti di Galileo, e l'ordine non è necessariamente quello che lo storico della scienza rintraccia in quegli scritti ricostruendo la biografia scientifica del fisico pisano. Il punto cruciale sta dunque ancora una volta nell'atto di comprensione che il lettore compie sotto la guida di Wertheimer.

La psicologia del pensiero così impostata è allora una nuova forma di psicologia introspettiva? Se l'aspetto importante delle analisi compiute da Wertheimer sta nel fatto che ognuno dei suoi capitoli obbliga

il lettore a trovare nei termini del suo stesso pensiero le difficoltà di un problema e la via della soluzione, in modo che la lettura si trasforma in un effettivo « esperimento », e la garanzia della correttezza dell'analisi sta nel fatto che — date alcune condizioni — « si pensa proprio così », cioè non è possibile dare un ordine diverso al corso delle proprie riflessioni senza privarle del senso che hanno; allora tutto sembra deporre a favore della seguente tesi: Wertheimer ha inventato per l'ennesima volta il metodo dell'introspezione. I suoi presupposti metodologici non si sono scostati di molto rispetto alla posizione di Külpe e della scuola di Würzburg.

Questo giudizio, quando voglia costituirsi come una critica al metodo di Wertheimer, dipende dall'accettazione, più o meno consapevole, di una certa definizione del concetto di « introspezione ». Vi sono probabilmente molte definizioni possibili dell'introspezione; tra queste una, forse la più popolare e comunemente accettata, è quella che vorrei chiamare « definizione metafisica ». Essa si fonda sul presupposto non scientifico ma filosofico che *tutto quello che compare nell'esperienza è qualcosa di interno all'osservatore, cioè di soggettivo*. Osservare qualcosa che ha luogo nell'esperienza diretta — un oggetto o il cielo stellato, lo svolgersi di una melodia o di una propria riflessione — vuol dire avvertire una modificazione della soggettività, un evento che ha per protagonista sempre e comunque l'Io.

In questo senso ogni dato dell'osservazione è un dato introspettivo: guardare fuori dalla finestra è un atto introspettivo come fare un esame di coscienza; leggere la temperatura sulla colonnina di un termometro è un atto di auto-osservazione come avvertire la difficoltà che talvolta impedisce di ricordare un nome, o che giorno è oggi.

Questo punto di vista può avere il suo significato per chi lo sostiene — un significato emotivo, probabilmente — e fa il paio con l'altro opposto, quello sostenuto da Hume, secondo cui per quanto cerchiamo di enumerare i dati dell'esperienza a nostra disposizione non troviamo mai niente che sia l'Io, né qualcosa che gli appartenga, ma solo singole sensazioni indipendenti una dall'altra, tutte indifferenziate, non più soggettive di quanto siano obiettive.

In realtà, poi, nessuno di noi, sia che in sede teoretica sostenga Hume sia che sostenga qualche forma di psicologismo idealistico, è disposto a trascurare o a rinnegare le differenze che dividono gli eventi che viviamo come appartenenti al nostro Io da quelli che sono davanti a noi e fuori di noi; ci sarà qualche caso che non si lascia classificare facilmente: per esempio le immagini consecutive, che hanno colore ed occupano una posizione nello spazio, e nello stesso tempo sono vissute immediatamente come « non reali » come, appunto, « soggettive »; ma questi casi limite dimostrano proprio che un confine c'è, e che ha uno

spessore, al di qua e al di là del quale vi sono innumerevoli fatti inequivocabilmente « interni » o « esterni ». Questo permette di parlare sensatamente di introspezione e di osservazione del mondo circostante, a dispetto delle generalizzazioni filosofiche che vogliamo o non vogliamo accettare. Sono le proprietà fenomenologiche godute dagli oggetti dell'osservazione a decidere della loro interiorità o della loro appartenenza al mondo esterno: essi si costituiscono, rispetto al nostro atto di osservare, già come oggettivi o soggettivi, e nella maggior parte dei casi non c'è sforzo dell'osservatore che possa mutare questa loro natura.

Non ogni dato dell'esperienza, dunque, è in questo senso un dato introspettivo. « *Introspection* is Titchener's rendering of Wundt's *Selbstbeobachtung*, literally, *observation of one's self*. This is obviously a misleading expression; when one observes a color one is nothing observing oneself, unless one expands the meaning of self to a point at which it ceases to be meaningful, as Berkeley did ». ¹ Lasciamo che la parola « introspezione » e i suoi derivati svolgano un ruolo veramente denotativo per una certa classe di fatti, in quanto distinguibile da una classe configurata diversamente; se la parola introspezione deve avere un significato generico, e coestensionale a quello del quantificatore « tutto », è chiaramente una parola che non serve a nulla.

I fatti del pensiero sono sicuramente tra quelli che appartengono al mondo fenomenologicamente soggettivo; hanno il loro teatro in quella regione privilegiata dell'esperienza attuale che è avvertita come il Sé; non accadono in qualche posto « fuori », tra gli oggetti collocati nello spazio circostante (benché occupino un certo spazio molto prossimo o interno alla regione delimitata dal nostro corpo). ²

Dovremo così dire che effettivamente l'osservazione esercitata sui nostri pensieri è un atto di introspezione. E infatti, questo è uno dei termini che meglio descrivono l'atteggiamento di chi sta seguendo l'ordine di una propria riflessione, come d'altra parte la parola « osservare » descrive bene l'atteggiamento di chi segue con gli occhi o anche con l'ausilio di strumenti qualche fatto che accade nello spazio vissuto come « pubblico ».

Solo che, intesa in questo nuovo senso, la parola « introspezione » non ha più nulla di quel tono accusatorio e invalidante che possedeva prima: non allude alla impossibilità metafisica di andar a vedere quello che succede nella « coscienza altrui » o alla pretesa di parlare di cose inverificabili e legate all'insondabile esperienza degli altri esseri pen-

¹ MACLEOD, R. B., « Phenomenology », in *Behaviorism and Phenomenology*, W. Marsh Rice University, Chicago 1964.

² CLAPARÈDE, E., « Note sur la localisation du moi », *Arch. de Psychol.*, 1924, XIX.

santi. Vuol dire semplicemente osservazione esercitata su quella classe di fenomeni che non sono vissuti come oggetti o eventi esterni.

Questa breve discussione sulla portata del termine « introspezione » potrà sembrare, a prima vista, piuttosto una questione terminologica che un effettivo mutamento di prospettiva nella teoria. Ma non credo che le cose stiano così. Anche in questo caso — come più di una volta è accaduto nell'evoluzione delle teorie scientifiche — la critica all'uso delle parole sottende una trasformazione nel modo di impostare il problema.

La definizione che ho chiamata « metafisica » dell'introspezione comporta un certo ordine di difficoltà, diverse da quelle che possono essere opposte all'introspezione come osservazione dei fatti che hanno luogo fenomenicamente nell'Io.

Non è facile vedere quale possa essere il posto dell'introspezione intesa nel primo senso tra i vari metodi di osservazione che la critica epistemologica ci autorizza a usare, quando dobbiamo fare della ricerca scientifica. Qualcuno descrive il corso dei propri pensieri in una circostanza data, dopo che quel corso ha avuto termine, ricostruendolo per quanto è possibile con fedeltà, affidando la ricostruzione all'attendibilità che può avere la cosiddetta memoria immediata; uno sperimentatore raccoglie questa descrizione e il suo compito è quello di ricostruire il corso di quei pensieri (trasformarlo in un evento della propria esperienza), comprenderne la struttura e il significato, e quindi utilizzare questi « dati » per confermare o invalidare una ipotesi. Nelle esperienze eseguite a Würzburg ogni soggetto aveva il compito di descrivere esaurientemente tutto quanto era accaduto dal momento dell'assegnazione del compito in poi: quindi anche le più tenui sfumature affettive che potevano accompagnare l'esecuzione del compito assegnatogli, l'apparizione di immagini solo appena abbozzate, i momenti di tensione o di smarrimento, le riflessioni fugaci sul proprio atteggiamento di fronte al compito, allo sperimentatore, all'ambiente circostante, ecc. È difficile credere che tutto questo possa trovare posto in una descrizione sufficientemente articolata ed efficace; la costruzione della descrizione ha una sua dinamica che si sovrappone alla struttura dell'evento immediatamente pregresso, il quale è presente nel momento della descrizione sotto forma ormai di ricordo. Il tentativo di ravvivare alcuni aspetti del ricordo (che compare sistematicamente nel corso di simili esperienze) può dar luogo a qualcosa di nuovo, ma di vissuto tuttavia come un aspetto del ricordo stesso, e questo nuovo elemento finisce nella descrizione, diventandone una parte funzionale; le intuizioni labili, le immagini non limpide o quasi non avvertite come tali, se vengono descritte con chiarezza perdono il loro carattere reale di incertezza e di fluidità, mentre se vengono descritte in modo letterariamente efficace ma di necessità confuso introducono notevoli ambiguità nella descrizione. Nel complesso, quali sono i dati che utilizza lo

sperimentatore? Sono eventi della sua esperienza, che dipendono dalla sua comprensione di una descrizione, e questa descrizione è stata costruita sulla struttura che la memoria immediata aveva conservato (spesso non senza che intervenissero modificazioni) di un evento noetico, il quale, nell'intenzione, dovrebbe essere l'oggetto dello studio dello sperimentatore.

La catena di connessioni è troppo complessa perché si possa ragionevolmente credere che l'oggetto con cui lo sperimentatore ha a che fare sia in qualche modo la rappresentazione dell'oggetto che intende studiare. Prima di tutto non sono note le regole di trasformazione della struttura di ogni fase del processo nella struttura della fase successiva.¹ In secondo luogo, la descrizione della successione degli eventi, fatta in questo modo, introduce già una filosofia della conoscenza in cui uno dei personaggi in questione (il soggetto esaminato) costituisce un mondo a sé, con le « sue » esperienze immediate organizzate in un certo modo, e l'altro (il ricercatore) analogamente è pensato come un altro mondo isolato, senza possibili punti di contatto con il primo, tranne quello — di scarsa attendibilità, in questo caso — del linguaggio.

Ognuno sa quante bizzarre dispute possono nascere intorno a uno stato di cose rappresentato secondo questo schema. Questo schema, per esempio, obbliga subito a porre il problema dell'attingibilità della « coscienza altrui », il quale non è detto che sia un vero problema, almeno fintantoché qualcuno non ci avrà spiegato (magari solo immaginando un procedimento, a parte tutte le difficoltà di realizzazione pratica) come si

¹ Esistono certamente situazioni della nostra esperienza in cui questa condizione essenziale è rispettata: c'è, supponiamo, uno spartito di musica per pianoforte; ci sono le dita del pianista che premono i tasti dello strumento con un certo ordine; c'è la complicata struttura della propagazione delle onde sonore nell'aria dell'ambiente; ci sono le variazioni di intensità di una debole corrente nel microfono; una punta traccia un solco nel disco, e questo solco ha la struttura di una curva particolarmente complessa (che potrebbe essere rappresentata con una formula matematica complicatissima, impensabile, ma teoricamente non impossibile);; e alla fine c'è un ascoltatore che si gode quella composizione grazie al suo disco. Anche qui ci sono moltissime fasi, e in ognuna di esse l'evento cambia completamente la sua natura, è fatto con ingredienti diversi; inoltre ogni fase è qualcosa di estremamente complicato. Però le regole di trasformazione della struttura dall'una all'altra di queste fasi, con buona approssimazione, sono note. La partitura è isomorfa all'audizione (si segue benissimo l'andamento di una composizione avendo la partitura davanti). Vi sono delle teorie logicamente coerenti ed empiricamente fondate che spiegano parecchi passaggi tra quelli citati. In ogni caso siamo in grado di verificare se nel corso della trasformazione da una fase in un'altra la struttura ha subito qualche modificazione: in parole povere, possiamo determinare se c'è stato un errore.

Dunque sono possibili catene di trasformazioni di un evento in altri materialmente diversi, attraverso le quali la struttura resta intatta. Ma gli esempi che ci ha fornito la scuola di Würzburg non fanno parte di questa categoria.

dovrebbe fare per risolverlo. Se l'analisi introspettiva viene inquadrata in un contesto teorico di questa specie, essa non può far parte dei metodi di osservazione utilizzabili nelle scienze.

Al contrario, se definiamo l'introspezione come osservazione realizzata su quegli oggetti dell'esperienza che sono vissuti come non pubblici, come « interni », una giustificazione epistemologica di essa diventa perfettamente possibile. In questo campo di fatti, tra i quali vi sono appunto i pensieri, alcuni eventi possono corrispondere benissimo ai requisiti richiesti dall'analisi scientifica, come nell'altro campo di fatti chiamato mondo esterno — né più né meno. Dipende da come scegliamo quello che sarà l'oggetto del nostro studio.

Perché in realtà, che cosa si domanda?

Si domanda prima di tutto che l'evento sia ripetibile, cioè che ogni qualvolta si ripresenta possieda visibilmente le stesse caratteristiche. L'illusione di Zöllner o di Müller-Lyer si ripresenta sempre nello stesso modo, anche se si sa che è una « illusione »; le difficoltà concernenti le serie di Gauss, o l'impostazione di alcuni problemi intorno all'area del parallelogramma, ricompaiono sempre, quando abbiamo a che fare con quel materiale, anche se sappiamo come si deve procedere per trovare la soluzione.

Si domanda, in secondo luogo, che variando alcune condizioni critiche vari la struttura complessiva dell'evento. Variando l'angolo compreso tra i piccoli segmenti e le due linee fondamentali, nell'illusione di Zöllner, varia la curvatura apparente di queste ultime; variando la posizione del parallelogramma nello spazio rispetto all'osservatore, sparisce la struttura che rendeva difficile la soluzione; nel caso degli angoli esterni di un poligono (capitolo ottavo), riducendo i segmenti a una lunghezza nulla — cioè a un punto — la soluzione c'è, e all'osservatore non gli resta che di formularla.

Si domanda, inoltre, che dalle leggi costruite attraverso l'analisi delle condizioni critiche sia possibile ricavare previsioni attendibili circa il comportamento di altri casi in cui, sia pure in misura diversa, ricorrono condizioni analoghe. Posso mutare a piacere le proprietà fenomeniche di figure geometriche anche complesse servendomi dell'illusione di Müller-Lyer o di Sander, come ha fatto Rubin (« Visual figures apparently incompatible with Geometry », *Acta Psychologica*, VII, pp. 365 segg.); identicamente, posso procedere alla costruzione di nuovi problemi « facili » o « difficili » utilizzando opportunamente le variabili che in situazioni precedentemente vedute hanno dimostrato di essere funzionali (tutto il capitolo sulle serie di Gauss è costruito così, e con ogni probabilità da esso nascono i problemi del capitolo quinto e dell'Appendice 6).

Infine, si domanda che l'oggetto osservato costituisca, nell'insieme dell'esperienza attuale di un osservatore, un sistema isolato. Le illusioni ottiche non cambiano le loro proprietà a seconda che io sia in città o in campagna, o che mi senta allegro o triste, o in relazione al fatto che sulla mia scrivania c'è un libro di Köhler piuttosto che uno di Watson. Né, col variare di queste circostanze, le soluzioni che Wertheimer chiama « blind » diventano soluzioni « sensible », o viceversa.

Se queste esigenze sono rispettate, l'osservazione eseguita su un punto in movimento, su uno schermo cinematografico o su un topo nel labirinto non ha maggior diritto ad essere chiamata scientifica di quella eseguita su un corso di pensieri la cui configurazione possieda alcune regolarità essenziali.

Il fatto che i pensieri sono vissuti come « interni » e i punti luminosi (o i topi) come « esterni » non mette questi o quelli nella condizione di non poter essere studiati. Essere « in noi », o « fuori di noi », è un carattere qualitativo che alcune cose hanno e altre no; analogamente all'essere belle o brutte, rosse o blu, qui o là.

PAOLO BOZZI

Università di Padova, 1964

IL PENSIERO PRODUTTIVO

Ringraziamenti

Questo libro deve molto a Clara W. Mayer, Preside della School of Philosophy and Liberal Arts nella New School for Social Research. Il manoscritto ha potuto raggiungere la sua forma definitiva soltanto grazie all'opera assidua di lei, che aveva grande interesse per l'argomento e prendeva profondamente a cuore lo scopo a cui esso era diretto. Riusciva sempre a trovare il tempo da dedicarvi nonostante le attività nella Scuola che la tenevano costantemente impegnata: questo fu per me di grande incoraggiamento.

Sono molto grato al dott. S. E. Asch per il suo notevole aiuto nel preparare il manoscritto, ai signori Elkan per il loro assiduo, amichevole incoraggiamento; alle signore Clara Mond e Maria di Piazza per la loro indefessa assistenza come segretarie.

Un ringraziamento particolare è dovuto al dott. Alvin Johnson ed al corpo insegnante della mia facoltà. Mi rammarico che questo libro, che si limita a trattare alcuni problemi elementari, non riesca ad esprimere pienamente lo spirito di collaborazione nelle scienze sociali che è così vivo nella nostra facoltà e che molto deve ad Alvin Johnson. Ho potuto sfiorare soltanto in breve e saltuariamente questi problemi che hanno un così alto significato per tutti noi. Devo molto anche ai miei amici il cui lavoro è legato ai problemi di questo libro.

Sono grato ai soggetti dei miei esperimenti, gli adulti e i bambini, per avermi dato la possibilità di apprendere tanto da loro. E sono grato agli illustri scienziati (soprattutto ad Einstein), che mi hanno offerto la possibilità di studiare da vicino. In molte conversazioni, la storia di alcuni importanti risultati del loro pensiero.

Il libro contiene solo una piccola parte degli studi e del materiale che ho trattato con gli studenti nel corso di lezioni e seminari. Ho fatto qualche relazione su parti di esso in varie conferenze a Harvard, Chicago,

Bloomington, Ann Arbor, Smith College, Swarthmore, Bryn Mawr, e in altri istituti.

Quest'opera ha dunque la funzione quasi di « prolegomeni »: spero di poter finire due nuovi libri, ai quali questo servirà semplicemente da introduzione. Nonostante i suoi limiti, mi auguro tuttavia che possa essere utile.

MAX WERTHEIMER

New Rochelle, N. Y.
23 settembre 1943

Nota alla prima edizione

curata da S. E. Asch, W. Köhler, C. W. Mayer

Il manoscritto del *Pensiero Produttivo* a cui Max Wertheimer aveva lavorato negli ultimi sette anni venne portato a termine poco prima della sua morte. Nel preparare il lavoro per la pubblicazione abbiamo trovato necessario apportare alcune revisioni linguistiche. Quel significato che era chiaro nella mente di Wertheimer non doveva, secondo noi, venire oscurato da mere difficoltà di espressione. Possiamo tuttavia assicurare al lettore che sono stati fatti dei mutamenti solo dove non si poteva soddisfare in altro modo il desiderio della chiarezza. In nessun luogo sono stati alterati il contenuto e la forma della trattazione.

Tutte le note e le carte restanti di Wertheimer verranno depositate presso la *Graduate Faculty of Political and Social Science* dove studiosi qualificati avranno modo di consultarle.

Valentin Wertheimer, che ha assistito il padre in alcune delle revisioni finali del manoscritto, ci è stato utile in molti modi.

Siamo grati alla signora Ray Borne per la sua cura coscienziosa nel seguire il manoscritto attraverso le operazioni di stampa.

1945

Nota all'edizione ampliata

curata da Michael Wertheimer

Questa edizione contiene, in aggiunta al materiale delle precedenti edizioni, vari capitoli e frammenti trovati tra le annotazioni e le carte di Max Wertheimer. Una prima stesura dell'Indice generale, anch'essa trovata tra le sue carte, dimostrava che in un primo tempo egli aveva progettato di includere nell'opera i tre capitoli che qui sono stati aggiunti (secondo, quinto e sesto).

Sebbene nel manoscritto finito del testo originale non fossero utilizzati, questi capitoli appaiono nella presente edizione, insieme con sei nuove appendici; molte persone infatti avevano espresso il parere che questo materiale doveva essere conosciuto più largamente.

I manoscritti delle parti aggiunte apparivano meno rifiniti del manoscritto dell'edizione originale; perciò si resero necessari alcuni cambiamenti di organizzazione e di espressione; ma questi cambiamenti furono limitati al minimo indispensabile. Le note dell'attuale curatore sono indicate con « — M. W. ». Hanno letto le nuove parti di questo volume e hanno dato molti utili suggerimenti le seguenti persone: Rudolf Arnheim, Solomon E. Asch, Mary Henle, Clara W. Mayer, Lise Wertheimer e Valentin Wertheimer.

La nota seguente, trovata tra le carte di Max Wertheimer, anticipa il lavoro successivo che egli si era prefissato, e può servire come introduzione ad alcune delle parti nuove.

« Avevo limitato questo libro per lo più ad argomenti che contengono aspetti di tipo "sommativo": ad esempio, la misura di un'area, la somma di una serie, ecc., per far sì che il lettore concentri l'attenzione proprio sulla sola forma del processo di pensiero in sé; ho discusso solo alcuni casi di aspetti di "gestalt" del nostro argomento, elementari dal punto di vista formale. In un secondo libro tratterò anche di quegli argomenti che di per se stessi costituiscono delle vere e proprie "gestalt" »

Mentre sono molto sviluppati i metodi e gli strumenti per compiere operazioni frazionanti e cieche alla struttura, non si può dire lo stesso dei problemi che riguardano le forme, problemi particolarmente importanti per lo sviluppo della teoria della forma.

Seguiranno due nuovi libri: uno su aspetti più vasti della psicologia del pensiero, l'altro sul problema della logica gestaltista, in cui i problemi tradizionali compaiono come il caso speciale euclideo. In questo libro dovranno essere trattati anche gli aspetti dell'euristica produttiva, secondo la teoria della forma ».

MICHAEL WERTHEIMER

Boulder, Colorado
15 aprile 1958

Introduzione

Di tanto in tanto, il nostro pensiero funziona davvero in modo proficuo, si fa strada, scopre nuovi orizzonti. Che cosa avviene allora effettivamente?

Se cerchiamo le risposte nei libri, ne troviamo spesso di apparentemente facili. Ma nel paragonarle ai processi effettivi di questo genere: quando si è appena avuta un'idea creativa, per quanto modesta ne sia la portata; quando si è cominciata ad afferrare veramente una soluzione; quando si è provato il piacere di un nitido processo produttivo di pensiero, ci sembra che spesso quelle risposte dissimolino i veri problemi piuttosto che affrontarli direttamente. Manca in esse l'aspetto più vitale di quanto è accaduto.

Vi sarete certamente chiesti, nel corso della vita, il perché di molte cose, qualche volta in modo serio. Avete usato la stessa serietà nel chiedervi che cosa possa essere questa cosa chiamata pensiero? Ci sono tanti fatti in questo nostro mondo: l'alimentazione, i temporali, i fiori, i cristalli. Varie scienze se ne occupano, sforzandosi con ogni mezzo di giungere a una vera comprensione di essi, di afferrare la loro essenza. Abbiamo la stessa serietà quando ci domandiamo che cosa sia un pensiero capace di produrre nuove idee?

Vi sono certi casi significativi. Potete incontrarne spesso, anche nella vita di ogni giorno. Se avete tenuto gli occhi aperti, vi sarete probabilmente imbattuti qualche volta nella vita, per lo meno osservando i bambini, in quest'evento meraviglioso: la nascita di un'idea genuina, di uno svolgimento produttivo di pensiero; il passaggio da un atteggiamento mentale cieco alla comprensione, nel corso di un processo produttivo. Se non avete avuto la fortuna di sperimentarlo voi, lo avrete incontrato in altri, o lo avrete intravisto, affascinati, leggendo un buon libro.

Molti sono dell'opinione che all'uomo non piaccia pensare: che faccia di tutto per evitarlo, che preferisca piuttosto la ripetizione meccanica. Ma a dispetto di molti fattori che sono ostili al pensiero vero, che lo soffocano, esso affiora tuttavia qua e là e si sviluppa rigoglioso. E spesso si ha l'impressione netta che gli uomini, così come i bambini, anelino ad esso.

In effetti che cosa avviene nel corso di tali processi? Che cosa succede quando uno pensa veramente, e pensa in maniera produttiva? Quali possono essere nel pensiero i tratti essenziali, i passaggi decisivi? Come si realizzano? Da dove proviene il lampo, la scintilla? Quali sono le condizioni, gli atteggiamenti favorevoli o sfavorevoli a questi eventi così singolari? Qual è la vera differenza tra pensare bene e pensare male? E, in relazione a tutte queste domande: come migliorare il modo di pensare? il nostro modo di pensare? il pensiero in sé? Supponiamo di dover fare un inventario delle operazioni basilari del pensiero: che aspetto avrebbe? Che cosa abbiamo, fondamentalmente, a portata di mano? Le stesse operazioni di base potrebbero essere ampliate e migliorate e in tal modo rese più produttive?

Per più di duemila anni alcuni tra i migliori cervelli in campo filosofico, logico, psicologico, pedagogico, si sono applicati assiduamente per trovare risposte soddisfacenti a questi interrogativi. La storia di questi sforzi, le brillanti idee concepite, il duro lavoro di ricerca e di discussione teoretica, formano nell'insieme un quadro ricco e drammatico. Molti risultati sono stati raggiunti. In un gran numero di problemi particolari sono stati portati solidi contributi alle nostre conoscenze. Nello stesso tempo però c'è un che di tragico nella storia di questi tentativi: a più riprese i grandi pensatori, nel mettere a confronto le risposte formulate col vivo pensiero nella sua realtà, erano turbati e profondamente scontenti: avevano la sensazione che ciò che era stato fatto aveva dei meriti sì, ma che forse non aveva toccato per nulla il cuore del problema.

La situazione è ancora oggi, su per giù, allo stesso punto. A dire il vero molti libri trattano questi argomenti come se, fondamentalmente, tutto fosse risolto, in un senso o nell'altro. Vi sono, infatti, opinioni radicalmente diverse su quello che è il pensiero, con conseguenze importanti in campo pratico e pedagogico. Osservando un insegnante possiamo spesso capire quali gravi conseguenze possano avere queste teorie intorno al pensiero.

Sebbene ci siano dei bravi insegnanti, con una sensibilità innata

per quello che è il pensiero genuino, la situazione nelle scuole spesso non è buona. Il comportamento degli insegnanti, il metodo con cui s'insegna una data materia o si scrivono i libri di testo, tutto questo è determinato in linea di massima da due tradizionali concezioni intorno alla natura del pensiero: il punto di vista della logica classica e quello della teoria associazionistica. Queste due concezioni hanno i loro meriti: fino a un certo punto sembrano adeguate a determinati tipi di processi di pensiero, ad alcuni compiti che a esso si assegnano. Tuttavia, è per lo meno discutibile se la loro interpretazione del pensiero non provochi un grave impedimento, un effettivo indebolimento delle capacità spontanee.

Questo libro è stato scritto perché le concezioni tradizionali hanno ignorato importanti caratteristiche dei processi del pensiero; perché in molte altre opere tali concezioni vengono accettate come valide senza una vera investigazione; perché in tali opere la discussione sul pensiero si tiene in linea di massima sulle generali; e infine perché il punto di vista della *Gestalt* è noto solo superficialmente. Poiché sono in gioco questioni importanti è opportuno mettere in luce gli aspetti trascurati, esaminare le concezioni tradizionali, discutere i problemi cruciali con esempi concreti di vero pensiero produttivo, per costruire in tal modo l'interpretazione *gestaltista* del pensiero.

In alcuni capitoli (I-VI) useremo per la discussione esempi elementari, apparentemente ovvi. Affronteremo i problemi teoretici fondamentali in contatto diretto con un materiale concreto. Metodi diversi di discussione sperimentale contribuiranno alla chiarificazione. Studieremo come procede il pensiero nella sua realtà, e quale sia la natura di questo processo sia nell'insieme che nelle singole parti, nei passaggi e nelle operazioni. In contrasto con modi di pensare più poveri, il lettore potrà osservare con piacere il modo in cui si verificano nei bambini processi produttivi notevoli, per quanto modesti. Vedremo che gli strumenti e le concezioni dei due orientamenti tradizionali sono lungi dal poter trattare adeguatamente ciò che accade in tali processi. Riconosceremo l'esistenza di caratteristiche e operazioni che finora sono state ignorate perché intrinsecamente estranee alle concezioni abituali. Vedremo come tali fattori operino nel compimento dell'atto di pensiero.

Nel capitolo VII descriveremo un modesto esempio tratto dalla vita comune, che sembra però toccare l'essenza di profondi problemi umani.

Daremo anche, nei capitoli IV, VIII, IX e X, diverse descrizioni e interpretazioni di processi di pensiero più complessi, concludendo con la storia delle riflessioni che condussero Einstein alla scoperta della teoria della relatività. Nel capitolo finale formuleremo le nostre conclusioni generali.

Gli esperti sanno quante condizioni si debbano soddisfare in un'indagine accurata. Dovrò astenermi dal riferire certi particolari tecnici che pure sono importanti nel lavoro di ricerca, perché renderebbero la mia relazione troppo pesante. Nel corso di un'investigazione ci si imbatte in cose che a prima vista siamo propensi a interpretare in uno dei modi tradizionali. Un esame più attento rivela poi che la questione non può essere liquidata così facilmente. Di conseguenza si cercano modi, metodi che possano offrire una chiarificazione più profonda. Il lettore scientificamente preparato potrebbe essere interessato a tali metodi e tecniche specifiche, alla natura dei passaggi compiuti nella discussione teoretica e sperimentale. Ma la prima esigenza è quella di un'osservazione e di un'investigazione accurate negli esperimenti qualitativi. Senza dubbio, sarebbe stato facile in molti casi mutare il metodo qualitativo in un metodo quantitativo. Ciò si rende necessario come secondo passo per molti problemi, che tuttavia non tratterò in quest'opera.

Allo psicologo scientifico, al logico, all'educatore, questo libro si presenta anzitutto come invito a tornare a prendere in considerazione alcuni argomenti fondamentali. La terminologia che ho scelto mi sembrava la più adatta a rendere la vera natura dei processi di pensiero concreti. Sebbene molto di quanto sto per esporre si avvicini abbastanza, penso, al buon senso genuino, è difficile tuttavia darne un'esposizione in termini scientifici, e i termini che uso possono sembrare strani al lettore, in quanto sono in contrasto con il suo modo abituale di vedere i problemi. I miei termini non dovrebbero dare l'impressione che i problemi siano risolti; penso anzi che essi stessi sian carichi di problemi produttivi. I termini e le tesi si dovrebbero intendere piuttosto come frecce che puntano prima di tutto ai passaggi e alle caratteristiche concrete che si presentano di fatto negli esempi. Molto di quanto dirò potrebbe essere espresso con un'altra terminologia. Fino a un certo grado, è indifferente che certi problemi e tesi vengano espressi in un modo o nell'altro; la terminologia in sé non ha importanza; ciò che importa veramente sono i problemi e la natura delle tesi, nella vivezza con cui ci appaiono nella discussione dei casi concreti. Nell'uso corrente ci si serve di

alcuni problemi e tesi in modo superficiale: la concretezza della nostra discussione potrà servire a chiarire i malintesi che potrebbero altrimenti sorgere.

Nonostante la possibilità di esprimere i fatti in un diverso linguaggio, compreso quello proprio di altri orientamenti, voglio mettere in guardia il lettore scientificamente preparato: la direzione indicata dalla presente ricerca porta ad una impostazione che è fondamentalmente in contrasto con molti modi di vedere correnti. Spero che il lettore non si accontenterà di riporre tale impostazione nel cassetto in cui cataloga le opinioni psicologiche o filosofiche. Sono in gioco fatti di maggiore importanza; dobbiamo affrontare questi problemi in un modo concreto e fecondo.

Come sfondo per le discussioni successive, presenterò prima di tutto una brevissima descrizione dei due punti di vista tradizionali nelle loro grandi linee. Essi sono superiori a tutti gli altri per il rigore e per la completezza con cui considerano le operazioni e stabiliscono concetti di base, medie, criteri, leggi e regole. Altri orientamenti, anche se a prima vista sembrano in forte contrasto con questi due, spesso contengono tuttavia nel loro nocciolo, in un modo o nell'altro, proprio le operazioni e le regole stabilite dai primi. Le ricerche moderne intorno al pensiero sono largamente influenzate dall'uno o dall'altro, o contemporaneamente da entrambi. Indicherò di essi le linee essenziali, ma ometterò alcuni punti che si presentano come aggiunte di altra natura, e che, a parte questo, non sono neppure in sé molto chiari.

I. La logica tradizionale affrontava i problemi in un modo ingegnoso: come possiamo trovare i punti principali nella vasta varietà di argomenti del pensiero? Nel modo seguente: il pensiero ha come obbiettivo la verità. La caratteristica delle asserzioni, delle proposizioni, e solo di queste, è di essere vere o false. La forma elementare di proposizione afferma o nega qualche predicato di un soggetto, nella forma « tutti gli S sono P », o « nessun S è P », o « alcuni lo sono », o « alcuni non lo sono ». Le proposizioni implicano concetti generali, concetti-classe, fondamentali per ogni genere di pensiero. Perché una proposizione sia corretta è necessario che la sua « comprensione » e la sua « estensione » vengano trattate correttamente. Sulla base di certe asserzioni, si traggono alcune inferenze. La logica studia le condizioni formali a cui le conclusioni devono uniformarsi per essere corrette. Determinate combi-

nazioni di proposizioni fanno sì che sia possibile derivare « nuove » proposizioni corrette. Tali sono i sillogismi, con le loro premesse e conclusioni: il coronamento, il cuore stesso della logica tradizionale. La logica stabilisce le varie forme di sillogismo che garantiscono l'esattezza della conclusione.

Sebbene la maggior parte dei sillogismi citati nei manuali sembri sterile, una sorta di circolo vizioso, come l'esempio classico « Tutti gli uomini sono mortali — Socrate è un uomo — perciò, Socrate è mortale », ci sono esempi di vere scoperte che a prima vista possono essere considerate sillogismi, come ad esempio la scoperta del pianeta Nettuno. Ma fondamentalmente, non sembra sussistere nessuna reale differenza dal punto di vista formale, tra i due tipi di sillogismo.¹ Le caratteristiche decisive e le regole sono identiche per entrambi, quelli un po' sciocchi e quelli veramente sensati.

La logica tradizionale si occupa dei criteri che garantiscono la esattezza, la validità, la coerenza dei concetti generali, delle proposizioni, delle conclusioni e dei sillogismi. I capitoli principali della logica classica si riferiscono a questi argomenti. A dire il vero, le regole della logica tradizionale fanno, talvolta, venire in mente un efficiente codice della strada.

Se noi trascuriamo le differenze di terminologia, che spesso danno luogo a controversie di natura sottile, possiamo elencare le seguenti operazioni della logica tradizionale:

TAVOLA I

definizione
confronto e discriminazione
analisi
astrazione
generalizzazione
formazione di concetti di classe
sussunzione, ecc.
formazione di proposizioni
formazione di inferenze
formazione di sillogismi, ecc.²

¹ Vedere WERTHEIMER, M., « Über Schlussprozesse im produktiven Denken », in: *Drei Abhandlungen zur Gestalt theorie* (Erlangen: Philosophische Akademie, 1925) pagg. 164-184; vedere anche ELLIS W. D., *A source book of gestalt psychology*, selezione 23, New York: Harcourt, Brace, 1939.

² La natura di queste operazioni è stata discussa minutamente. Per i nostri scopi non ha importanza se vengono definite in un linguaggio mentalistico, comportamentistico, pragmatico o altro, sebbene dal punto di vista filosofico vi siano grandi differenze tra queste varie concezioni.

Queste operazioni, così come il logico le concepisce, definisce e utilizza, sono state e vengono tuttora prese dagli psicologi come oggetti di investigazione. Come risultato, abbiamo molte ricerche sperimentali sull'astrazione, la generalizzazione, la definizione, il trarre conclusioni, ecc.

Alcuni psicologi riterrebbero che una persona è in grado di ragionare, è intelligente, quando è in grado di eseguire le operazioni della logica tradizionale correttamente e con facilità. L'incapacità di formare concetti generali, di astrarre, di trarre conclusioni in sillogismi di determinati tipi formali, è considerata come una deficienza mentale, che viene determinata e misurata mediante esperimenti.³

La logica classica, comunque la si consideri, aveva ed ha grandi meriti:

per la sua volontà decisa di accostarsi alla verità;
per aver posto in rilievo la differenza fondamentale tra una semplice asserzione, una credenza, e un giudizio esatto;
per aver accentuato la distinzione tra concetti vaghi, generalizzazioni vaghe e formulazioni esatte;
per aver elaborato una moltitudine di criteri formali atti a stabilire delle prove che permettono di scoprire sbagli e confusioni di pensiero, come il generalizzare ingiustificato o il saltare direttamente alle conclusioni;
per l'importanza data alla prova;
per la serietà delle regole di discussione;
per avere insistito sulla severità e il rigore in ogni singolo passaggio nei processi di pensiero.

Il sistema di logica tradizionale, così com'è presentato nelle sue linee principali nell'*Organon* di Aristotele, fu riconosciuto come conclusivo attraverso i secoli; vennero aggiunte qua e là delle elaborazioni, ma queste non mutarono il suo carattere fondamentale. Un nuovo indirizzo si iniziò al tempo del Rinascimento, e fu un'evoluzione essenziale per il progresso della scienza moderna. Il punto centrale fu l'introduzione, come elemento fondamentale, di un procedimento che fino allora era stato ritenuto di minor valore, in quanto mancante di assoluto rigore dimostrativo. Questo procedimento è

³ Alcuni studiosi oggi credono che la logica tradizionale non abbia alcun nesso con il nostro comportamento effettivo. Questo è uno sbaglio. L'applicazione della logica al comportamento presuppone soltanto un assioma che li metta in relazione, approssimativamente come segue: il comportamento non sarà ragionevole, non produrrà alcun risultato, incorrerà in difficoltà, se viene determinato da fattori che possono esser considerati paralleli a errori nel senso della logica tradizionale.

l'induzione, che dà la massima importanza all'esperienza e alla sperimentazione, concetto metodologico che raggiunse la massima perfezione nel famoso canone di regole dell'induzione di John Stuart Mill.

I. Qui non viene messa in rilievo la deduzione razionale da proposizioni di carattere generale, ma la raccolta di fatti, lo studio dei rapporti empiricamente costanti tra fatti, tra cambiamenti, e l'osservazione delle conseguenze dei cambiamenti introdotti in situazioni di fatto; procedimenti, questi, che culminano in assunzioni di carattere generale.⁴ I sillogismi sono considerati strumenti per mezzo dei quali si possono trarre conseguenze da tali assunzioni ipotetiche allo scopo di provarle.

È opinione generale che la logica induttiva aggiunga alle regole e alle operazioni classiche, un particolare rilievo a:

TAVOLA Ia

le osservazioni empiriche
l'accurata raccolta di fatti
lo studio empirico dei problemi
l'introduzione di metodi sperimentali
la correlazione di fatti
l'elaborazione di prove decisive.

II. La seconda grande teoria del pensiero è fondata sulla teoria classica della associazione. Il pensiero è una catena di idee (o, in termini più moderni, una catena di stimoli e risposte, o una catena di elementi del comportamento). Quale sia la via da seguire, per comprendere il pensiero, è chiaro: dobbiamo studiare le leggi che regolano la successione delle idee (o, in termini moderni, di singole fasi del comportamento). Un'« idea » nella teoria classica dell'associazione è una specie di residuo della percezione, una copia, o in termini più moderni, una traccia lasciata dalla stimolazione. Qual è la legge fondamentale della successione e della connessione di queste fasi? Risposta (molto elegante nella sua semplicità teoretica): se due elementi, *a* e *b*, si sono spesso presentati insieme, un ulteriore verificarsi di *a* richiamerà nel soggetto anche *b*.⁵ Fondamentalmente gli

⁴ Il punto principale era lo studio della correlazione di due serie variabili, che offriva come risultato leggi di funzione invece che semplici classificazioni.

⁵ Nei successivi sviluppi scientifici la legge dovette essere definita in certi dettagli.

elementi sono collegati nello stesso modo in cui il numero di telefono di un mio amico è collegato con il suo nome, nel modo in cui alcune sillabe senza significato possono essere ripetute se imparate una di seguito all'altra in una serie, o nel modo in cui un cane è condizionato a reagire con la salivazione a un determinato suono musicale.

L'abitudine, l'esperienza passata, intesa come ripetizione di fatti separati, contigui l'uno all'altro; insomma, l'inerzia piuttosto che la ragione, sono i fattori essenziali, proprio come aveva sostenuto David Hume. Questa teoria, in confronto con quella classica dell'associazione, si presenta oggi, nei suoi sviluppi recenti, in un modo molto intricato; ma l'antica idea di ripetizione secondo la contiguità, resta ancora il concetto centrale. Uno fra i principali esponenti di questa corrente ha dichiarato esplicitamente non molto tempo fa che la teoria moderna dei riflessi condizionati ha essenzialmente la *stessa natura* dell'associazionismo classico.

La lista delle operazioni viene ad assumere qui all'incirca il seguente aspetto:

TAVOLA II

associazione, acquisizione di connessioni, legami basati sulla ripetizione
funzione della frequenza, dell'esperienza recente
richiamo alla mente da esperienza precedente
tentativi ed errori, con successo fortuito
apprendimento in base a successi ripetuti
comportamento sulla base di risposte condizionate, e secondo l'abitudine.

Queste operazioni e questi processi vengono ora studiati a fondo con metodi altamente perfezionati.

Molti psicologi direbbero: la capacità di pensare consiste nell'attività dei legami associativi; può essere misurata dal numero di associazioni che un soggetto ha acquisito, dalla facilità e correttezza con cui le impara e le richiama alla mente.⁶

⁶ Cfr. ad esempio THORNDIKE, E. L., *Psychology of arithmetic*, New York, Macmillan, 1922: « La pedagogia del passato ha compiuto due errori nella pratica, basati su due errori nella psicologia del ragionamento. Considerava la capacità di ragionare come un potere o un'essenza dotata di qualcosa di magico, che agiva in modo da contrapporsi e prevalere sulle ordinarie leggi dell'abitudine dell'uomo, e separava troppo nettamente il 'comprendere i principi' attraverso il ragionamento,

Senza dubbio anche questa concezione ha dei meriti, soprattutto per ciò che riguarda gli aspetti più delicati che sono in gioco in questo tipo di apprendimento e di comportamento.

Entrambi gli orientamenti incontrarono delle difficoltà per quel che riguarda l'interpretazione dei processi di pensiero sensibili e produttivi.

Si consideri dapprima la logica tradizionale. Nel corso dei secoli affiorò più di una volta un profondo senso di insoddisfazione per il modo in cui la logica tradizionale affrontava tali processi.⁷ Gli argomenti e gli esempi comuni della logica tradizionale in confronto ai processi reali, sensati e produttivi, spesso sembrano ottusi, insipidi, senza vita. Senza dubbio il procedimento è abbastanza rigoroso; tuttavia spesso sembra sterile, noioso, vuoto, improduttivo. Se si cerca di descrivere i processi del pensiero genuino con i termini della logica tradizionale, il risultato è spesso insoddisfacente: in

dal lavoro 'meccanico' di computo, ... il ricordare fatti e cose simili, per mezzo della 'mera' abitudine e memoria.

« Il ragionare o il pensiero selettivo, conclusivo, non è per nulla in contrapposizione, o indipendente dalle leggi dell'abitudine, ma in realtà è il loro risultato necessario date le condizioni imposte dalla natura e dall'istruzione dell'uomo. Un esame più accurato del pensiero selettivo mostrerà che per spiegarlo non sono necessari principi al di là delle leggi di prontezza, esercizio ed effetto; che è soltanto un caso estremo di ciò che succede nell'apprendimento associativo così come viene descritto sotto l'attività 'frazionante' delle situazioni.... » (pag. 190). (Vedere Capitolo Sesto — M. W.).

In maniera analoga PILLSBURY, W. B., in « Recent naturalistic theories in reasoning » (*Scientia*, 1924): « L'animale risolve un problema per mezzo di tentativi a casaccio.... Un problema scientifico viene risolto in maniera molto simile tramite un certo numero di pensieri a caso » (pag. 25). « Non si può mai predire quando verrà fatta un'ipotesi fruttuosa. Generalmente verranno avanzate parecchie proposte inadeguate prima che giunga quella giusta. Possono venire suggerite da un'altra persona, perfino da un bambino o da una persona all'oscuro del problema. Durante la soluzione del problema, colui che pensa non fa altro che tenersi pronto a prendere in esame le soluzioni offerte. Il suo atteggiamento è molto simile a quello che noi pensiamo abbia l'animale quando procede per tentativi ed errori. Ha un controllo altrettanto scarso. È infatti un processo per tentativi ed errori come l'altro e da esso differisce solo nel fatto che i tentativi vengono compiuti nell'immaginazione, non con movimenti reali.... per trovare un modo di eliminare le difficoltà. Questo avviene sempre attraverso una serie di processi per prove ed errori, attraverso un certo numero di suggerimenti offerti dall'associazione » (pag. 30). C'è soltanto da aggiungere che per fortuna in pubblicazioni più recenti Pillsbury ha visto la situazione in un modo molto diverso.

⁷ Cfr., ad esempio, certi movimenti contrari alla logica tradizionale alla fine del Medio Evo, oppure il meraviglioso frammento di Spinoza giovane, « Miglioramento della comprensione ». Furono movimenti tragici, questi, mossi dalla sensazione di una certa insufficienza fondamentale, ma nello stesso tempo incapaci di raggiungere una concezione veramente positiva.

questo caso si ha una serie di operazioni corrette; ma il significato del processo e ciò che in esso vi era di vitale, di vigoroso, di creativo sembra essere in certo modo evaporato nel corso delle formulazioni. D'altro canto si può avere una catena di operazioni logiche, ciascuna delle quali in sé perfettamente corretta, che non ha niente a che fare con un processo concreto di pensiero. E vi sono veramente persone esercitate nella logica che, in determinate situazioni, eseguono una serie di operazioni corrette che tuttavia, viste nel loro insieme, formano qualcosa di simile a una fuga di idee. Non si deve disprezzare l'addestramento nella logica tradizionale: esso conduce alla severità e al rigore in ogni passaggio, contribuisce a creare una disposizione critica. Sembra però che in sé non dia origine a un pensiero produttivo.⁸ Insomma, c'è il pericolo di pensare in modo vuoto e privo di senso, per quanto esatto; ed è sempre difficile ottenere una vera produttività.

Il fatto di essersi resi conto di quest'ultima difficoltà, fra le altre, ha condotto alcuni logici a dichiarare risolutamente che la logica, alla quale interessano soltanto la correttezza e la validità, non ha assolutamente nulla a che vedere con il pensiero effettivo o con questioni di creatività. Si è data anche una ragione di ciò: la logica, si è detto, ha implicazioni al di fuori del tempo ed è quindi, per principio, separata da questioni di processi di pensiero concreti, che hanno un'esistenza meramente fattuale e sono quindi, necessariamente, collocati nel tempo. Questa separazione ha avuto certamente dei meriti per quanto riguarda alcuni problemi; da un punto di vista più ampio, tuttavia, tali asserzioni spesso assomigliano un po' alla dichiarazione che fece la volpe quando disse che l'uva era acerba.

Nella teoria dell'associazione sono sorte difficoltà analoghe: il fatto di dover distinguere tra pensiero sensato e combinazioni senza senso, e la difficoltà nel trattare il lato *produttivo* del pensiero.⁹

⁸ Le discussioni metodologiche nella logica tradizionale, per quanto meritoria sotto vari aspetti, non offrono un vero aiuto a questo punto. Cfr. le idee euristiche (o anche, vere macchine logiche) di Buridano, Raimondo Lullo, Jevons.

⁹ Caratteristico, per il primo aspetto, il geniale libro di HUGO LIEPMANN sulla fuga di idee (*Über Ideenflucht*, 1904). Nel discutere esempi concreti di fuga di idee in malati di mente, egli trovò che i criteri offerti dalla teoria dell'associazione non sono davvero sufficienti per fare una discriminazione nemmeno tra determinati tipi di fuga di idee e discorsi sensati.

Una formulazione recente esprime in forma concisa il carattere fondamentale della forma moderna della teoria dell'associazione. Mi riferisco all'articolo di CLARK HULL su « Mind, mechanism and adaptive behavior », *Psychological Review*, 1937, vol. 44, pagg. 1-32: « Una reazione *corretta* o 'giusta' è una sequenza comporta-

Se un problema viene risolto attraverso il richiamo alla mente, la ripetizione meccanica di quanto è stato appreso con l'esercizio attraverso la semplice scoperta casuale, in un susseguirsi di tentativi alla cieca, si esiterebbe a chiamare un tale processo ragionamento sensato; e sembra dubitabile che l'accumulo di tutti questi fattori, anche in gran numero, possa condurre ad un quadro adeguato dei processi sensati. Per poter affrontare in qualche modo i processi che permettono di raggiungere soluzioni nuove, si propone un certo numero di ipotesi ausiliarie (ad esempio, la teoria della costellazione di Selz, o il concetto di abitudine-famiglia-gerarchia) che, proprio per la loro natura, non sembrano dare aiuto decisivo.

Nei decenni passati sono sorti altri punti di vista che hanno condotto a concezioni nuove, a nuove direzioni nella teoria del pensiero: per esempio, l'orientamento della dialettica hegeliana e di quella marxista che nella loro dottrina delle « contraddizioni intrinseche » danno importanza allo sviluppo dinamico, con i tre momenti di tesi, antitesi e sintesi; il largo sviluppo della « logistica » o logica matematica (Whitehead, Russell e altri) che arricchisce gli argomenti e le operazioni della logica tradizionale con lo studio della logica delle relazioni, delle reti di relazioni, e considera altre forme di deduzione oltre al sillogismo; la fenomenologia (Husserl) che nella « riduzione fenomenologica » mette in rilievo l'importanza di cogliere l'essenziale; il pragmatismo (in particolar modo John Dewey) con l'importanza da esso attribuita all'agire e al fare, in contrapposizione al pensare per pure astrazioni; al progresso attuale e futuro. In psicologia, all'incirca nel periodo stesso in cui nasce l'orientamento esposto in questo libro, abbiamo la « Denkpsychologie » della scuola di Würzburg (Külpe, Ach, Bühler, Selz e altri), che sottolinea l'importanza dell'« Aufgabe » (il ruolo di un compito assegnato), dei « pensieri » (*unanschauliche Vorstellungen*), delle relazioni, degli schemi, ecc.; l'orientamento « naturalistico » (J. Dewey, Pillsbury e altri), che pone l'accento sulle condizioni che mettono in moto il pensiero effettivo in una data situazione.

La maggior parte di questi orientamenti presenta aspetti importanti dal punto di vista filosofico e psicologico. Alcuni hanno portato

mentale che ha come risultato un rafforzamento. Una reazione *scorretta* o « sbagliata » è una sequenza comportamentale, che ha come risultato l'estinzione del riflesso » (pag. 15). È evidente che il problema *sta* nella questione della ripetizione. Queste definizioni fondamentali sono senza dubbio in linea con lo spirito della teoria dell'associazione.

dei contributi veramente nuovi, sebbene la situazione, per quanto riguarda il nostro problema principale e i punti cruciali menzionati, sia lungi dal sembrare soddisfacente. In alcune di queste concezioni è ancora evidente l'influsso dei due orientamenti tradizionali. In altre parole, se attraverso le nuove formulazioni penetriamo fino alla vera natura delle operazioni che *in concreto* si assumono, avremo la sorpresa di scoprire che si tratta essenzialmente di operazioni appartenenti a uno di quei due orientamenti tradizionali. Questo richiama alla mente uno dei casi che sono accaduti frequentemente nella storia della logica. Dall'introduzione o da qualcuno dei primi capitoli si può ricevere l'impressione che un libro inauguri una nuova concezione, completamente differente dall'abituale modo di trattare la logica; effettivamente certe formulazioni possono quasi apparire vicine a quelle della teoria della « gestalt »; e tuttavia, quando giunge al punto di trattare concretamente un problema, riappaiono le vecchie operazioni, le vecchie regole, il vecchio atteggiamento.

Non ho potuto fare altro qui che citare brevemente tali orientamenti. Penso che chi è competente vedrà nel testo quali elementi di essi concordino e quali siano fundamentalmente differenti per natura da quelli dell'orientamento esposto in questo libro.

Questo libro pone l'accento su alcuni problemi elementari di base. La natura degli argomenti trattati ci permetterà di accostarci al pensiero come ad un complesso di « sistemi relativamente chiusi », come se il pensare ad un problema fosse un processo che ha luogo indipendentemente da più ampie questioni da risolvere. Solo occasionalmente ci riferiremo al posto, al ruolo e alla funzione di tale processo nell'ambito della struttura della personalità del soggetto e nell'ambito di quella del suo ambiente sociale.

Per il momento basterà che io faccia notare che i medesimi principi di campo discussi in queste pagine possono rappresentare una buona base per raffrontare in modo adeguato anche i processi che avvengono all'interno di quelle regioni più vaste.

L'area del parallelogrammo

Tra i problemi con i quali ho lavorato c'era quello di trovare l'area del parallelogrammo.

Non so se vi divertirete quanto mi sono divertito io nell'eseguire alcune delle esperienze che sto per raccontarvi. Penso di sì, se mi accompagnerete nel corso di questo viaggio di esplorazione nel quale sorsero problemi e si presentarono difficoltà che mi costrinsero a inventare strumenti e metodi al fine di chiarire i problemi psicologici implicati.

I

1. Sono in visita ad una classe. L'insegnante dice: « Durante la scorsa lezione abbiamo imparato come si trova l'area di un rettangolo. Lo sapete tutti? »

E la scolaresca: « sì ». Uno scolaro recita: « L'area di un rettangolo è uguale al prodotto dei due lati ». L'insegnante approva

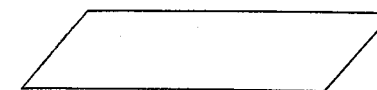


Fig. 1

ed assegna un certo numero di problemi con rettangoli di varie misure che tutti risolvono speditamente.

« Ora », dice l'insegnante, « andiamo avanti ». Disegna alla lavagna un parallelogrammo. « Questa figura si chiama parallelogrammo. Un parallelogrammo è un quadrilatero piano, i cui lati opposti sono uguali e paralleli ».

A questo punto uno scolaro alza la mano: « Scusi, signor mae-

stro, quanto misurano i lati? » « Oh, i lati possono avere lunghezze differenti », risponde l'insegnante. « Nel nostro caso una linea misura 11 cm, l'altra 5 cm ». « Allora l'area è 5×11 centimetri quadrati ». « No », risponde l'insegnante, « è sbagliato: ora imparerai come si fa a trovare l'area del parallelogrammo ». Egli segna gli angoli con le lettere a, b, c, d .

« Faccio scendere una perpendicolare dall'angolo superiore sinistro e un'altra perpendicolare dall'angolo superiore destro.

« Prolungo la linea di base verso destra.

« Segno i due nuovi punti con le lettere e ed f ».

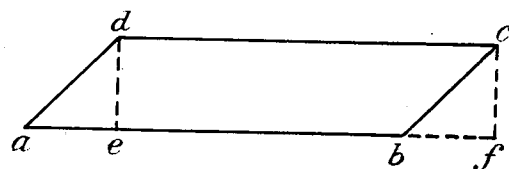


FIG. 2

Poi con l'aiuto di questa figura l'insegnante procede alla comune prova del teorema secondo cui l'area del parallelogrammo è uguale al prodotto della base per l'altezza, stabilendo l'eguaglianza di determinate linee ed angoli, e mostrando che i due triangoli sono forme congruenti. In ciascun caso espone il teorema, il postulato, o l'assioma imparati in precedenza, su cui si basano l'eguaglianza o la sovrapposibilità. Per concludere dice di aver dimostrato che l'area del parallelogrammo è uguale al prodotto della base per l'altezza.

« Troverete ciò che vi ho esposto nel vostro testo a pagina 62. Studiate la lezione a casa, ripetetela attentamente in modo da impararla bene ».

A questo punto l'insegnante presenta un certo numero di problemi che richiedono tutti di trovare l'area di parallelogrammi di dimensioni, lati e angoli diversi. Poiché è una classe « buona », i problemi vengono risolti tutti correttamente. Prima della fine dell'ora l'insegnante assegna come compiti per casa altri dieci problemi di questo genere.

2. Quando la classe si riunisce, il giorno dopo, io sono là di nuovo.

All'inizio della lezione l'insegnante chiede a un allievo di dimostrare come si trova l'area di un parallelogrammo. Lo scolaro lo dimostra correttamente. Si vede che ha imparato il problema. L'in-

segnante mi sussurra: « E non è il migliore dei miei allievi. Senza dubbio gli altri lo sanno altrettanto bene ». Una prova scritta dà buoni risultati.

La maggior parte delle persone direbbe: « Questa è una classe eccellente: lo scopo dell'insegnamento è stato raggiunto ». Ma osservando la classe mi sento a disagio, sono preoccupato. « Che cosa hanno imparato? », mi chiedo. « Hanno davvero usato il cervello? Hanno colto il problema? Forse tutto ciò che hanno fatto è poco più di una cieca ripetizione. Senz'altro hanno risolto prontamente i diversi problemi presentati loro dall'insegnante, e nel far questo hanno imparato qualcosa di carattere generale, che coinvolge un po' di astrazione. Non solo erano in grado di ripetere parola per parola ciò che aveva detto l'insegnante, ma vi era anche un facile "transfer". Ma hanno veramente afferrato il punto centrale dell'argomento? Come posso stabilirlo? Che cosa posso fare? »

Chiedo all'insegnante il permesso di fare una domanda alla classe. « Con piacere », risponde, visibilmente orgoglioso dei suoi allievi.

Vado alla lavagna e disegno questa figura.

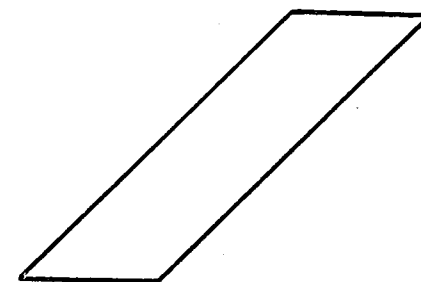


FIG. 3

Alcuni rimangono evidentemente sbigottiti.

Uno scolaro alza la mano: « Signor maestro, non l'abbiamo ancora studiato ».

Altri si danno da fare. Hanno copiato la figura sul foglio, disegnano le linee ausiliarie come è stato loro insegnato, facendo scendere le perpendicolari dai due angoli superiori e prolungando la linea di base (fig. 4). Poi rimangono confusi, perplessi.

Altri non sembrano per nulla a disagio; scrivono decisamente sotto il loro disegno: « L'area è uguale alla base per l'altezza »:

derivazione esatta, ma forse del tutto cieca. Quando si chiede loro se sanno dimostrare che ciò sia vero, in questo caso, anch'essi diventano perplessi.¹

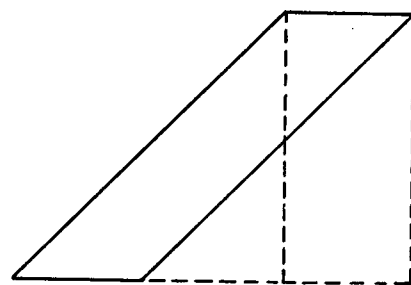


FIG. 4

Per altri ancora il caso è del tutto diverso. Le loro facce si illuminano: sorridono e tracciano le seguenti linee nella figura, oppure girano il foglio di 45° e poi le tracciano (figg. 5A e 5B).

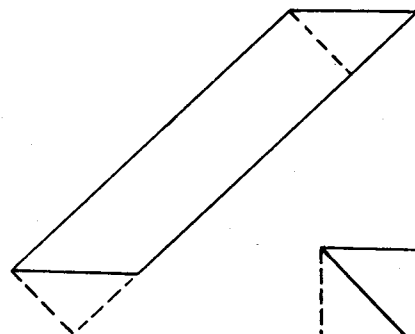


FIG. 5A

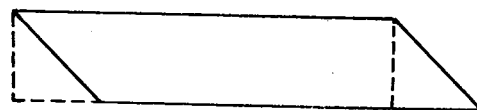


FIG. 5B

L'insegnante, osservando che solo una minoranza degli scolari ha capito il problema, mi dice un po' indignato: « Avete dato loro una figura davvero strana. È naturale che non siano stati capaci di venirne a capo ».

¹ Un ragazzo di un'altra classe, osservando queste difficoltà mi sussurra: « Nella nostra classe abbiamo imparato come comportarci con questo esempio di sovrapposizione. La colpa è dell'insegnante. Perché non ha insegnato loro come risolverlo anche col diagramma che si sovrappone? ». Con mia sorpresa questa prova speciale e complicata viene talvolta insegnata fin dall'inizio nei libri di testo; in realtà per i bambini non solo è difficile da capire, ma non risulta neanche necessaria per la soluzione.

Ora, detto fra noi, non avete pensato anche voi: « Non c'è da meravigliarsi che tanti non siano riusciti, dal momento che ha dato loro una figura così poco familiare! » Ma è forse meno familiare delle varianti della figura originale, che l'insegnante aveva dato in precedenza e che essi avevano risolto? L'insegnante aveva dato problemi in cui le figure variavano grandemente per quanto riguarda la lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli e le dimensioni delle superfici. Queste variazioni erano previste, e non erano risultate affatto difficili per gli scolari. Avete per caso notato che il mio parallelogrammo è semplicemente la figura originale dell'insegnante rivoltata? Per quanto riguarda tutte le qualità delle parti essa era senz'altro più simile all'originale che non le varianti presentate dall'insegnante.

A questo punto riferirò brevemente sui procedimenti sperimentali impiegati con i bambini a cui era stata insegnata prima l'area del rettangolo, poi l'area del parallelogrammo, con le linee ausiliarie e il risultato: base per altezza, con o senza prova. Essi venivano poi interrogati su altre figure diverse dall'originale.



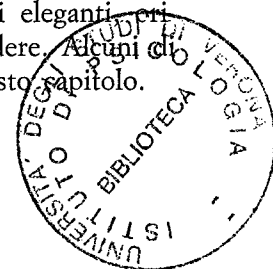
FIG. 6

3. Vi sono dei casi estremi di reazioni non ragionate, in cui un bambino, se gli viene data semplicemente la fig. 6, ripete ciò che ha detto l'insegnante parola per parola, ciecamente. Borbotta: « Una perpendicolare dall'angolo superiore sinistro » e la traccia; poi, « Un'altra dall'angolo superiore destro », e la traccia, « Prolungo la linea della base verso destra », e ottiene così la seguente figura:



FIG. 7

4. D'altra parte *succede* davvero che bambini anche solo di sei anni, che non hanno imparato nulla di geometria, dopo che vien mostrato loro come trovare l'area del rettangolo, riescono a trovare la soluzione per il parallelogrammo con procedimenti eleganti, originali, senza che ad essi venga insegnato come procedere. Alcuni di questi casi verranno descritti nella terza parte di questo capitolo.



E succede anche che certi bambini, dopo aver trovato o dopo che è stato loro mostrato come si fa a trovare l'area del parallelogrammo, invitati a trovare la superficie del trapezoide o di una qualsiasi delle figure qui sotto, non si trovano del tutto sprovveduti ma dopo un po' di riflessione, qualche volta con un piccolo aiuto, raggiungono soluzioni eleganti, genuine, del tipo di quelle che seguono.

Ecco i compiti assegnati:

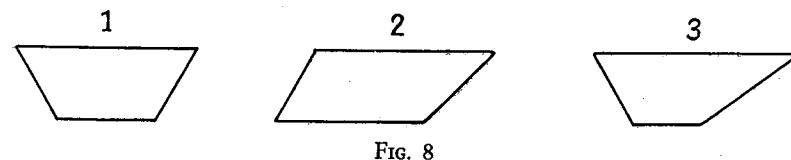


FIG. 8

In tutti questi casi è possibile o che il problema sia risolto cambiando le figure in modo appropriato (risposte A); oppure che siano applicate le operazioni imparate, o alcune di esse, alla cieca e senza nessun risultato (risposte B).

Risposte A:

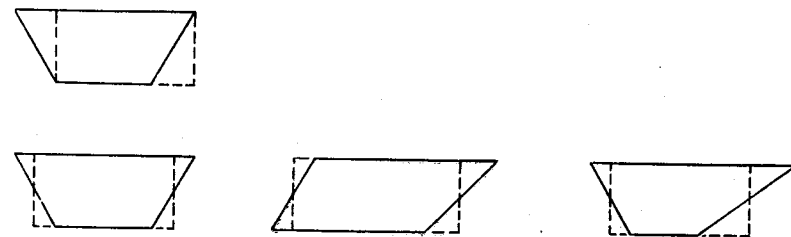


FIG. 8A

I soggetti trasformano le figure in rettangoli spostando i triangoli. Essi non daranno

risposte B:

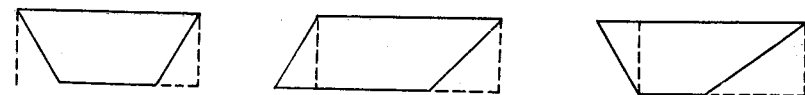


FIG. 8B

5. Ma altri danno proprio risposte B, o risposte A e B senza distinzione. Molti scolari si rifiutano di affrontare i problemi 1, 2 e 3 dicendo: « Come facciamo a saperlo? Non abbiamo ancora imparato come si fa a risolvere queste figure ».

6. In seguito ho fatto degli esperimenti con bambini. Metto loro di fronte figure singole o coppie di figure A e B, subito dopo aver loro mostrato come si trova l'area del parallelogrammo con le linee ausiliarie.

Esempi di figure A

di figure B

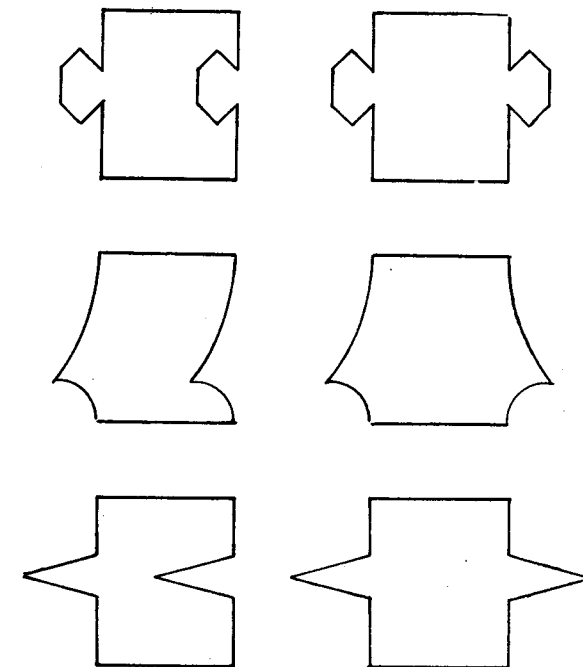


FIG. 9

In queste coppie di figure un membro della coppia, la figura B, non può avere una soluzione A, mentre la soluzione A è possibile nella figura A. Per alcuni bambini sembra che non ci sia alcuna differenza tra le figure A e quelle B. Sono tutte nuove. « Non possiamo saperlo! » è il loro atteggiamento. Non mostrano nessuna reazione oppure, se reagiscono in qualche modo non fanno alcuna discriminazione tra le figure A e B: tracciano alcune linee ausiliarie e danno risposte alla cieca.

Ma alcuni risolvono coerentemente i problemi A e, dopo un breve tempo, respingono i problemi B dichiarando: « Questo non sono in grado di farlo; non ne conosco l'area »; o anche, « Non so quale sia l'area di questa piccola parte rimanente ». All'opposto, nei casi A la superficie delle parti rimanenti generalmente non viene

menzionata, oppure il bambino può dire: « Naturalmente non conosco l'area di queste figure piccole, ma ciò non ha importanza, visto che sono uguali ».

7. Anche negli esempi seguenti, le figure A, considerate nelle loro parti singole, hanno subito chiaramente un maggior cambiamento rispetto all'originale che le figure B; infatti i cambiamenti in A sono gli « stessi » che in B, solo che ve ne sono di più. La risposta semplicistica basata sulla « familiarità » non è evidentemente di alcun aiuto nel comprendere le reazioni positive: la soluzione immediata dei casi A, il rifiuto dei casi B.

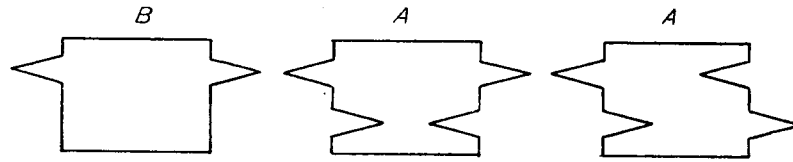


FIG. 10

Le nostre osservazioni con le coppie A-B hanno già indicato esempi di come procedere nell'analisi sperimentale. Sebbene il compito sembri qui abbastanza facile, nella classe si verificano talvolta delle reazioni assurde.

8. Un altro passo nell'analisi sperimentale consiste nel dare due solidi mobili invece di una figura. Questi possono essere separati o adiacenti, e disposti in posizioni diverse:

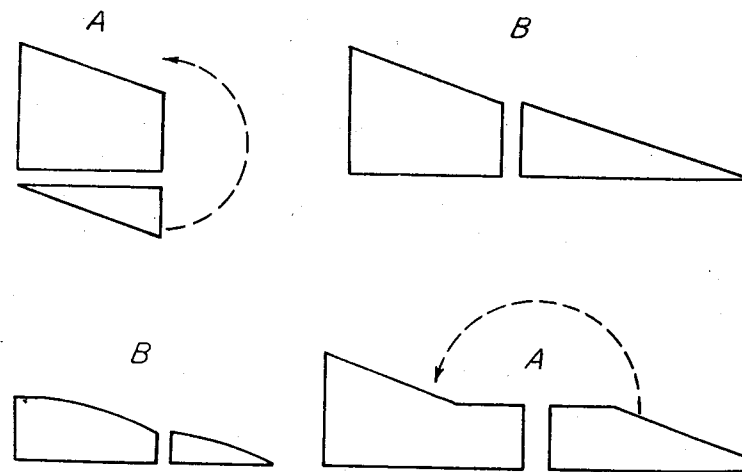


FIG. 11

Di nuovo sono possibili risposte assurde, e talvolta hanno luogo effettivamente.

9. Per avere un'idea chiara sulle questioni teoretiche che questi problemi comportano, talvolta è utile considerare i casi estremi. Prendete la seguente risposta inadeguata:

Ad un bambino viene insegnata la dimostrazione del teorema per trovare l'area del parallelogrammo con l'aiuto di una figura tracciata su carta millimetrata. Si tracciano le linee ausiliarie. Il lato a viene ad essere di 5 cm, il segmento c di 3.

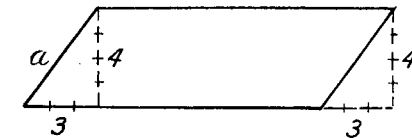


FIG. 12

L'insegnante dice: « Guardate! Da ciascun angolo superiore faccio scendere una perpendicolare di 4 cm; prolungo la linea di base di 3 cm verso destra, potete misurarlo ».

Dopo un po' vien dato un altro esempio, un parallelogrammo di misure differenti. Fate il caso di un bambino che svolga il suo compito per forza, forse distratto dalla presenza di un osservatore, o pensando ad un gioco che stava per fare, o chiedendosi dove possa essere sua madre in quel momento; pensate ad un bambino che ripeta fra sé, « Quattro centimetri in giù, tre centimetri a destra », e, passivo come una pecora, produca questa figura:

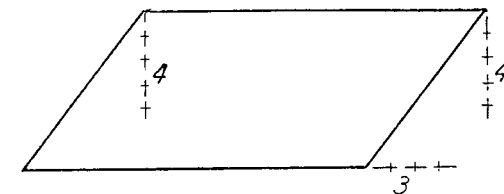


FIG. 13

Poi se gli vien chiesto se l'obiettivo, cioè l'area, è stato raggiunto, risponde: «...no », ma per il momento non riuscirebbe a proseguire. Non mi sono mai imbattuto personalmente in tale risposta, ma *potrebbe* succedere. Cose simili accadono veramente, come gli insegnanti sanno, in casi strutturalmente meno semplici.

Evidentemente questo sarebbe un caso estremo di reazione B: copiare ciò che ha detto l'insegnante, ad occhi chiusi per quanto riguarda il contesto. Tutti capiscono che cosa c'è che non va. Ma in teoria che cosa è sbagliato? C'è chi potrebbe dire: « Questo bambino non ha adattato con proprietà alla nuova situazione ciò che gli è stato insegnato ». Ma che cosa vuol dire adattare « con proprietà »?

Un altro potrebbe dire: « Questo è un caso evidente di mancanza di generalizzazione », e dichiarare chiuso il problema. È chiuso? Che dire di generalizzazioni assurde, che per il fatto di essere assurde non cessano di essere generalizzazioni? Che dire se un bambino considerando la figura qui sopra, ad esempio (non ho incontrato un caso del genere), fosse indotto alla seguente generalizzazione: « Le perpendicolari devono essere 2 cm più lunghe della linea di base », oppure « La lunghezza della perpendicolare deve essere un numero pari », ecc., ed agisse di conseguenza?

Mettere da parte il nostro problema con la parola « generalizzazione », non è di nessun aiuto. Naturalmente vi è qui la presenza di una generalizzazione, ma l'abbiamo in *entrambi* i tipi di casi. Spesso l'importanza attribuita alla generalizzazione non risponde al problema, ma piuttosto lo nasconde.

10. Qual è il vero problema nelle reazioni A e B, nei casi A e B? Ho avuto esperienze caratteristiche: vi sono le reazioni intelligenti, in cui il soggetto si rifiuta di applicare ad occhi chiusi ai problemi B ciò che ha imparato in precedenza e dà la soluzione intelligente, genuina nei casi A, mutando il procedimento a seconda di come richiede il buon senso. E vi sono le reazioni cieche in cui il soggetto non è in grado di trattare né i casi A né quelli B, oppure applica le operazioni senza criterio.²

² I disegni sciocchi degli esempi a pagg. 25-26 si trovano in realtà abbastanza raramente. I bambini con un atteggiamento spontaneo, naturale, non hanno la tendenza a comportarsi a quel modo. Sembra invece che tali risposte siano favorite dall'abitudine alla ripetizione meccanica, come si sviluppa in certe scuole col dare grande importanza al cieco lavoro di esercizio. Lo stesso vale per situazioni in cui l'atteggiamento chiuso, frazionante viene creato, ad esempio, dalla distrazione, da qualche preoccupazione, da difficoltà personali. Nelle scuole che usano esercizi ripetuti meccanicamente si sviluppa spesso l'atteggiamento di rispondere ad un nuovo problema aspettando semplicemente che si spieghi come risolverlo; se si domanda allo scolaro di provare da solo, spesso ci si trova di fronte a rifiuti passivi: « Non lo abbiamo ancora fatto ».

Col dire che lo psicologo si sentiva a disagio nella classe (vedi pag. 23) s'intendeva che egli avvertiva l'atmosfera determinata dall'uso prevalente di esercizi di ripetizione meccanica. Il comportamento ivi descritto sembrava connesso in particolare con l'at-

Se un soggetto applica il metodo che ha imparato ad una variazione del problema originale, senza rendersi conto che nel caso dato il metodo è fuori posto, questo è un indizio che egli non ha capito l'applicazione originale, o che non si è reso conto di ciò che ha importanza nel problema cambiato. Ma se egli tratta con proprietà e coerenza i casi A anche quando vi è, nelle parti, più dissomiglianza rispetto all'originale, e se allo stesso tempo si rifiuta di applicare la procedura imparata alle variazioni B più vicine all'originale, allora vuol dire che ha veramente afferrato il problema. Così le variazioni A-B, investigate sistematicamente, possono fornire le basi per una « definizione operativa » del comprendere. E nel corso dell'analisi sperimentale i vari fattori strutturali potrebbero essere studiati con il metodo A-B.

Qual è la differenza centrale tra i due tipi di risposte alle variazioni? Qual è, psicologicamente, il punto in discussione? Come riesce il soggetto a trovare la risposta A? Quali fattori decidono, nella mente dello scolaro, tra i procedimenti A e quelli B?

Primo: si potrebbe dire « La differenza è estremamente chiara. Le risposte B non portano alla soluzione corretta, mentre le risposte A sì ». Ma quest'asserzione si limita ad esporre il problema senza risolverlo.

Secondo: « Il grado di somiglianza rispetto al problema originale ha importanza decisiva ». No. La somiglianza in effetti conta, ma quale genere di somiglianza? Visti nelle loro parti costitutive, i casi B sono spesso più simili all'originale che i casi A.

Terzo: Si può spiegare il punto in questione in base alla « generalizzazione »? No. Naturalmente la generalizzazione è implicita in tutti questi casi, ma un'inadeguata risposta B, come è stato esposto precedentemente, può contenere lo stesso grado di generalizzazione di una risposta A. E così la generalizzazione non è in sé di nessun aiuto. Potrebbe servire, naturalmente, se parlassimo di « ge-

teggimento determinato da una ripetizione meccanica, che resta legata ciecamente alle parole dell'insegnante; poiché generalmente i bambini non si preoccupano molto della posizione spaziale delle figure (cfr. STERN, W., « Über verlagerte Raumformen », *Zeitschrift für Angewandte Psychologie*, 1909, vol. 2, pagg. 498-526).

Vi sono degli adulti che mantengono anche in seguito nella vita l'abitudine acquisita di un'attività cieca, meccanica. È sbalorditivo vedere come persone educate e per altri aspetti intelligenti reagiscono in situazioni simili, specialmente in una « Einstellung » (vedere Cap. IV, sez. IV). (Vedere anche Cap. VI e Appendici 2, 3 e 4. - M. W.).

neralizzazione operata in base a una soluzione appropriata». Ma questa qualifica che cosa ci fa intendere? Che porta alla soluzione? Allora si tratterebbe di nuovo di una proposta simile alla prima.

Quarto: la situazione rimane immutata se si afferma (giustamente) che i vari casi A sono caratterizzati dal fatto che in essi si colgono i caratteri essenziali, si coglie ciò che è davvero rilevante. Ma cos'è questo « cogliere »? Che cosa significa « caratteri essenziali »? Che cosa determina quello che è essenziale e quello che non lo è? Solo il risultato?

Le risposte teoriche 2, 3 e 4 non stabiliscono una differenza soddisfacente tra le reazioni e i casi A e B, a meno che non si includa la proposta 1, che stabilisce una differenza, ma solo in base ai risultati. Nessuna di queste proposte in sé conduce a una comprensione psicologica.

Mi rivolgo al lettore: per favore, rifletti. Non accontentarti di soluzioni superficiali. Penso che se affronti questi casi direttamente troverai la risposta. Può darsi che tu l'abbia sulla punta della lingua senza saperla esprimere in parole. Per ora non proseguirò in questa analisi, ma vi ritornerò sopra più avanti.

II

11. Lo psicologo, sotto la forte e vivida impressione dello strano comportamento dei bambini in certe scuole, aggredisce di nuovo e con più decisione il problema.

Come nel caso citato, spesso sono rimasto perplesso nel vedere in che modo certe classi si comportano durante la spiegazione. Di solito seguono abbastanza diligentemente i passaggi della prova che l'insegnante sta mostrando loro. Li ripetono, li imparano. Si ha l'impressione che abbia luogo l'« apprendimento », che ci sia, forse, anche un po' di ragionamento, ma una vera comprensione, quella no.

Per maggiore chiarificazione, si tentò un altro procedimento.

Ciò che dirò ora è in certo modo spiacevole, brutto. Ma vedete, lo psicologo deve talvolta, per ragioni teoretiche, usare dei metodi che non sono in sé molto leali.

Invece di usare il comune metodo sensato per trovare l'area del parallelogrammo, agli scolari vien detto: « Per ottenere l'area di un parallelogrammo, bisogna misurare i lati, che chiameremo a e b ; si segna un punto sulla linea di base che si trovi direttamente sotto l'angolo superiore sinistro, poi si misura la distanza tra l'estre-

mità sinistra della linea e il punto, che chiameremo c . Nella nostra figura $a=5$ cm, $b=9$ cm, $c=3$ cm.

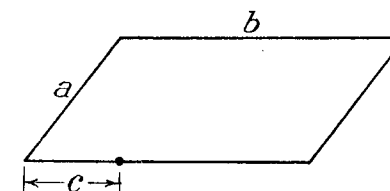


FIG. 14

« Ora sommate a e c ! ($a+c \dots 5+3=8$)

« Sottraete c da a ! ($a-c \dots 5-3=2$)

« Moltiplicate i risultati! ($\dots 8 \times 2=16$)

« Estraete la radice quadrata del prodotto! Avete imparato come si fa ($\dots \sqrt{16}=4$)

« Moltiplicate il risultato per b ed ottenete il risultato finale $\dots$ ($\dots 4 \times 9=36$).

« La formula per trovare l'area è $b \sqrt{(a+c)(a-c)}$ ».

Questo procedimento è orribile e non verrebbe mai in mente a nessun matematico e a nessun insegnante ragionevole. Ci vuole lo psicologo per presentare un metodo così noioso, spiacevole e senza senso. Tuttavia esso conduce a un risultato corretto.

Generalmente tale procedimento sembra strano e incomprensibile ai bambini. Non si può fare a meno di notare che in certi punti essi si tirano indietro. Alla fine alcuni di loro guardano l'insegnante con malcelato disprezzo. Altri scoppiano a ridere.

È grave che in certe scuole *non* si possa osservare nessuna differenza essenziale tra la reazione degli scolari a questo metodo, e quella che ha luogo di fronte a un metodo sensato. Se trovate che i bambini in una classe ingollano tranquillamente tale procedimento senza alcuna reazione, allora esaminate a fondo il genere di educazione che stanno ricevendo! Io sarei portato a pensare che c'è qualcosa che non va. E se voi fate esperimenti del genere che io ho qui riportato, spero che le vostre classi si mettano a ridere forte, o che, più educatamente, mostrino almeno il loro smarrimento.

In casi di questo genere è talvolta commovente vedere l'intensa concentrazione, l'aria risoluta con cui gli scolari prendono nota di

ogni singolo passaggio, borbottando tra i denti le parole dell'insegnante; l'orgoglio quando possono riprodurre esattamente ciò che hanno imparato, risolvere i problemi proprio nel modo che è stato loro insegnato. Questo è per molti l'insegnare e l'apprendere. Il maestro ha spiegato il procedimento « esatto ». Gli allievi lo hanno imparato, sono in grado di applicarlo nei casi più comuni; tutto qui.

Consideri il lettore se a scuola non ha imparato spesso le cose a quel modo. Non è così che avete imparato i differenziali e il calcolo degli integrali? O anche teoremi di geometria piana e solida? Naturalmente voi avevate le vostre buone ragioni per credere che l'insegnante vi stesse dicendo cose sensate e serie che dovevate imparare. Ma avevate poi la possibilità di qualche altro genere di apprendimento, la possibilità di capire veramente? Potevate fare qualcos'altro, che non fosse sottomettervi e accettare la dimostrazione dell'insegnante, passaggio per passaggio, quando non eravate in grado di vedere le ragioni per cui faceva una determinata cosa, e poi un'altra? Potevate forse fare a meno di seguire obbedienti la lezione, mentre i vari passaggi cadevano dal cielo?

Sarete d'accordo, penso, nel dire che questo non era possibile. E non sarei sorpreso se aggiungeste che certamente quello era il procedimento giusto, se l'insegnante lo faceva così, che probabilmente non ne esistevano altri. O potreste obiettare: « Non si può paragonare questo orribile esempio con gli insegnamenti abituali nel corso dei quali un docente presenta cose ragionevoli, con tutte le prove necessarie ».

Avete perfettamente ragione in quest'ultima osservazione. Nel nostro esempio manca la prova, e si tratta di un'omissione che, fra parentesi, certe classi non notano nemmeno. E per una vera decisione abbiamo davvero bisogno di un esempio che contenga una prova. Questo punto sarà esaminato più a lungo nel paragrafo 17.

12. Ma prima finiamo la nostra storia. Io domandai alla scolaresca: « Siete sicuri che questo risultato sia veramente esatto? » Gran parte della scolaresca rimase chiaramente sbigottita alla domanda, sorpresa che potesse essere fatta. Il loro atteggiamento voleva dire: « Come potete aspettarvi che noi mettiamo in dubbio la soluzione che ci avete dato? » La domanda era strana per loro, toccava il significato essenziale che la scuola, il modo di insegnare, il modo di apprendere avevano per loro. Nessuna risposta: la classe era immersa nel silenzio.

Cambiai la mia domanda e chiesi in modo amichevole: « Qualcuno di voi sarebbe capace di dimostrare che la risposta ottenuta a questo modo è veramente giusta? »

Il piccolo M. alzò la mano. Con aria furba disse: « Io so come si può provare. È molto semplice. Abbiamo trovato che l'area di questo parallelogrammo è 36 cm quadrati. Ora posso tagliare il parallelogrammo in latta, metterlo su un piatto di una bilancia di precisione, mentre sull'altro piatto posso mettere un rettangolo la cui superficie è di 36 cm quadrati: scommetto che i due piatti si bilanceranno ».

« Sì, può darsi; ma sai dimostrare che questo avverrebbe in generale? »

« Ma certo, rispose, posso ripeterlo, se volete, con vari parallelogrammi ».

Ciò che ha fatto questo ragazzo è caratteristico di molti tipi di ragionamento. A questo punto egli ha in mano il procedimento *cieco*, e *in più*, la prova della pesata. Tutto qui: è soddisfatto. Questo procedimento, la cosiddetta induzione, è in sé una bella cosa, spesso necessaria, fondamentale per certi aspetti nella scienza empirica moderna; ciò nonostante, l'associarla tranquillamente con il procedimento cieco e perciò cattivo, non rappresenta per un vero pensatore una soluzione conclusiva. La scienza moderna, pur essendo basata sull'induzione, non ha piacere di fermarsi all'induzione. Essa procede alla ricerca di una comprensione migliore di quella fornita dalla sola induzione. (Si veda, ad esempio, come si svolse la scoperta del Mendeleev).³ L'induzione, strumento importante se usato al po-

³ Nota dei curatori. Nei primi anni del secolo diciannovesimo il chimico inglese William Prout notò che i pesi atomici degli elementi chimici erano approssimativamente multipli del peso dell'atomo di idrogeno, ed ebbe il sospetto che l'idrogeno fosse la *materia prima*. In base a questa ipotesi, de Chancourtois proclamò nel 1862 che le proprietà degli elementi chimici erano governate dal numero. Nel 1871 il Mendeleev pubblicò la sua famosa classificazione periodica degli elementi chimici: una tavola in cui tutti gli elementi erano disposti in otto file verticali e sette file orizzontali. Questo lo mise in grado di dimostrare che negli elementi chimici mutavano le proprietà, specialmente la valenza, a seconda del cambiamento di peso atomico. A Mendeleev sembrò che il peso atomico costituisse la caratteristica fondamentale, essenziale degli elementi. Questo venne confermato dal fatto che egli fu in grado di predire la scoperta di elementi allora sconosciuti, necessari per colmare i vuoti della tavola, attraverso considerazioni basate sulla periodicità delle proprietà e sul regolare aumento del peso atomico degli elementi chimici.

Sebbene Mendeleev presentasse la sua classificazione come una generalizzazione puramente empirica, essa puntava chiaramente all'unità fondamentale della materia. Nel 1913, in base alle teorie atomiche di Rutherford e Bohr, un giovane scien-

sto giusto, è in sé un punto d'inizio piuttosto che un punto d'arrivo. Ma in questo caso non è giustificata nemmeno come punto di partenza, essendo senza necessità, arbitrariamente chiusa al problema.

13. Per chiarire ulteriormente l'argomento prendiamo in considerazione un altro esempio. L'insegnante dimostra alla classe come ottenere l'area del parallelogrammo per mezzo delle solite linee ausiliarie, spostando il triangolo di sinistra verso destra, dimostrando alla fine che l'area equivale al prodotto della base per l'altezza. In questo esempio io suggerii all'insegnante che venisse usato un parallelogrammo in cui un lato, a , fosse di 2,5 cm, e l'altro lato, b , di 5 cm; l'altezza h venne misurata, ed era di cm 1,5.

In seguito io assegnai altri problemi, stabilendo in ciascun caso i valori dei lati a e b ; l'altezza veniva misurata, e si doveva trovare l'area di ciascun parallelogrammo:

	a	b	altezza (misurata)	area da calcolare
1.	2,5	5	1,5	7,5
2.	2,0	10	1,2	12,0
3.	20,0	1,1/3	16,0	21,1/3
4.	15,0	1,7/8	9,0	16,7/8

Gli scolari si davano da fare per la soluzione dei problemi, incontrando un bel po' di difficoltà con le moltiplicazioni.

D'improvviso un ragazzo alzò la mano. Guardando con una certa aria di superiorità gli altri che non avevano ancora finito, esclamò: « È sciocco stare a fare le moltiplicazioni e misurare l'altezza. Io ho trovato un altro metodo per trovare l'area. È così semplice! L'area è $a+b$ ».

« Hai un'idea del perché l'area sia eguale ad $a+b$? », domandai.

« Lo posso dimostrare, rispose: l'ho verificato in tutti gli esempi. Perché andare dietro a $b \times h$? L'area è uguale ad $a+b$ ».

Allora gli diedi un quinto problema: $a=2,5$; $b=5$; altezza=2. Il ragazzo cominciò i calcoli, sul suo volto si dipinse un'espressione

ziato inglese, Moseley, provò che era il numero degli atomi di idrogeno costituenti l'atomo di un elemento dato, il *numero atomico*, piuttosto che il peso atomico, a spiegare le proprietà chimiche degli elementi; più esattamente il numero dei protoni e, quindi, il numero degli elettroni.

In questo modo una generalizzazione empirica si tramutò finalmente in una teoria deduttiva.

un po' delusa; poi, allegramente: « In questo caso sommando non si ottiene l'area. Mi spiace, sarebbe stato così bello ».

« Davvero? », chiesi.

Questo può servire come esempio di scoperta cieca, di induzione ad occhi chiusi. Direi che nessun matematico di buon senso si azzarda a fare induzioni di così ovvia assurdità. Le farà *soltanto* se l'argomento in esame è talmente oscuro che egli non ha alcuna idea intorno a qualche connessione interna.

Potrei aggiungere che il vero scopo di questo esperimento « insidioso » che, come avete visto, è riuscito, non era semplicemente quello di portare fuori strada. Nelle precedenti visite alla classe, avevo notato davvero il pericolo insito nell'uso superficiale da essi fatto nel metodo induttivo. Il mio scopo era quello di fornire a questi ragazzi (e al loro insegnante) un'esperienza dei rischi propri di questo atteggiamento, tale che rimanesse loro bene impressa.

Si potrebbe dire che l'ipotesi del ragazzo era sbagliata, semplicemente perché non aveva valore universale; o che era una generalizzazione basata su troppo pochi elementi. Ma così facendo non si centra il problema. L'eguaglianza proposta: $\text{area} = a+b$, è cieca rispetto alla questione dell'intima relazione degli elementi, non vede cioè il problema di come questo possa avvenire ragionevolmente anche in *un caso solo*, in quanto non esiste una relazione interna tra l'area e « $a+b$ ».

14. Darò un esempio ancora più semplice. Domandate a uno scolaro:

- 1) 12 = quante volte 3? Risposta: 4
- 2) 56 = quante volte 7? Risposta: 8
- 3) 45 = quante volte 6?

Ponete il caso che lo scolaro risponda al terzo problema: « Sette ». E che se gliene chiedete la ragione, risponda: « Non è chiaro? la quarta cifra è di una unità più grande della terza:

- 1) 12 3 4
- 2) 56 7 8
- 3) 45 6 7 ».

In questo caso il punto essenziale è che lo scolaro ha basato la sua « ipotesi » su di un numero troppo limitato di casi? No. L'ipotesi è in sé priva di senso: la posizione dei numeri non ha nulla a

che fare con la struttura della situazione, è estranea alle sue esigenze, alla separazione per mezzo del segno di eguaglianza, al significato delle posizioni a sinistra, al significato del segno di moltiplicazione a destra. È chiusa a tutti questi caratteri strutturali, che stabiliscono i requisiti della soluzione o dell'ipotesi sensata.

15. Qui seguono alcuni altri esempi di cattivi procedimenti che portano alla risposta giusta. Quello che c'è di sbagliato qui non è solo il fatto che non viene data nessuna prova della necessità dei passaggi del procedimento, ma che nessuno di essi ha una relazione comprensibile con il problema.

Come ottenere l'area di un rettangolo:

I.

$$1) a-b$$

$$2) \frac{1}{a}$$

$$3) \frac{1}{b}$$

4) sottrarre 2) da 3)

5) dividere 1) per il risultato di 4)

$$\text{Area} = \frac{a-b}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

II.

1) per $a+b$ sostituire c

$$2) a^2$$

3) dividere 2) per 1)

4) sottrarlo da a

5) moltiplicarlo per 1)

$$\text{Area} = \left(a - \frac{a^2}{a+b} \right) c$$

$$= \left(a - \frac{a^2}{a+b} \right) (a+b)$$

16. Ho scelto esempi artificiali allo scopo di chiarire l'argomento in questione, ma cose analoghe avvengono anche senza l'intervento dello psicologo.

Un bambino impara a scuola le formule, con i relativi esercizi, per il perimetro, $2(a+b)$ e per l'area, $a \cdot b$ del rettangolo.

Dopo un certo tempo vengono assegnati dei compiti che richiedono di trovare l'area di rettangoli nel corso di problemi più complessi. Gli viene in mente la formula $2(a+b)$, e la usa, sbagliando tutto senza saperlo.

Oppure cerca di richiamare alla mente quale fosse la formula per trovare l'area. Può perfino cercare di ricordarsi la pagina del libro di testo in cui compare la formula, e riuscirci veramente, ma la formula proprio non vuole venirgli in mente. Si sente perso, guarda

il risultato del suo vicino di banco, vede che l'area calcolata è 25: i lati, a e b , sono 10 e $2\frac{1}{2}$, rispettivamente. « Ecco!, dice tra sé. Ora ricordo come si fa: $10 + 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$, per $2 = 25$, $2(a+b)$ ». Sollevato, risolve con impegno i problemi successivi nello stesso modo, sbagliando tutto di nuovo senza saperlo. (Supponiamo che il problema successivo venisse ad avere per caso $a=12$, $b=2,4$. Guardando per sicurezza il risultato ottenuto dal vicino, si sentirebbe di nuovo tranquillizzato). Non gli passa nemmeno per la mente di fermarsi a considerare se la formula in questo caso è ragionevole. All'opposto, se lo scolaro affrontasse veramente il problema, forse sarebbe capace di ricostruire liberamente anche una formula dimenticata.

Ora, l'elemento decisivo di questa situazione è da vedersi solo nel fatto che il ragazzo ha presentato un risultato errato? Per definire chiaramente il problema, pensate ad una situazione immaginaria. Ammettiamo che l'operazione di risolvere il problema venga fatta da una macchina che taglia il rettangolo in tanti quadratini. Voi introducete il rettangolo nella fessura, la macchina fa il suo lavoro, vengono fuori i quadratini e vengono contati da voi o da un apparato addizionale inserito nella macchina. Supponiamo inoltre che questa macchina durante il suo lavoro elimini un certo numero di quadratini, variabile a seconda delle misure del rettangolo e che, d'altro canto, vengano aggiunti sempre quattro quadratini.⁴ Tale macchina può essere costruita facilmente, ed invariabilmente produrrebbe come legge generale il risultato: $2(a+b)$.

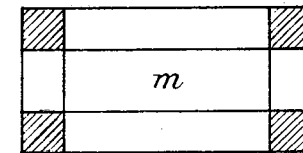


FIG. 15

Chi riflette sente urgente il bisogno di guardare nella macchina per scoprire in base a quale regola salti fuori questo ridicolo risultato. Se soltanto si potesse aprire la macchina e guardarvi dentro! Ma supponiamo che ciò non sia possibile, o addirittura che non vi sia nessuna macchina, e che la stessa cosa accada senza di

⁴ Nella formula per l'area $2(a+b)$, l'area m scompare, mentre compaiono due volte i quattro quadratini tratteggiati (vedi fig. 15).

essa, per miracolo, semplicemente nel corso delle operazioni di tagliare e contare...

Ottereste l'universalità; la vostra formula sarebbe basata su fatti, costante; ma la legge espressa nella formula sarebbe lo stesso assurda, non rispondente al problema, del tutto incomprensibile.

17. Tornando alla nostra questione, in questi brutti esempi mancava la *prova* dimostrativa e si potrebbe pensare che solo questo fosse il punto essenziale. Consideriamo che cosa è necessario affinché un processo di pensiero sia valido, sensato. Le risposte consuete sono:

- che si raggiunga una reale soluzione del problema,
- che questa venga raggiunta attraverso operazioni corrette dal punto di vista logico,
- che si dimostri che il risultato è corretto, universalmente corretto.

È tutto qui? È questa un'espressione adeguata di ciò che dobbiamo intendere per un processo reale, sensato?

Consideriamo un procedimento che abbia tutte queste caratteristiche e tuttavia sia alquanto brutto. Supponiamo che io debba insegnare l'area di un rettangolo a un bambino che non ha alcuna nozione di geometria. Per prima cosa gli viene dimostrato che l'area del quadrato è uguale ad a^2 ... « $a \times a$ ». Egli lo impara e calcola le superfici di alcuni quadrati di misure diverse. Poi gli vien mostrato un rettangolo e gli viene insegnato a calcolarne l'area nel modo seguente:

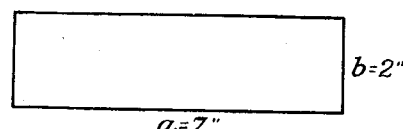


FIG. 16

1. Prima sottrarre b da a	$a-b$	$7-2=5$
2. Elevare al quadrato la rimanenza	$(a-b)^2$	$5^2=25$
3. Elevare al quadrato b e sottrarlo dall'ultimo risultato	$(a-b)^2 - b^2$	$25-4=21$
4. Elevare al quadrato a e sottrarlo dall'ultimo risultato	$(a-b)^2 - b^2 - a^2$	$21-49=-28$
5. Moltiplicarlo per -1 (renderlo positivo)	$a^2 + b^2 - (a-b)^2$	$+28$
6. Dividerlo per 2	ab	14

Questa è l'area del rettangolo: $a \cdot b$, il che può essere dimostrato geometricamente, come indica la figura. La prova comporta la dimostrazione che i due rettangoli sono congruenti, e la sottrazione di b^2 che si viene a sovrapporre. Sebbene sia piuttosto complicata, tuttavia essa ricava la soluzione generale per necessità logica. Il procedimento è meno brutto del precedente; però è sempre brutto.

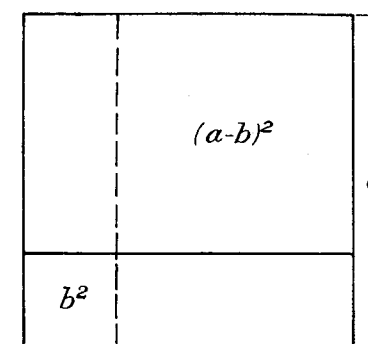


FIG. 17

Alcune reazioni dei bambini: « Che cosa non fanno i grandi! » « Perché non procedere direttamente? Deve essere come per il quadrato: il numero dei *quadrati* della fila di base per il numero delle file ».

18. Ora diamo un'occhiata indietro. Perché questi vari procedimenti sono « brutti »? Qual è il punto decisivo?

1) È forse il fatto che le operazioni non sono svolte in maniera corretta? No, in alcuni esempi lo sono.

2) È forse il fatto che sono privi di valore generale? No, gli esempi che hanno valore generale (cfr. paragrafi 11 e 15) sono brutti anch'essi.

3) È forse il fatto che sono privi di dimostrazione? No: questo non avviene per tutti gli esempi.

Se noi osserviamo il procedimento concreto negli esempi brutti e vediamo come viene affrontato il problema, come i singoli momenti del pensiero sono in relazione con l'intero processo di pensiero, allora la risposta sembra chiara: io voglio risolvere un problema; affronto la situazione del mio problema; voglio vedere in quale modo posso chiarificare l'argomento allo scopo di raggiungere

la soluzione. Cerco di vedere come venga determinata l'area, come sia costruita nella figura; voglio comprendere ciò. Invece viene qual-
cuno e mi dice di fare questo e questo, cioè qualcosa come $\frac{1}{a}$ o $\frac{1}{b}$ o $(a-b)$ o $(a-b)^2$, tutte cose che chiaramente non hanno alcuna relazione interna con il problema in questione, che vanno in un'altra direzione, una direzione estranea al problema. Perché procedere proprio a questo modo? Mi viene detto: « Fa' così, e basta »; e viene poi aggiunto un altro passaggio, la cui direzione è di nuovo incomprensibile. I passaggi cadono dal cielo; il loro contenuto, la loro direzione, l'intero processo non deriva ragionevolmente dai requisiti interni alla situazione, ma appare arbitrario, estraneo al problema di come *la superficie venga costituita strutturalmente dalle piccole unità proprio in questa forma*. Alla fine, in effetti, i vari passaggi portano ad una risposta corretta, o perfino dimostrata. Ma il risultato vero e proprio viene ottenuto in un modo che non permette alcuna penetrazione, alcuna chiarificazione. E questo vale per tutti gli esempi, vi sia o meno la prova.

« Senti un po', potrebbe dire il lettore indignato, non stai forse chiedendo troppo al pensiero umano? » No davvero! fortunatamente vi sono dei processi di pensiero che non avanzano così alla cieca.

19. Il procedimento di pensiero positivo, produttivo, così come risulta dalle reazioni dei bambini, è di carattere totalmente diverso. Il problema dell'area concepita come somma di quadratini di misura unitaria viene affrontato *nella* figura, con riferimento alla *sua forma caratteristica*: si scopre che vi sono file parallele che si adattano l'una all'altra, che sono uguali, in quanto contengono lo stesso numero di quadretti. Dunque il numero di *quadretti in una* di queste file, determinato dalla lunghezza di un lato, viene moltiplicato per il numero di *file*, determinato dalla lunghezza dell'altro lato. In questo caso la cosa essenziale è di vedere la superficie strutturata in accordo con la forma caratteristica della figura. Nessuno dei passaggi implicati procede in una direzione estranea al problema, all'intima natura della situazione presa in esame.

Ed anche lo stesso risultato, $\text{area} = a \cdot b$, dal punto di vista psicologico, non ha lo stesso valore in procedimenti sensati e in quelli privi di senso: « $a \cdot b$ », nel modo in cui viene considerato nel processo sensato, non è semplicemente una « moltiplicazione di due ter

mini », in quanto uno di essi *significa il numero di quadretti in una fila*, l'altro il numero di *file*. I due termini della moltiplicazione hanno un significato strutturale e funzionale diverso, e finché non ci si rende conto di questo, non si può comprendere la formula e nemmeno il significato della moltiplicazione stessa.

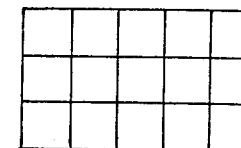


FIG. 18

20. Illustrerò l'ultima affermazione con un esempio. A un bambino viene mostrato un rettangolo diviso in quadratini di misura unitaria. Gli viene detto che il totale, l'area, è uguale ad $a \cdot b$. Gli vengono dati diversi rettangoli di cui egli calcola esattamente le superfici moltiplicando i lati. Gli domando: « Sei sicuro che sia giusto? » E lui risponde: « Certo, me lo ha insegnato lei; ma se vuole, conterò i quadrati ». E comincia a contare gruppi di 5 quadratini, cominciando dalla base, nel modo seguente:

				8				
	3	4	5	1	2	3	4	5
	5	1	2	3	4	5	1	2
5	2	3	4	5	1	2	3	4
	4	5	1	2	3	4	5	1
	1	2	3	4	5	1	2	3

FIG. 19

Quando è arrivato in fondo, si volge verso di me: « Vede? È giusto ».

Si osserverà che qui manca qualcosa di essenziale. Il bambino non ha afferrato il concetto che l'area si costruisce contando le ripetizioni delle file parallele. Non ha fatto uso della fondamentale caratteristica strutturale, che cioè ogni fila ha lo stesso numero di

quadretti. A questo modo non possiede una base per una sensata comprensione strutturale della misura dell'area.

In altri termini, se si dovesse trovare l'area per mezzo del tipo di conto fatto da questo bambino, non sarebbe affatto necessario che la figura fosse un rettangolo. Andrebbe altrettanto bene qualsiasi altra figura costituita da una serie continua di quadratini. Il suo è un procedimento cieco alla struttura della figura nella sua intima relazione con la moltiplicazione.

Tale comprensione, o, piuttosto, mancata comprensione della struttura, occupa un ruolo decisivo anche nel *transfer*. Eccovi un breve esempio: a scopo di esperimento si mostra ad un bambino come trovare l'area di un quadrato. La impara, l'applica in vari casi, e poi viene interrogato circa la superficie di un rettangolo. Non riesce a vedere alcun modo per arrivarci. Gli domando: « Perché non segui lo stesso metodo che hai usato con il quadrato? » Esita e poi risponde: « Non posso farlo... qui i due lati non sono uguali ».

Ma se il problema è veramente capitato nel caso del quadrato, e l'area viene vista come il prodotto del numero di quadratini della fila di base per il numero delle file, il passaggio non presenta queste difficoltà. Il fatto che i due lati del quadrato siano uguali, non reca, in questo caso, nessun disturbo, avendo un'importanza strutturale periferica e nessuna connessione ragionevole con il problema.

Anche il *transfer* potrebbe avvenire ciecamente. In luogo di questa comprensione vi potrebbe essere la semplice credenza cieca che anche l'area del rettangolo si possa ottenere moltiplicando i due lati. Se si vogliono definire entrambi questi casi col termine di « generalizzazione », si deve però tener presente che vi è una differenza fondamentale tra generalizzazione cieca alla struttura, o priva di senso, e generalizzazione ragionevole.

21. Qualcuno obietta: « Tu parli di una comprensione della struttura, delle esigenze interne, intendendo che se nel tuo esempio si colgono i caratteri strutturali, la cosa diventa ragionevole. E nelle situazioni non-euclidee? Ciò che è ragionevole in un sistema, potrebbe essere sbagliato in un altro. Solo finché si presuppone la certezza ingenua e sorpassata della validità unica negli assiomi euclidei, ciò che dici può sembrare ragionevole ».

Si tratta di un'obiezione cieca, che non tocca il problema. La geometria non-euclidea possiede caratteristiche strutturali sue proprie, alle quali si adattano di nuovo altre considerazioni di ragio-

nevolezza in seno alla nuova, più ampia struttura. Introdotto il concetto di curvatura dello spazio, alcune asserzioni della geometria euclidea non hanno più valore, in quanto erano state formulate senza tener conto delle condizioni introdotte dalla curvatura, e vanno bene solo nel caso in cui la curvatura sia zero.

Per fornire un rapido esempio: una figura che consista di quattro linee « rette » e di quattro angoli retti, sulla superficie di una sfera è diversa da un rettangolo piano anche per quanto riguarda l'area; ma anche in questo caso si potrebbe giungere a calcolare la nuova area in maniera ragionevole, comprendendo la struttura interna, o la si potrebbe derivare attraverso un brutto procedimento, analogo a quello dei nostri esempi.

« Perché parli di ragionevolezza in questo contesto? » chiede un logico. « La ragionevolezza non è altro che la vecchia coerenza della logica formale. Qualsiasi teorema, qualsiasi legge — perfino il tuo esempio (pp. 38-39) dell'area del rettangolo uguale a $2(a+b)$ nel mondo artificiale da te descritto — è ridicola o insensata *solo* nel caso che contraddica altre leggi, perché allora diventa incoerente rispetto agli assiomi del suo stesso sistema. Ecco tutto ».

Ma questa argomentazione sposta semplicemente il problema dai teoremi agli assiomi. Se noi prendessimo in considerazione degli assiomi diversi, corrispondenti proprio a tali connessioni strutturalmente inadeguate, allo scopo di ottenere una coerenza formale, avremmo come risultato non soltanto un brutto teorema, ma un intero sistema di assiomi inaccettabile.

Senza dubbio vi sono attualmente alcune tendenze in matematica orientate verso sistemi che impedirebbero una comprensione ragionevole dal punto di vista strutturale. Alcuni sono convinti della necessità di ignorare completamente tale ragionevolezza. Una tendenza analoga è apparsa nello sviluppo della logica, la tendenza a ridurre la logica a un gioco regolato da un complesso di regole combinate arbitrariamente, pezzo per pezzo. Come divisione del lavoro, tale specializzazione è un'iniziativa meritoria, specialmente per quanto riguarda i criteri nei problemi di rigida validità logica. Ma se è intesa veramente a descrivere l'intero processo della logica, essa riduce il pensiero a ben povera cosa, svuotandolo di quei caratteri che occupano un posto importante nei genuini processi produttivi. Comunque si consideri la relazione dei problemi strutturali con la logica formale, in qualsiasi teoria della conoscenza, sia che i problemi strutturali si debbano o non si debbano affrontare in campo

logico, essi costituiscono tuttavia istanze decisive nei processi di pensiero sensibili e genuini.

Lo sviluppo della matematica moderna tende a eliminare, quanto più è possibile, tutti gli aspetti dell'intuizione geometrica. Questo venne fatto con buone ragioni, tenendo presente il problema della validità in un ideale sistema di assiomi in cui i teoremi concreti si ottengono solo applicando agli assiomi operazioni sillogistiche e simili, della logica formale. Ma questo interesse, giustificato sotto tutti gli aspetti possibili, non dovrebbe essere confuso coi problemi della comprensione e dei genuini processi produttivi di pensiero. Non ho incontrato nessun matematico veramente fecondo che non avvertisse questa differenza. Alcuni hanno affermato: « Questo non è un problema logico o matematico. È un problema psicologico o, se preferite, riguarda il lato estetico della nostra materia ». A me sembra che tali asserzioni considerino la logica da un punto di vista troppo limitato. I vari passaggi e le operazioni nei procedimenti brutti non vengono raggiunti in modo logico: il procedimento diretto sembra anche il più logico. In verità la differenza tra i procedimenti arbitrari, alla cieca, e quelli che non lo sono, costituisce il centro stesso della logica.

22. Quelli citati erano esempi davvero brutti, senza senso, e il lettore forse si è domandato perché fossero introdotti. Il senso comune rivela infatti che sono artificiali e insensati: avverte la differenza tra questi modi di procedere e quelli veramente sensati. Ma è necessario mettere a fuoco ciò che è ovvio, per poter vedere il problema chiaramente e trattarlo con rigore scientifico. Certi sviluppi teoretici della logica, della teoria della conoscenza, della psicologia, sono diventati insensibili a questa esigenza oppure hanno tentato di introdurre nuovi criteri i quali non affrontano questo tipo di problemi.

Per di più, molti fatti che siamo portati a dare per scontati come « ovvi » hanno bisogno di una chiarificazione e di un esame scientifico. Ho qui usato termini che appaiono poco familiari, che non sono troppo facili; ci si deve però render conto che la situazione è carica di problemi. E non desta meraviglia che sia così. Mentre le operazioni della logica tradizionale sono state sviluppate ampiamente e a fondo, quelle che studiamo qui sono ancora in gran parte inesplorate. La teoria della *Gestalt* costituisce un tentativo per svilupparle.

23. « Non hai fatto menzione del punto che da solo è sufficiente a differenziare ciò che chiami procedimenti brutti, da quelli ragionevoli », interviene il logico. « Questi esempi non appaiono sensati semplicemente perché impiegano un maggior numero di passaggi, una via più lunga. Ti sei dimenticato della "lex parsimoniae" ».

Tutte le soluzioni precedenti hanno, è vero, più passaggi di quelle sensate corrispondenti. Ma non bisogna esser tratti in inganno da questa caratteristica superficiale; non è il punto principale.

Quei procedimenti « a trabocchetto » usano sempre e di necessità un maggior numero di passaggi? Sono sempre più « difficili » dei procedimenti sensati corrispondenti? No. Nel caso dell'area del rettangolo e del parallelogrammo il modo di procedere sensato è strutturalmente troppo semplice per dar luogo a metodi più brevi, ma in matematica si incontrano casi del genere. Considerate, ad esempio, il seguente problema.

Qual è la somma della serie

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \dots? \quad (a < 1)$$

La risposta consueta è:

- | | |
|--|---|
| 1) scrivere l'equazione | 1. $S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \dots$ |
| 2) moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per a | 2. $aS = a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 \dots$ |
| 3) sottrarre la seconda equazione dalla prima | 3. $S - aS = 1$ |
| 4) risolvere per S | 4. $S = \frac{1}{1-a}$ |

Tutto questo è esatto; viene derivato correttamente, dimostrato, ed è elegante nella sua brevità. Non altrettanto facile è trovare il modo per vedere realmente chiaro nel problema, per ricavare sensatamente la formula: ciò implica passaggi difficili e assai più numerosi. Molti soggetti, pur dovendo riconoscere l'esattezza del procedimento sopra esposto, si sentono tuttavia insoddisfatti, « imbrogliati ». La moltiplicazione per a , insieme con la sottrazione di una serie dall'altra, porta al risultato, ma non alla comprensione di come la serie continua, crescendo, si avvicini a questo valore.⁵ La vera compren-

⁵ Cito un esempio delle risposte di un soggetto di uno dei miei esperimenti: « Che strana cosa... moltiplicare per a ... perché mai? Mi porta più vicino alla meta?... Sottrazione: perché? E ora, in (3), « tutto quello che so della struttura di S »

sione nasce dalla considerazione di quello che avviene con il crescere della serie e ricava la legge di questo aumento, che porta al limite.⁶ Molti non capiscono veramente. A loro basta ottenere il risultato.⁷

Vi sono in matematica dei teoremi per i quali abbiamo per adesso solo soluzioni « estrinseche », in quanto i problemi sono ancora troppo complicati per consentire una comprensione costruttiva. Casi estremi sono le cosiddette prove indirette, negative, in cui si usa il principio dell'esclusione, mostrando come l'assunzione opposta è inaccettabile e conduce a contraddizioni, le quali tuttavia non offrono la possibilità di vedere come si possa giungere costruttivamente alla soluzione positiva. Il famoso matematico Brouwer definì con disprezzo queste prove indirette come un « pensare con la coda ». Non è affar mio stabilire qui se egli avesse ragione nel proporre il rifiuto dei risultati ottenuti esclusivamente in questo modo. Ciò che voglio sottolineare è soltanto che esiste una notevole differenza fra dare soluzioni sensate, comprendere il problema in esame, e ottenere una soluzione attraverso un procedimento esteriore.

III

24. Prima di riferire alcuni processi di pensiero genuini offerti da bambini nel calcolo dell'area del parallelogrammo, fermiamoci un momento per chiederci: quali sono i passaggi di un processo di pensiero veramente sensato, nel risolvere il problema dell'area del rettangolo? Enumeriamo brevemente quelli che ci sembrano essenziali, sulla base di esperienze compiute con bambini e con adulti.

1) Si affronta il problema: qual è l'area del rettangolo? Non lo so: in che modo posso arrivarci?

scomparso! Non stavo cercando forse la somma di quella serie crescente? A questo riguardo non ne so più di prima, so solo che è uguale a $1/1-a$. Ma perché? Come? ».

⁶ Per la soluzione di un problema molto simile che, sebbene richieda un numero considerevolmente maggiore di passaggi, porta in effetti ad una comprensione più diretta, vedere Appendice 6. Applicando al presente problema il metodo strutturale usato nell'Appendice il lettore sarà in grado di vedere se ha compreso veramente la soluzione di questo problema. — M. W.

⁷ A dire la verità, il procedimento consueto contiene per l'esperto una caratteristica sensibile, basata sulla scoperta che la serie rimane identica, ad eccezione del primo numero, se viene « spostata », ad es., se viene moltiplicata per a . Tuttavia, il procedimento rimane esteriore rispetto ad una vera comprensione di come si ottenga la somma.

2) Ho la sensazione che ci debba essere un'intima relazione tra queste due cose: la misura dell'area e la forma del rettangolo. Qual è? Come posso trovarla?

3) L'area può essere vista come la somma dei quadratini di misura unitaria contenuti nella figura.⁸ E la forma? Questa non è una figura *qualsiasi*, un ammasso disordinato di quadratini disposti in maniera indifferente; devo comprendere come sia costruita l'area di questa figura! (Fig. 20).

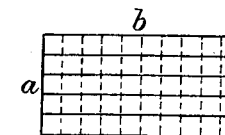


Fig. 20

4) I quadratini non sono forse *organizzati* in questa figura oppure *organizzabili* in maniera tale da portare a una chiara visione strutturale del totale? Oh, sì. La lunghezza della figura è uguale in tutta la sua estensione, e questo ha qualcosa a che vedere con il modo in cui è costruita l'area! Le file diritte parallele di quadratini si sovrappongono verticalmente in uguaglianza reciproca, chiudendo così la figura: da un capo all'altro ho delle file di lunghezza uguale che insieme formano la figura completa.

5) Voglio il totale; *quante file* ci sono? Mi accorgo che la risposta è indicata dall'altezza, il lato a . Quanto è lunga *una fila*? Ovviamente la lunghezza è data da quella della base, b .

6) Devo quindi moltiplicare b per a ! (Questa non è una moltiplicazione di due elementi di grado uguale: è fondamentale, nel passaggio, comprendere la loro caratteristica differenza funzionale).

In questa strutturazione del rettangolo la questione dell'area diventa chiara. La struttura ottenuta viene vista comprensivamente e con evidenza. Si giunge alla soluzione⁹ attraverso la comprensione dell'intima relazione strutturale tra area e forma.

⁸ Qui ometto i processi che incominciano con la variazione della grandezza del rettangolo; l'introdurre i quadratini semplifica il quadro. Questo procedimento qualche volta era scoperto dai bambini; talvolta chi compiva l'esperimento dava il rettangolo come una disposizione di cubetti oppure tracciava le linee fin dall'inizio; in questi casi il bambino aveva pur sempre da compiere passaggi essenziali.

⁹ Nel passaggio 4), si potevano scegliere le file verticali, invece di quelle orizzontali. Ma nel pensiero non si dovrebbero confondere questi due modi. Se il bam-

25. Non intendo affermare che nei processi di pensiero effettivi debbano essere sempre formulati singolarmente i passaggi enumerati! ¹⁰ Essi esercitano per lo più un'azione reciproca in un processo globale; tuttavia penso che siano necessari per un'effettiva comprensione del problema.

Comportano un certo numero di operazioni, di caratteristiche, che non erano state realmente viste e trattate nelle concezioni della logica tradizionale e dell'associazionismo.

1) *Raggruppamento, riorganizzazione, strutturazione*: operazioni, queste, che implicano la divisione in sotto-unità e, nello stesso tempo, la capacità di conservare una visione d'insieme di queste sotto-unità, con chiaro riferimento all'intera figura e nella prospettiva del problema specifico in esame.

Queste operazioni non vengono eseguite in un modo qualsiasi: qui non siamo di fronte a un raggruppamento o ad un'organizzazione qualsiasi, sebbene in effetti siano possibili molti tipi diversi; i passaggi vengono pensati ed eseguiti *tenendo presenti* le qualità d'insieme della figura e allo scopo di ottenere una *chiara struttura* dell'area.

Vi è implicita la comprensione di come le parti (sotto-unità) si *combinino* insieme e *completino* l'area; il rendersi conto dell'*intima relazione* tra la loro combinazione e le qualità d'insieme della figura, quali, ad esempio, il fatto che le linee siano rette, ecc.

2) Il processo ha inizio con il desiderio di afferrare l'intima relazione tra forma e grandezza. Non si tratta di ricercare una relazione qualsiasi che le unisca, ma la natura della loro intrinseca interdipendenza.

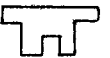
A questo punto alcuni introducono certi cambiamenti, osservando e studiando quali effetti produca un mutamento (ad esempio, nella lunghezza della figura) sulla forma e sulle dimensioni; in questo modo giungono a comprendere qual genere di relazione interna sia implicata.

bino lo fa, la differenza tra « numero di file » e « lunghezza di una fila » è facile che divenga oscura; è perciò consigliabile cominciare con un rettangolo i cui lati siano notevolmente diversi. Il passaggio 5) risulta facilmente chiaro se i lati sono multipli semplici del lato del quadrato scelto come misura; in caso contrario, è implicato un altro passaggio, e cioè la scelta di una unità di misura più piccola. In 5) e 6) entra la moltiplicazione: non si tratta affatto di richiamare semplicemente o di necessità alla mente l'operazione imparata in aritmetica; può essere proprio l'opposto: l'idea di usare la moltiplicazione, o il significato di questa operazione, possono sorgere proprio in questo contesto.

¹⁰ Non consiglierai di far « digerire » in anticipo questi passaggi al bambino. Qualche volta però è utile fare una domanda in una delle direzioni indicate.

3) Giocano qui un ruolo importante relazioni particolarmente rilevanti di questo tipo, che noi chiameremo ρ , sensibili all'intima natura strutturale della situazione data:

File parallele, uguali, diritte che si sovrappongono perfettamente:	forma del rettangolo che implica linee diritte, non, ad esempio una struttura di questo genere
---	--



Numero di file:	lunghezza di un lato
Numero di quadretti in una fila:	lunghezza dell'altro lato
Moltiplicazione:	completamento della struttura.

4) Vi è l'aspetto del significato funzionale delle parti; ad esempio, il significato tipicamente diverso dei due fattori che compaiono nella moltiplicazione: aspetto decisivo per la soluzione produttiva e per una effettiva comprensione della formula.

5) L'intero processo ha luogo secondo *un'unica, coerente direzione di pensiero*. Non si tratta di un aggregato sommativo di operazioni frammentarie unite assieme. Nessun passaggio è compiuto arbitrariamente, senza esser compreso nella sua funzione. Al contrario, ogni passaggio viene effettuato tenendo presente l'intera situazione. Nessuno dei passaggi che compaiono qui ha il carattere di $a-b, \frac{1}{a}$, oppure $(a-b)^2$, come nei nostri brutti esempi.

I tratti essenziali delle operazioni esposte sono radicalmente diversi da quelli delle operazioni della logica tradizionale e dell'associazionismo, le quali invece sono chiuse alla visione d'insieme, alle esigenze strutturali che danno effettivamente luogo alle operazioni.

Spero che il lettore si renda conto dell'aspetto coerente e drammatico, della meravigliosa chiarezza di un tale processo, e della profonda differenza che lo separa da quei processi in cui compaiono operazioni prive di una giustificazione ragionevole.

26. Al confronto, una descrizione di questo stesso processo nei termini della logica tradizionale, oppure della teoria dell'associazione, fa una ben misera figura.

Voglio citare qui un solo punto riguardo a questi due procedimenti. Nella logica classica è fondamentale il carattere di univer-

salità: nei concetti e nei giudizi si cercano qualità comuni a molti o a tutti i casi (nel nostro caso le qualità comuni a molti rettangoli). In maniera analoga, per la teoria dell'associazione è fondamentale il fattore di molti casi, di molte ripetizioni che rivelino qualche connessione costante. Conformemente a queste concezioni, la « bruttezza » dei nostri casi di induzione si considerava dovuta alla loro mancanza di validità universale. Ma il problema di una strutturazione sensata, di un'organizzazione, di una combinazione reciproca delle parti, di un loro completamento, ecc., non è necessariamente legato alla considerazione di molti casi: può essere visto e inteso nel caso singolo, concreto, esaminando in modo accurato la *sua* struttura particolare. Tutto ciò, naturalmente, non dà garanzia di universalità in questioni di fatto; però spesso conduce a una ragionevole comprensione e alla scoperta genuina di tratti essenziali, in contrasto con l'esecuzione di operazioni basate sulla cieca generalizzazione di caratteristiche comuni a molti o a tutti i casi. E può implicare una trasposizione strutturalmente sensata di parti (vedi § 4), che porti a una generalizzazione e ad un'universalità altrettanto sensate. Ma i passaggi non si compiono semplicemente con l'osservazione di molti casi e con l'enumerazione dei fattori che in essi possono risultare comuni.

27. Alcuni teorici, scoprendo l'insufficienza dei concetti consueti, giunsero ad affermare che l'uso di *relazioni* rende produttivo il pensiero. Naturalmente il rendersi conto delle relazioni ha un ruolo importante nel ragionamento, ma l'asserzione in sé non tocca ancora il problema principale, non ne costituisce la soluzione. Le difficoltà che abbiamo incontrato a proposito degli elementi, ricorrono in maniera analoga nell'uso delle relazioni. Rendersi conto della presenza di relazioni *qualsiasi*, anche se esatte, non è decisivo; il fattore decisivo è che le relazioni siano quelle richieste dalla struttura in vista del tutto, che sorgono, vengono concepite e usate come parti in funzione dell'intera struttura. Questo vale egualmente per tutte le operazioni della logica tradizionale e della teoria dell'associazione (generalizzazione, astrazione, ecc.) quando vengono usate in processi genuini di pensiero.

Detto fra parentesi, i procedimenti brutti e che non portano ad alcun risultato, comportano l'uso di relazioni non meno di quanto avvenga per quelli produttivi.

28. In conformità con un'altra concezione moderna, qualcuno potrebbe osservare: « La differenza che tu metti in rilievo tra i casi brutti e quelli validi è semplice, in effetti, e significa soltanto questo: in quelli che tu chiami i casi brutti vengono usati mezzi, passaggi, operazioni dei quali non si sa in anticipo se, alla fine, risulteranno utili. Al contrario, nei procedimenti che tu definisci sensati io questo lo conosco in base all'esperienza precedente. So fin dall'inizio, per esempio, che quando una determinata quantità è divisa in parti uguali, posso usare la tecnica già imparata della moltiplicazione. In questo caso io uso mezzi che sono stati associati ai loro effetti attraverso la ripetizione meccanica avvenuta in precedenza. È l'associazione che provoca il loro richiamo alla mente ».

Non vi è nulla da dire contro la prima parte di questa formulazione, che cioè nei casi brutti vengono usati mezzi che non so poi torneranno utili. Ma la seconda parte è inadeguata: primo, ignora le operazioni di sovrapposizione, raggruppamento, ecc. e i loro tratti caratteristici; in secondo luogo, il conoscere alcune connessioni costanti fra mezzi e fini, e l'usarle, non costituisce in questo caso il centro del problema. « Conoscere » è un termine ambiguo. Conoscere una relazione cieca, come quella che esiste tra l'interruttore e la luce, è molto diverso dal comprendere o scoprire l'intima relazione tra mezzi e fini, la loro congruenza strutturale, nel nostro caso (vedi § 38). Questa differenza è importante in questo contesto, proprio per ciò che riguarda la nascita di processi sensati e produttivi.

E l'affermazione fatta a proposito del ricordo della moltiplicazione, imparata tramite ripetizione meccanica, non si adatta ai nostri casi sensati. Infatti la moltiplicazione e il suo significato vengono capiti, talvolta, fin dall'inizio, attraverso la comprensione delle esigenze strutturali presenti in questi casi particolari. E anche se la tecnica della moltiplicazione è stata imparata in precedenza e ora viene ricordata, la cosa essenziale è ciò che si sa e che si ricorda: alcune operazioni apprese meccanicamente e applicate alla cieca, oppure quell'operazione che è strutturalmente necessaria, ricordata e usata proprio per quella ragione e non in base a qualche associazione periferica (come il fatto di aver eseguito il giorno prima un gran numero di moltiplicazioni, o l'aver udito la parola « area » unita alla parola « moltiplicazione »).

29. Per la moltiplicazione non si tratta semplicemente di aver imparato delle operazioni in termini di associazioni e di connessioni

tra numeri. Se è sensata, vuol dire che poggia su di una scoperta o una comprensione strutturale, che è necessaria anche nella sua applicazione. È vero purtroppo che molti bambini a cui viene fatta imparare meccanicamente la moltiplicazione, sono capaci di reagire prontamente, ma non hanno idea di come applicarla.¹¹

30. Vi dirò adesso che cosa accade quando proposi il problema dell'area del *parallelogrammo* ad alcuni soggetti, specialmente a bambini, dopo aver loro mostrato brevemente in che modo si ottenga l'area del rettangolo, senza dir loro nulla di più, senza dar loro alcun aiuto e aspettando semplicemente quello che avrebbero detto o fatto. Vi erano adulti di tutti i tipi, studenti le cui reazioni dimostravano che avevano completamente dimenticato questo teorema, e bambini che non avevano neanche mai sentito nominare la geometria; perfino bambini di appena cinque anni.

Vi furono diversi tipi di reazione:

Primo tipo. Nessuna reazione.

Oppure qualcuno dice, « Puh! La matematica! » e mette da parte il problema con un: « Odio la matematica ».

Alcuni soggetti si limitano ad aspettare educatamente il seguito, oppure domandano: « E poi? »

Altri dicono: « Non lo so; è qualcosa che non ho imparato », oppure, « L'ho imparato a scuola ma l'ho dimenticato completamente », e tutto finisce lì. Altri si mostrano risentiti: « Come può

¹¹ Ero solito chiedere a una bambina — c'erano spesso ospiti in casa — « Quanti uomini e quante donne sono seduti a tavola? Quanti ce ne sono in tutto? » Le rivolsi spesso questa domanda, quando aveva sei anni, poi sette, poi otto. A scuola era brava in aritmetica. Se le veniva chiesto di moltiplicare, ad esempio, 6×2 , dava la risposta esatta con una « reazione istantanea ». Ma in questo caso, anche se c'erano quattro uomini seduti da una parte del tavolo e quattro donne sedute dall'altra, o se uomini e donne erano seduti a coppie, cominciava una monotona numerazione: « Uno, due, tre, quattro uomini; una, due, tre, quattro donne ». Fino a quando non ebbe raggiunto l'età di otto anni e mezzo, non le venne in mente di contare gli uomini, ed in seguito dire: « E ci sono altrettante donne », oppure: « Una, due, tre, quattro coppie ». E dire che è una bambina intelligente. Solo non si rendeva conto del valore del raggruppamento rispetto al risultato, abituata com'era a contare uno per uno.

D'altro canto a sei anni, in situazioni più difficili, ma più chiare strutturalmente, le sue prestazioni erano, in confronto, stupefacenti. Le chiesi, come facevo con molti bambini, di contare mentalmente il numero dei lati e degli angoli di un cubo di zucchero, poi quelli di una piramide e di una doppia piramide. Era in grado di trovare la risposta strutturalmente, e di applicarla generalizzandola alla piramide e alla doppia piramide, e perfino a una piramide che aveva 3×7 linee, sebbene non sapesse contare fino a 21, e nemmeno dire il numero.

pensare che io sia capace di farlo? » Al che io replico: « Perché non tentare? »

Secondo tipo. Altri frugano intensamente nella memoria, alcuni perfino affannosamente, per vedere se viene loro in mente qualcosa che li possa aiutare. Cercano a tastoni qualche rimasuglio di nozione che faccia al caso loro.

Alcuni chiedono: « Posso chiederlo al mio fratello maggiore? Lui lo sa certamente ». Oppure, « Posso cercarlo in un libro di geometria? » E questo è certamente un modo come un altro per risolvere i problemi.

Terzo tipo. Alcuni cominciano a fare discorsi. Discutono sul problema, raccontano situazioni analoghe. Oppure lo classificano in qualche modo, vi applicano dei termini generali, lo includono in qualche regola, oppure si inoltrano in tentativi senza scopo alcuno.

Quarto tipo. In un certo numero di casi, però, si può osservare l'autentico pensiero che agisce con disegni, osservazioni, riflessioni ad alta voce.

1) « Ho questa figura. Come posso arrivare ad ottenere la misura dell'area? Non vedo alcuna via. L'area proprio in questa forma? »

2) « Bisogna fare qualcosa. Devo cambiare qualche cosa, cambiarla in modo tale che mi porti a vedere chiaramente l'area. Vi è qualche cosa che non va ». Giunti a questo punto certi bambini disegnano la fig. 21. In questi casi aggiungo: « Sarebbe bello poter

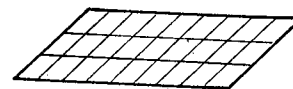


Fig. 21

paragonare la misura dell'area del parallelogrammo con l'area del rettangolo ». Il bambino è dapprima senza risorse, poi ricomincia.

In altri casi qualche bambino osservò: « Devo eliminare le parti che non vanno: questa figura non può essere suddivisa in quadratini ».

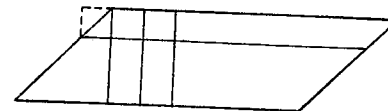


Fig. 22

3) A questo punto un bambino disse improvvisamente: « Potrei avere un regolo pieghevole? » Gliene portai uno. Il bambino ne fece un parallelogrammo, poi lo trasformò in un rettangolo.

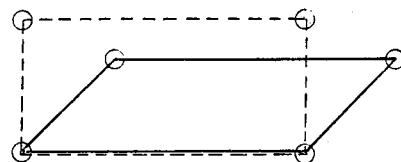


FIG. 23

Mi piacque la sua trovata, e gli chiesi: « Sei sicuro che sia giusto? » « Certo », rispose. Fu soltanto con notevole difficoltà che riuscii a farlo dubitare del suo metodo, usando un disegno appropriato, come il seguente:

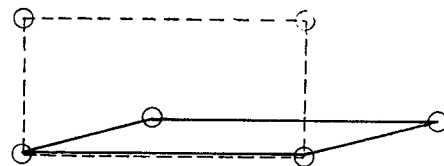


FIG. 24

A questo punto egli reagì immediatamente dicendo: « Il rettangolo è molto più grande: non serve... »

4) Un bambino prese un pezzo di carta e vi ritagliò due parallelogrammi uguali; poi, con aria felice, li mise assieme in questo modo:



FIG. 25

Però non seppe come andare avanti.

In sé questa fu una bella trovata (cfr. la soluzione dell'anello, pag. 58). Posso farvi notare che in un certo numero di casi diedi io stesso al bambino due esemplari della figura. Le reazioni che ottenni furono a volte di questo tipo:

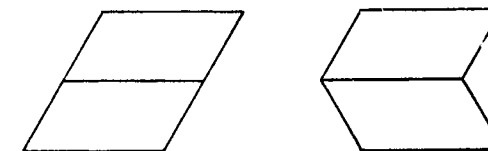


FIG. 26

Alcuni si perdevano in diversi tentativi di questo genere, giungendo perfino a porre una figura sopra l'altro, nello stesso verso o in quello contrario. Quest'aiuto sembra che ottenga il suo effetto solamente sotto certe condizioni. Quali?

31. C'erano però dei casi in cui il pensiero procedeva dritto per la sua via. Alcuni bambini raggiunsero la soluzione in modo genuino, sensato, diretto, con un piccolo aiuto o addirittura senza. A volte una faccia, dopo un'intensa concentrazione, si illuminava al momento critico. È meraviglioso vedere la stupenda trasformazione che avviene nel passaggio dalla condizione di cecità alla comprensione del problema.

Per prima cosa riferirò quello che fece una bambina di cinque anni e mezzo alla quale non detti alcun aiuto per risolvere il problema del parallelogrammo. Dopo averle brevemente insegnato come

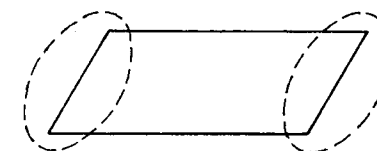


FIG. 27

giungere a trovare l'area del rettangolo, le venne dato il problema del parallelogrammo. Ella disse: « Io questo non lo so fare certo ». Poi, dopo un minuto di silenzio, riprese: « Questo *non va bene qui* », indicando la regione all'estremità sinistra; « e *non va bene qui* », indicando la regione a destra. « Dà noia qui e qui »; ed esitando disse: « Potrei aggiustarlo qui... ma... ». Improvvisamente esclamò: « Posso avere un paio di forbici? Quello che non va bene qui è proprio ciò che serve qui. Va proprio bene ». Prese le forbici, tagliò la figura verticalmente e pose l'estremità destra a sinistra (fig. 28A).

Un altro bambino procedette a tagliare il triangolo in un modo simile (fig. 28B).

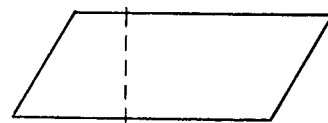


FIG. 28A

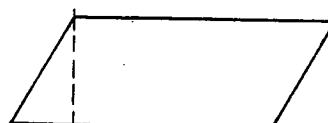


FIG. 28B

In parecchi casi il procedimento si svolse in questo modo:

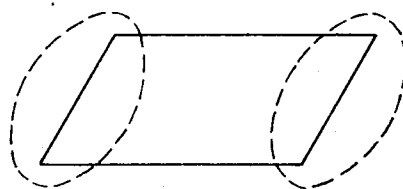


FIG. 29

- | | |
|--------------------|--|
| 1) « Disturba ». | « Ancora disturba ». |
| 2) « Troppo qui ». | « Troppo qui ». |
| 3) _____ | « No! Questa figura ha bisogno
a destra proprio di quello che a |

sinistra è di troppo », e mise a « posto » la parte sinistra. Poi, osservando l'altra parte, cercò di fare la stessa cosa, ma subito passò dal vederlo come « troppo », a vederlo come « buco ».

Vi furono anche altre vie. Una bambina a cui avevo dato il parallelogrammo, uno lungo di carta (anche per i precedenti esempi sembrò preferibile un parallelogrammo lungo), fin dall'inizio osservò: « Tutta la parte di mezzo va bene, ma le estremità... ». Continuò a studiare la forma, con l'attenzione evidentemente rivolta alle estremità; improvvisamente prese la figura di carta e, con un sorriso, ne fece un anello unendo le due estremità. Quando le chiesi il significato di ciò che aveva fatto, rispose tenendo unite con i suoi ditini le due estremità: « Ecco: ora lo posso tagliare in questo senso » e indicò una verticale approssimativamente a metà, « così tutto va a posto ».

C'erano anche altri procedimenti, parzialmente diversi; ma non ne ho mai incontrato nessuno che somigliasse a quello sviluppato dalla matematica moderna, che consiste nel diminuire le parti di disturbo tagliando file orizzontali di altezza più piccola di ogni quan-

tità infinitamente piccola. Questo procedimento comporta delle difficoltà anche per gli adulti. La proposta di tagliare il parallelogrammo in file di altezza sempre minore, rivolta a bambini di circa dodici anni e a persone adulte, diede strani risultati. Dopo che l'intera faccenda era stata spiegata, alcuni erano ancora dubbiosi, e anche quando era stato loro dimostrato che, se le file vengono spostate convenientemente in senso orizzontale, l'intera figura diventa sempre più « simile » al rettangolo, trovavano il procedimento « insincero ». Esso infatti comporta la transizione al concetto di quantità infinitesima e al procedimento di tendere al limite. Storicamente, questo metodo divenne possibile solo dopo un lungo sviluppo orientato in una regione molto più vasta della geometria.

32. Quali sono le operazioni, i passaggi del procedimento?

Abbiamo visto che in processi genuini e positivi, come quelli ora descritti, vi sono ancora fattori e operazioni simili a quelle citate nella discussione del rettangolo: formazione di nuovi gruppi, in relazione all'intera struttura; riorganizzazione, combinazione; scoperta di fattori di relazione interna e di esigenze interiori, che vengono compresi e seguiti. I passaggi e le operazioni erano compiuti chiaramente in vista della figura nel suo insieme e dell'intera situazione. Avevano origine in virtù della loro funzione di parti, non per cieco richiamo alla memoria o per tentativi ciechi; il loro contenuto, la loro direzione e la loro applicazione scaturivano dalle esigenze del problema. Un tale processo non è soltanto una somma di diversi passaggi, o un aggregato di diverse operazioni, ma è una coerente linea di pensiero che si sviluppa dalle lacune¹² della situazione, dai disturbi strutturali e dal desiderio di porre rimedio ad essi, di raddrizzare ciò che non va bene, di giungere alla giusta relazione interna. Non è un processo che muove dai pezzi verso un aggregato, dal basso verso l'alto, ma dall'alto al basso, dalla natura della difficoltà strutturale ai passaggi concreti.

¹² Inizialmente c'è la lacuna concernente la misura dell'area. Vi è il desiderio di colmare questa lacuna, di rendersi conto, nel contesto dell'altra caratterizzazione, di quale sia la grandezza, di come questa qualità della grandezza sia determinata strutturalmente nel contesto. Specialmente quando si tratta di un parallelogramma lungo, il primo passaggio è chiaro: la regione centrale mostra una trasparente possibilità di determinare l'area, come nel rettangolo; le estremità hanno l'aspetto di regioni di difficoltà, che si chiariscono poi nel processo « facendo andar bene anche le estremità », il che si basa sull'ulteriore comprensione di un nuovo tipo di lacuna: una delle due estremità viene vista non come una parte di disturbo che deve venir tagliata, ma come una parte che deve venir completata.

Per quanto possiamo vedere, nei casi positivi non si procede alla cieca per « tentativi ed errori ». E se questo avviene, è un metodo subito abbandonato. In processi di questo tipo non ho mai visto usare operazioni veramente sciocche o inconsulte. Ad esempio, non ho mai visto un caso in cui il triangolo a sinistra venga tagliato e posto dall'altra parte in questa posizione balorda:



FIG. 30A

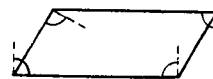


FIG. 30B

Non ho nemmeno incontrato casi in cui le regioni che presentavano difficoltà, una volta individuate, fossero viste in termini di quattro angoli presi singolarmente (fig. 30B).

33. Sarebbe possibile, naturalmente, ottenere le caratteristiche esteriori di questo procedimento e perfino la soluzione, per mezzo di ripetizioni meccaniche senza senso. Cerchiamo di vedere chiaramente e onestamente che cosa implica un simile punto di vista, se viene accettato come indirizzo teoretico generale.

Prendendo in considerazione il caso estremo, sarebbe possibile « insegnare » il procedimento senza nemmeno esporre prima il pro-

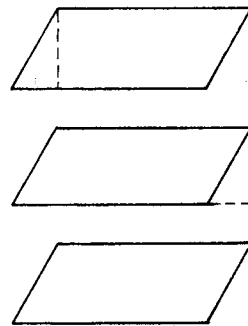


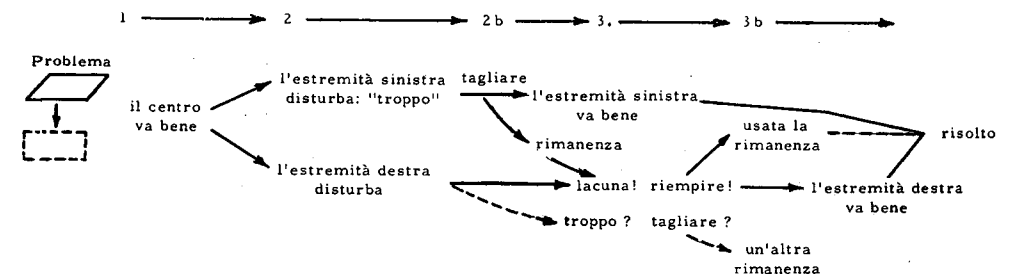
FIG. 31

blema: L'insegnante disegna il diagramma; gli scolari ripetono: « una linea ausiliaria » anche venti volte, costruendo in questo modo una connessione molto robusta rinforzata da molte ripetizioni. Poi continuano allo stesso modo con un'altra linea ausiliaria, ponendola in « connessione » con la figura, e così via fino in fondo, al risultato

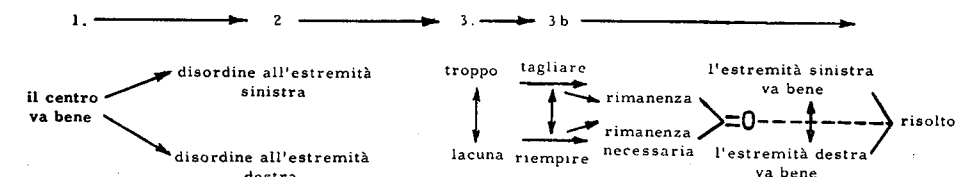
finale. Questo procedimento *sarebbe* per lo meno possibile, secondo la teoria dell'associazione. Io non ho mai fatto di persona esperimenti di questo tipo. Sono però portato a pensare che anche un risultato positivo ottenuto in questo modo, a pezzi incoerenti, differisca grandemente dai casi positivi per quanto riguarda le sue conseguenze successive, come il dimenticarlo o l'applicarlo.

Naturalmente queste osservazioni sono troppo semplificate, per quanto riguarda la situazione teoretica. Per presentare un quadro esauriente bisognerebbe addentrarci nella discussione di tutte le ipotesi ausiliarie elaborate dal metodo associazionistico, il quale tenta di basare tutti i processi sensibili su di un aggregato di connessioni meccaniche e cieche. Ciò che qui è stato detto può servire soltanto per dare una traccia dei fondamentali problemi coinvolti.

34. È stato accennato più sopra che qualche volta lo scolaro concentra l'attenzione prima, per esempio, sull'estremità sinistra del parallelogrammo, ed elimina la difficoltà tagliandola; poi trova la strada giusta trattando l'estremità destra come una lacuna da riempire, com'è richiesto dal disturbo avvertito in quel punto, e dal danno fatto lasciando a sinistra una parte di avanzo.

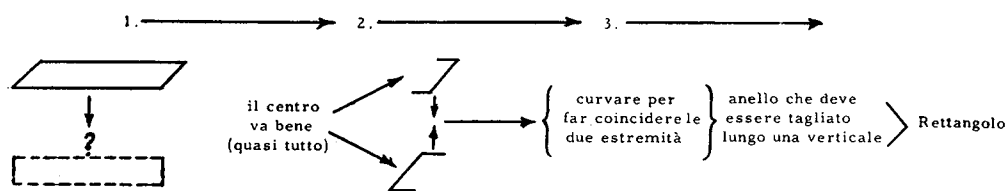


Una simile sequenza non sembra rappresentare adeguatamente quello che avviene in altri casi in cui il soggetto prende in considerazione le due direzioni, la modificazione, cioè, delle due estremità, in un'unica visione complessiva della figura: ciò che a sinistra è di disturbo, di troppo, a destra è visto proprio come ciò che occorre.



Entrambe le direzioni vengono qui viste e trattate come parti che combaciano, che sono reciprocamente necessarie.

Questo si riscontra con chiarezza ancora maggiore nella soluzione dell'anello: le due estremità vengono viste come combacianti, come parti che devono essere unite per far scomparire ogni difficoltà. Fra di loro non vi è alcuna differenza funzionale; vengono viste come aventi lo stesso disturbo, che deve essere eliminato alla stessa maniera, completando una parte con l'altra.



La soluzione ottenuta col tagliare nel mezzo e trasferire è spesso analoga:

- ottenere le estremità giuste, rettangolari, tagliando in qualche punto lungo una perpendicolare,
- liberarsi delle estremità che creano difficoltà facendole combaciare (trasferire).

Se qualcuno ha sperimentato casi di questo genere nella loro vivezza, avverte che i grandi pericoli per lo sviluppo di questi bei processi di pensiero sono principalmente rappresentati dal fatto di ricordare alla cieca qualche nozione imparata e di applicarla ciecamente; da un coscienzioso atteggiamento analitico; dall'incapacità di avere una visione d'insieme della situazione nei suoi aspetti positivi, nella sua struttura e nelle sue esigenze strutturali. A me sembra, sebbene io non abbia dati quantitativi sufficienti su questo punto, che la capacità di produrre processi belli e genuini di questo tipo, spesso diminuisca in modo considerevole quando i bambini, andando a scuola, si abituano alla ripetizione meccanica.

Il diagramma illustra la linea dei vettori nel processo.

Dal punto di vista dinamico, i tratti essenziali di questo processo di pensiero sono, in breve, i seguenti: nell'affrontare il problema, connessi e determinati dalle caratteristiche strutturali, dalla lacuna, dall'incompletezza della situazione, sorgono dei vettori che tendono all'individuazione delle regioni delle difficoltà e alle operazioni di cambiamento. Non vi è nulla di fortuito nella posizione e nella direzione dei vettori. Tutto ciò che viene usato, sia che venga

tratto dalla situazione in esame, sia che venga attinto dalla memoria, entra nel processo in quanto ha una funzione ed è necessario nella struttura; muta la situazione iniziale, manchevole e poco chiara, nella situazione finale chiara e completa: si compie così il passaggio da una cattiva a una buona forma.

La mia descrizione appare molto complicata poiché ho descritto i vari passaggi separatamente e in successione, e anche per il fatto che ho dovuto usare termini che vengono raramente adoperati nei procedimenti tradizionali. Ma è poi davvero così complessa, ad esempio, nel caso dell'anello, in cui l'essenza del procedimento sta semplicemente nel fatto che i lati obliqui di disturbo perdono il loro carattere di linee di confine quando si chiude la figura, e scompaiono nel piano? L'anello ha perso le caratteristiche che creavano difficoltà e viene visto come una striscia normale, orientata orizzontalmente e verticalmente che tagliata secondo una verticale, è un rettangolo. Il fatto che per una formulazione esatta sia necessario l'uso di termini come « funzione del tutto », « cambiamento di funzione », « cambiamento rispetto alle parti elementari », non dovrebbe toglier nulla alle caratteristiche di semplicità e comprensibilità del processo.

35. Qui non stancherò il lettore con una completa analisi strutturale di questi processi, mi limiterò a dare un'idea di alcuni degli elementi formali che li compongono.

Se in un esperimento del genere vengono tracciate le tre linee ausiliarie, queste entrano nel quadro *non* secondo l'idea precisa: « traccio questa linea perpendicolarmente dall'angolo superiore sinistro, un'altra dall'angolo superiore destro, e la terza come prolungamento della linea di base verso destra »: solo più tardi, forse, acquistano un valore, un significato, ma vengono alla luce in base ad esigenze strutturali, secondo il loro ruolo di parti. Nel corso del processo, poi, alcune parti della figura cambiano il loro significato funzionale:

- 1) La linea ausiliaria a sinistra ha origine
 - a) come l'estremità di sinistra del rettangolo rettificata, resa quale deve essere;
 - b) nello stesso tempo compare non come una verticale qualsiasi, ma come parte del triangolo;
 - c) come tale viene trasportata, spostata a destra, divenendo così la giusta estremità di destra del rettangolo.

a) e b) comportano già la doppia funzione¹³ di linea che chiude il triangolo e di linea che rappresenta l'estremità sinistra del rettangolo. In c) la linea viene spostata a destra con l'intero triangolo, fungendo in questo caso da esatta estremità sulla destra del rettangolo.

Anche la seconda perpendicolare non è una qualsiasi linea tracciata a partire da un angolo, ma nasce come l'estremità propria del rettangolo, funzionando da lato del triangolo mancante.

E il prolungamento della linea di base non nasce come un prolungamento qualsiasi della linea, ma come parte del triangolo necessario, come completamento della linea di base del rettangolo.

Le tre linee vengono alla luce non come confini: quello che importa non sono le linee, ma le figure: il parallelogrammo, il rettangolo, il triangolo; le linee compaiono soltanto come parti di esse.

2) Che cosa accade alle linee originali della figura? Alcuni soggetti lo descrivono brillantemente. La figura viene vista dapprima come un parallelogrammo, le cui due linee orizzontali sono in rela-

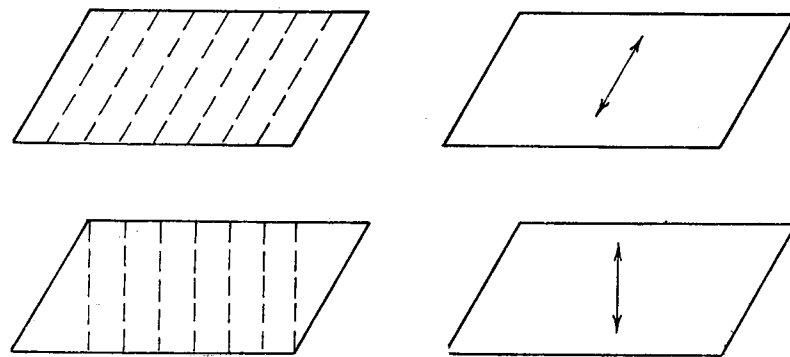


FIG. 32

zione obliqua fra di loro. Ma in un secondo momento le linee orizzontali acquistano una relazione verticale fra di loro. L'estremità sinistra della base non è più coordinata con l'estremità sinistra della linea orizzontale superiore, ma ne è separata e può essere asportata

¹³ WERTHEIMER, M., « Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt », *Psychologische Forschung*, 1923, vol. IV, pagg. 301-350; vedere anche ELLIS, W. D., *op. cit.*, selezione 5; oppure BEARDSLEE, D. C. e WERTHEIMER, M. (Ed.), *Readings in perception*, Princeton, Van Nostrand, 1958, pagg. 115-135. KOPFERMANN, H., « Psychologische Untersuchungen über die Wirkung zweidimensionaler Darstellungen körperlicher Gebilde », *Psychologische Forschung*, 1930, vol. XII, pagg. 293-364.

e usata come base del triangolo. La parte di base a destra sembra incompiuta, mancante della sua giusta estremità.

I due lati obliqui divengono di disturbo: « le estremità della figura non dovrebbero essere così »; sorge un vettore grazie al quale esse non sono più considerate come linee di confine; spostando il triangolo, d'un tratto divengono identiche, non sono più due linee separate, ma un'unica linea, che non rappresenta più una linea di confine: ora infatti non è più strutturalmente essenziale.

Questo avviene anche nel caso della prima soluzione (pag. 58) e della soluzione dell'anello: la linea verticale introdotta viene compresa nel suo significato, nasce con la duplice funzione di diventare la giusta estremità del rettangolo a destra e a sinistra. (Comprendere veramente il significato della linea comporta il dividerla nei due elementi funzionali distinti). Allo stesso tempo, i lati obliqui coincidono, scomparendo così dalla struttura.

Nello studio della percezione si possono incontrare mutamenti di carattere analogo. In questo campo possono essere messe a confronto sia la struttura degli eventi, sia l'intensità delle forze che vi sono coinvolte.



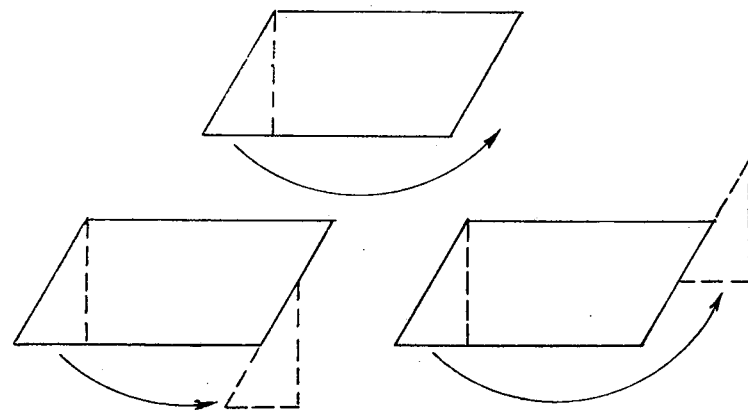
FIG. 33

Eccovi un esempio elementare:¹⁴ le due figure qui sopra sono ritagliate in legno o in cartone, nere su fondo bianco. Osservatele mentre qualcuno le fa muovere lentamente una verso l'altra. Si uniranno? Formeranno una figura chiusa? È una cosa improvvisa il momento in cui si raggiungono — combaciando perfettamente — e i lati spezzati scompaiono in un unico rettangolo omogeneo, senza alcuna parte che disturbi.¹⁵ E che cosa accade negli osservatori se, da un momento all'altro, verso la fine, il lento movimento regolare in avanti muta lievemente direzione? Alcune persone addirittura balzano a correggerlo, per fare in modo che le parti combacino.

¹⁴ Cfr. WERTHEIMER, M., « Zu dem Problem der Unterscheidung von Einzelinhalt und Teil », *Zeitschrift für Psychologie*, 1933, vol. 129, pagg. 353-357. (Vedi Appendice 1. - M.W.)

¹⁵ Confrontare anche i « gruppi quadrati » del cap. IV, pagg. 137-138.

Lo stesso press'a poco, avviene nel nostro problema del parallelogrammo: a un bambino che riflette sul problema viene l'idea di tagliare il triangolo a sinistra, e lo taglia; voi prendete il triangolo, lo spostate a destra: quali reazioni riscontrate nei bambini se lasciate il triangolo in queste posizioni?



Oppure addirittura in questa?

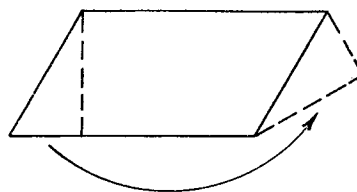


FIG. 34

Alcuni restano sbalorditi, altri ridono; altri ancora intervengono con foga e lo sistemano nella posizione giusta.

È altrettanto interessante osservare il comportamento dei bambini (anche molto piccoli) nelle seguenti situazioni. Vengono presentate quattro figure solide di questo tipo:¹⁶

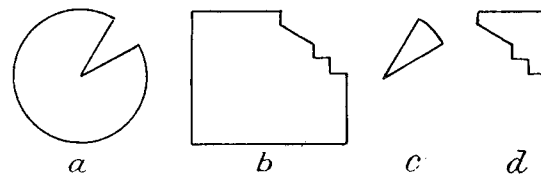


FIG. 35

¹⁶ Cfr. WERTHEIMER, M., « Zum Problem der Schwelle », *Bericht über den VIII Internationalen Kongress für Psychologie*, Groningen, 1926.

I bambini spesso mostrano una forte tendenza ad unirli nel modo giusto, a far combaciare, cioè, c con a , e d con b . Se l'adulto presente cerca di procedere nell'altro modo, e insiste nel voler mettere d assieme con a , e c con b , oppure mette c con a , e d con b in modo sbagliato, i bambini spesso non sono soltanto sorpresi o divertiti, ma intervengono spazientiti, incastrando le parti nelle loro rispettive posizioni esatte.¹⁷

In tutti questi casi assistiamo a mutamenti strutturali, notiamo la tendenza verso strutture migliori, verso il far combaciare i pezzi, facendo scomparire le parti che risultano di disturbo.

Nel corso dei processi produttivi, i cambiamenti di questo genere sono spesso drammatici, molto più di quanto avvenga in questo modesto esempio del parallelogrammo. L'intero processo è spesso, in realtà, una specie di dramma animato da forze potenti: assistiamo a cambiamenti strutturali drammatici nel corso della transizione da una forma incompleta e inadeguata alla comparsa della struttura completa e coerente,¹⁸ nella transizione dalla mancata comprensione strutturale, dallo stato d'animo d'insoddisfazione, all'atto di afferrare e comprendere veramente le esigenze interne della situazione.

36. L'interesse più urgente nel corso dell'indagine sperimentale non è quello di ottenere una risposta quantitativa del genere

¹⁷ È facile rendersi ciechi di fronte ai problemi reali ricorrendo semplicemente alla « familiarità » delle figure complete (cfr. par. 38). La familiarità spesso opera nella stessa direzione di una buona forma, ma il fatto si può decidere veramente solo nei casi in cui la figura strutturalmente buona è meno familiare di quella strutturalmente cattiva. Questo modo di decidere la questione può essere applicato in generale alle strutture. Cfr. KROLIK, W., « Über Erfahrungswirkungen beim Bewegungssehen », *Psychologische Forschung*, 1934, vol. 20, pagg. 47-101; HUBBELL, M. B., « Configurational properties considered 'good' by naive subjects », *American Journal of Psychology* 1940, vol. 53, pagg. 46-49.

¹⁸ Cfr. WERTHEIMER, M., « Zu dem Problem der Unterscheidung von Einzelinhalt und Teil », *Zeitschrift für Psychologie*, 1933, vol. 129, pagg. 353-357. L'apparato sperimentale descritto a pag. 356 di questo lavoro dimostra con grande efficacia i tratti caratteristici di molti processi di pensiero. Dapprima viene mostrata una semplice, chiara figura di punti; compaiono delle parti aggiunte, del tutto ragionevoli, con un vuoto che richiede un completamento appropriato; ma ora di fianco appare un nuovo gruppo, che colpisce l'osservatore in quanto è un assurdo, è senza senso, di disturbo. Quale improvviso sollievo, poi, che cambiamento, quando con alcune ulteriori aggiunte tutte le parti improvvisamente formano un'unità coerente, chiara, con un nuovo orientamento, con una forte riorganizzazione e centramento, che si adattano alle esigenze della struttura. Spesso nei soggetti si osservano segni di una forte tensione, di sorpresa, incertezza e, alla fine, di sollievo improvviso. In seguito, quando i soggetti descrivono la situazione si riferiscono ai sorprendenti cambiamenti di struttura in termini estremamente vivaci. (Vedi Appendice 1. — M. W.).

« Quanti bambini ottengono una soluzione, quanti non vi riescono, a che età? », ecc.; quanto quello di riuscire a capire veramente ciò che avviene nei processi buoni e in quelli cattivi.

Un fisico che studia la cristallizzazione può cercare di scoprire in quanti casi si trovano dei cristalli puri, in quanti altri no — vi sono, infatti, dei cristalli mutilati in cui alcuni angoli risultano dentellati, vi sono dei cristalli impuri, dei cristalli « fratelli siamesi » che sono cresciuti insieme impropriamente; vi sono, infine, dei cristalli modellati artificialmente in forme perfette del tutto estranee alla loro natura. Tutti questi casi sono di notevole interesse per il fisico, non come problemi di statistica, ma per ciò che rivelano dell'intima natura del genuino processo di cristallizzazione.

Così pure è importante scoprire sotto quali condizioni abbia luogo la cristallizzazione pura, quali fattori la favoriscano, quali la mettano in pericolo.

Lo stesso avviene in psicologia.

IV

37. Un modo più facile per venire a capo del problema? Il ruolo di un'esperienza precedente?

Un mio amico intelligente a cui raccontai la soluzione delle forbici (pag. 57), esclamò: « Quel bambino è un genio! » Ma molti psicologi direbbero: « E allora? Evidentemente non si tratta che di esperienza precedente. Perché preoccuparsi di dare spiegazioni complicate e difficili? Non è molto più semplice e più in linea con molti altri processi della psicologia, spiegare quello che questi bambini hanno fatto semplicemente in termini di richiamo alla mente di un'esperienza precedente? Per caso o attraverso qualche meccanismo di associazione, la bambina ha richiamato alla mente le precedenti esperienze con le forbici. Gli altri bambini non sono riusciti a risolvere il problema semplicemente per il fatto che non si ricordavano, o non avevano avuto in precedenza sufficiente esperienza con le forbici. Non erano riusciti ad imparare la connessione, l'associazione che li avrebbe aiutati, o, se l'avevano fatto, non l'avevano richiamato alla mente. Quello che vi è di essenziale in tali processi è il ricordo, in base a connessioni imparate. Le componenti di tale processo sono la memoria e la capacità di richiamare alla mente ».

Senza dubbio vi sono delle situazioni in cui una cosa come l'uso delle forbici entra in gioco per caso o per un suggerimento esterno; vi

sono dei casi, anche nei processi validi, in cui tali possibilità ricavate dalla memoria vengono provate e usate, oppure messe da parte se inservibili. Senza dubbio, accanto all'esperienza presente, qualunque sia il suo significato, vi è bisogno di una grande esperienza precedente perché tali processi siano possibili o probabili.

Ma il punto è questo: è sensato discutere cose di questo genere solamente nelle loro generalità teoretiche? Nel nostro caso, ad esempio, si afferma che il richiamo alla mente delle forbici e delle associazioni a loro connesse è di importanza decisiva.

Supponiamo che un bambino, cercando di risolvere questo problema, non pensi alle forbici; questo dato con tutte le sue associazioni viene a mancare completamente. Perché non afferrare questo toro teoretico per le corna? ¹⁰ Diamo ciò che serve e stiamo a vedere quel che succede. Se è essenziale richiamare alla mente le forbici, le possiamo fornire direttamente senza costringere la memoria a ricordarle, oppure possiamo introdurre stimoli che ne sollecitino il richiamo alla mente.

Pongo le forbici sulla tavola all'inizio dell'esperimento, oppure faccio anche tagliare della carta al bambino; questo è qualche volta di aiuto (ad es. se porto le forbici dopo che il bambino ha riflettuto un po', dopo che con alcune osservazioni ha dimostrato di aver avvertito le esigenze della struttura).

Vi sono altri casi, però, in cui ciò non è di alcun aiuto. Il bambino guarda le forbici, poi guarda di nuovo la figura: nel vedere le due cose è chiaramente preoccupato, ma non accade nulla.

Da parte mia aumento l'« aiuto ». « Perché non prendi le forbici e tagli la figura? » Qualche volta la risposta è uno sguardo assente; ovviamente il bambino non sa cosa voglio.

Qualche volta può darsi che i bambini comincino obbedienti a tagliare la figura in qualche modo:

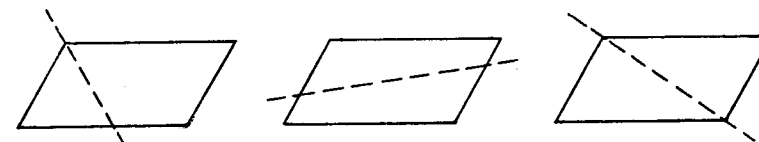


Fig. 36

¹⁰ Cfr. MAIER, N. R. F., « Reasoning in humans: The solution of a problem and its appearance in consciousness », *Journal of Comparative Psychology*, 1931, vol. 12, pagg. 181-194.

Di tanto in tanto accade che un bambino mette poi insieme le due parti in maniera differente, ottenendo un altro parallelogrammo...

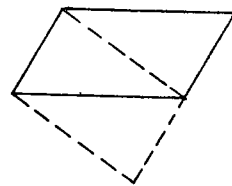


FIG. 37

Quando possiamo dire che consegnare le forbici sia realmente un aiuto? E quando, invece, non è di nessun aiuto? Notiamo che il fatto di fornire le forbici, e il fatto che esse vengano usate comunemente non è, di per sé, un aiuto; può darsi che, come risultato, si abbiano delle azioni del tutto alla cieca e senza senso. Per dirla in breve, sembra effettivamente di aiuto se l'esigenza strutturale è già avvertita, oppure se viene sollecitata dalle forbici;²⁰ difficilmente è di aiuto se avviene senza che ci si renda conto di quanto è richiesto dalla struttura, se cioè il soggetto non vede le forbici nella loro funzione, nel loro ruolo, nel loro contesto in relazione alle esigenze strutturali della situazione, in relazione a ciò che la situazione stessa richiede: in questo caso il soggetto le usa solo come una cosa aggiunta a una somma di dati. Infatti in alcuni dei processi che ebbero esito positivo, vi erano dapprima osservazioni che dimostravano una certa comprensione di quelle esigenze, la quale conduceva in seguito al ricordo oppure al tentativo di ricordare, il che è del tutto diverso dal cieco richiamo alla mente di esperienze precedenti.

Inoltre non solo il richiamo non appare cieco, ma il vero problema è: *che cosa* era stato appreso nell'esperienza precedente che viene usata nei casi positivamente risolti? Forse alcuni speciali movimenti con le forbici generalizzati ciecamente e associati ad alcuni risultati dell'operazione del tagliare? Oppure la relazione interna tra il modo di tagliare ed i suoi risultati? Vi è tra operazione ed effetto una relazione ρ , un chiaro caso di adattamento dell'effetto all'operazione. È questo che rende possibile un'applicazione sensata ad un nuovo caso.

Ecco un'altra spiegazione simile: si tratta di decidere se, in questo caso, il bambino richiami alla mente le sue esperienze con

²⁰ Vedi MAIER, N. R. F., *op. cit.*

giochi di incastro in cui si trattava di unire assieme alcune figure e separarle in tante parti.

Procedimento: prima di dargli il problema, faccio giocare il bambino con un gioco di incastro di forme più o meno simili a quelle del problema, gioco che contiene tra le varietà delle disposizioni una che, sia pure in parte, è identica a quella del problema. Questo procedimento risulta alquanto utile; tuttavia in un certo numero di casi non conduce ad alcuna soluzione.

Non so se il lettore si renda conto dell'infinito numero di modi teoricamente possibili per mettere assieme le cose. Perfino con due triangoli, come quelli della figura, esiste una grande molteplicità di arrangiamenti possibili, dei quali solo alcuni tipi sono compiuti regolarmente dai bambini.

È questo un vasto campo per esperimenti: i fatti osservati non sembrano andare in direzione di alcune connessioni di fatti qualsiasi; procedono subito nella direzione di ottenere una figura buona, completa, facendo combaciare le parti, cercando di ottenere una figura chiusa.

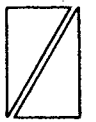


FIG. 38

Anche se si potesse spiegare un procedimento di esito positivo attraverso il lavoro che assieme compiono le connessioni sperimentate, da una parte, e l'idea-meta del rettangolo dall'altra, ci sembra che nei casi da noi presi in considerazione non si tratti tanto dell'esperienza precedente, quanto della natura e dell'adattamento strutturale di tale esperienza.

L'introduzione di aiuti fornisce allo sperimentatore uno strumento tecnico che gli dà la possibilità di ottenere una certa comprensione di quel che succede. Qualche volta è più utile dare altri compiti che possono essere anche più complessi nei singoli dettagli, inconsueti, ma che presentano una struttura più trasparente, più chiara, come ad esempio, alcune delle nostre coppie A-B. Qualche volta in questi casi avviene che il soggetto riesca a vederci chiaro, ritorni al problema originale e ne trovi la soluzione. D'altro canto è possibile che rimanga cieco nonostante l'« aiuto » che, in effetti, gli dà precisamente ciò che può servirgli.²¹

I risultati di tali esperimenti sembrano dimostrare che la cosa essenziale sta *nel* fatto che l'aiuto venga visto nel suo valore funzionale, cioè nella sua posizione, nel suo ruolo e nella sua funzione nell'ambito delle esigenze della situazione.

²¹ Vedi MAIER, N. R. F., *op. cit.*

Ora si può capire perché talvolta si possono dare come aiuto una, due o anche tre linee ausiliarie senza che esse risultino veramente utili.

Un bambino che non le veda nel loro ruolo, nella loro funzione, potrà accoglierle come ulteriori complicazioni, come aggiunte incomprensibili; ne può risultare che la situazione divenga più imbarazzante di prima; infatti non è detto che le tre linee ausiliarie chiariscano necessariamente il problema.

La lezione che il maestro fece all'inizio di questo capitolo, non è forse il caso limite di questo procedimento? Egli diede esplicitamente *tutti* gli elementi necessari; fece esercitare gli allievi, raggiungendo la conoscenza nei casi abitudinari, ma per lo più senza raggiungere la vera comprensione, né la capacità di affrontare situazioni con varianti.

Non è sufficiente cercare di sostituire a processi sensati una sequenza di connessioni imparate meccanicamente, anche se questo metodo ha come risultato la capacità di ripetere, di eseguire nei casi di *routine* ciò che era stato insegnato; sarebbe infatti necessario fare imparare meccanicamente, in più, anche le variazioni di situazione, per poter risolvere i casi *A-B*. Potrebbe rendersi necessario fornire a più riprese qualche meccanismo sussidiario per risolvere i nuovi tipi di casi *A*. Il mostrare che il procedimento intelligente può essere sostituito da un certo numero di associazioni non prova nulla, finché non sia possibile prendere in considerazione e approntare le loro applicazioni alle varianti dei casi *A-B*. Una tale impresa sarebbe simile a quella di voler simulare la traiettoria di una palla lanciata, facendola passare davanti alle estremità aperte di una fila di tubi aperti e paralleli, con pressioni d'aria appropriate: facendo variare la pressione si potrebbero ottenere altre curve, corrispondenti a svariati angoli di lancio e a pesi diversi della palla. Oppure è come mettere al lavoro una macchina calcolatrice per risolvere problemi di matematica, dimenticando o non considerando la somma di accorgimenti che sarebbero necessari perché la macchina risolvesse con esattezza anche alcune specifiche varianti *A*. Essa può risultare molto efficiente per la soluzione di problemi di *routine*, ma non si può adattare a nuove variazioni *A*. Inoltre, la macchina non sa quali operazioni applicare: questo dovete dirglielo voi, impostando il problema, premendo il bottone corrispondente all'addizione, alla sottrazione ecc.

In breve, il ruolo dell'esperienza passata riveste una grande

importanza, ma ciò che conta è *quello* che uno ha acquisito da tale esperienza: se cioè si trova in possesso di connessioni cieche, non capite, oppure ha una visione delle relazioni strutturali interne. Ciò che conta è come e che cosa una persona richiama alla mente e come applica quello che ricorda, se cioè lo fa in un modo chiuso, frazionante, oppure in accordo con le esigenze strutturali della situazione.

In aggiunta alle esperienze strutturali specifiche che noi abbiamo nell'affrontare un problema — esperienze che si riferiscono alla percezione strutturale, a mutamenti nella percezione strutturale, all'osservazione del risultato dei tentativi, ecc. — vi sono molti caratteri generali del nostro mondo che hanno un'enorme influenza sul nostro modo di considerare gli oggetti ed in particolare l'hanno proprio sui passaggi concreti necessari per la soluzione di questo particolare problema di geometria. Sono così ovvi che la maggior parte di noi non ci pensa esplicitamente. Il lettore infatti può rimanere colpito dal fatto di trovare scritto, ad esempio:

che spostando il triangolo da sinistra verso destra, non si verifica alcun cambiamento nella dimensione o nella forma del triangolo; che nel fare ciò non avvengono mutamenti in nessun'altra parte della figura, non vi sono cioè contrazione o espansione di altre parti;

che oggetti come il parallelogrammo possiedono un valore costante, non mutano di dimensioni se si tracciano delle linee internamente ad essi;

che l'eguaglianza provata di alcune linee o angoli separati garantisce l'eguaglianza delle figure intere, in posizioni lontane;

che tagliare la figura in parti e risistemarle diversamente non ne muta l'area;

perfino che le semplici operazioni di pensiero — stabilire l'eguaglianza, ecc. — non portano assolutamente alcun cambiamento al materiale;

e così via.

La maggior parte di queste affermazioni ci appaiono ovvie e banali a tal punto, che hanno l'aspetto di celati assiomi, validi di necessità. Non è vero. Se infatti noi li consideriamo in relazione con quello che avviene nella realtà, non sono per niente « necessari ». Possono esistere dei mondi in cui essi non siano validi. La scienza moderna ha dimostrato poi che anche nel nostro mondo sono, sotto molti aspetti, assunzioni troppo semplicistiche, e che in alcuni campi dell'esperienza quotidiana non sono affatto vere.

Ma lasciando da parte il problema della verità di fatto, il loro carattere è quello di connessioni qualsiasi, di associazioni nel vero senso della parola, simili a quelle che possono unire sillabe senza senso? No. Il loro carattere è quello di semplici aspettative formulate in base al contesto strutturale, che nega le connessioni cieche del tutto arbitrarie. Per spiegare concretamente questo punto dirò che la cosa più elementare strutturalmente, la più ragionevole, purché non entrino in gioco altri fattori, è quella di non aspettarsi cambiamenti come, ad esempio, una strana contrazione, poniamo del 7 per cento, nella parte destra del parallelogrammo, quando la figura viene tagliata a sinistra.

Se ci chiediamo se queste caratteristiche vengano imparate, acquisite in base all'esperienza passata, secondo quanto afferma la concezione associazionistica tradizionale, questo risulta davvero improbabile alla luce degli esperimenti che riguardano le leggi della *forma*. Esse si concentrano in leggi di organizzazione e di struttura ragionevole, sono un prodotto del modo strutturale di lavorare della nostra mente e del nostro cervello, piuttosto che di associazioni alla cieca.²²

A questo modo i citati assiomi nascosti non appaiono affatto come semplici prodotti di un'associazione che può connettere elementi di qualsiasi genere, senza tener conto della loro relazione interna, dei loro tratti strutturali, dei requisiti ragionevoli.

Pure vi sono altri fattori di esperienza, completamente diversi, che svolgono una parte importante nei processi di pensiero di questo genere. Gli atteggiamenti che si sono creati in ciascuno attraverso l'esperienza di situazioni di problema (l'aver incontrato successi o soltanto fallimenti, la disposizione a cercare gli oggettivi requisiti strutturali di una situazione, ad avvertire le sue esigenze; il procedere non con testardaggine, ma come richiede la situazione; l'affrontare il problema liberamente, il procedere con fiducia e con coraggio) sono tutte caratteristiche del comportamento reale, che si sviluppano oppure vengon meno con l'esperienza della vita.

Così, in forma basilare sono coinvolti i problemi della personalità e della struttura della personalità e le caratteristiche strutturali dell'interazione tra l'individuo e il suo campo. In connessione

²² WERTHEIMER, M., « Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt », II, *Psychologische Forschung*, 1923, vol. IV, pagg. 336 e 349; vedi anche ELLIS, W. D., *op. cit.*, selezione 5, e BEARDSLEE, D. C., e WERTHEIMER, M., *op. cit.*, pagg. 115-135.

con quest'ultimo dobbiamo anche comprendere la struttura della situazione sociale, l'atmosfera sociale in cui uno si trova, la « filosofia della vita » che si manifesta nel comportamento del bambino o della persona riguardo a ciò che lo circonda: l'atteggiamento verso oggetti e situazioni-problema dipende soprattutto da questi fattori. Così anche l'atmosfera sociale in una classe è qualche volta d'importanza considerevole per quanto riguarda lo sviluppo del pensiero genuino. Per la soluzione di questo genere di problemi è più utile qualche volta creare l'atmosfera adatta che non imporre al soggetto certe operazioni o la ripetizione meccanica.

Poiché il nostro interesse era rivolto a chiarire alcuni tratti fondamentali, abbiamo limitato lo scopo della nostra discussione, e siamo stati in grado di farlo in quanto avevamo a che fare con una sottounità relativamente chiusa. Se noi, però, vogliamo veramente capire in che modo si possa ottenere (o no) la prestazione, bisogna affrontare un campo molto più vasto. Il problema allora riguarda l'organizzazione dell'intero campo di cui l'attuale fatto avvenuto è soltanto una parte;²³ questo campo è quello personale, sociale, storico. Per quanto riguarda quest'ultimo, la nostra generazione si regge sulle spalle dei pensatori che ci hanno preceduto nel corso di complessi sviluppi storici. Questi sono compiti vasti e mi rammarico di non poterli trattare esplicitamente qui. Penso che queste problematiche, nel loro insieme, comportino problemi di struttura non meno evidenti di quelli che compaiono nei nostri semplici esempi. Sebbene qualcosa sia stato fatto in questa direzione, sarebbe necessario un lavoro assai più approfondito.

Vi sono ancora degli psicologi che, non avendone comprese le basi, pensano che la teoria della *forma* tenda a *sottovalutare* il ruolo della passata esperienza. La teoria della *forma* cerca di fare una distinzione tra aggregati-somma, da una parte, e « forme », strutture, dall'altra, sia nelle sotto-unità che nel campo totale, e cerca di elaborare strumenti scientifici appropriati per investigare quest'ultimo.

²³ Cfr. WERTHEIMER, M., « Über das Denken der Naturvölker, Zahlen und Zahlgebilde », *Zeitschrift für Psychologie*, 1912, vol. 60, pagg. 321-378; ristampato in WERTHEIMER, *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie* (Erlangen: Philosophische Akademie, 1925); vedere anche ELLIS, W. D., *op. cit.* selezione 22; SCHULTE, H., « Versuch einer Theorie der paranoischen Eigenbeziehung und Wahnbildung », *Psychologische Forschung*, 1924, vol. 5, pagg. 1-23; LEWIN, K., *A dynamic theory of personality* (New York: MacGraw-Hill, 1935); traduzione italiana: *Teoria dinamica della personalità*, Editrice Universitaria, Firenze 1964. LEVY, E., « Some aspects of the schizophrenic formal disturbance of thought », *Psychiatry* 1943, vol. 6, pagg. 55-69.

Non ammette che si applichi dogmaticamente a tutti i casi possibili ciò che è valido soltanto per aggregati frammentari. Si tratta di stabilire se una visione in termini staccati, attraverso connessioni alla cieca, sia adeguata o meno per interpretare i processi effettivi di pensiero, come pure il ruolo dell'esperienza passata. L'esperienza passata deve venir considerata attentamente, ma è in sé ambigua: finché viene intesa in termini ciechi e staccati non sarà mai la chiave magica che risolve ogni problema.

38. Torniamo ora alla domanda che avevamo lasciato senza risposta alla fine della parte I, § 10; il problema, cioè, delle risposte A-B. La nostra discussione nei paragrafi precedenti indica una risposta diretta.

L'insegnante ha mostrato il procedimento: ha insegnato alla classe a tracciare le tre linee ausiliarie (pag. 22). Se gli scolari hanno veramente afferrato il problema, per loro le tre linee non sono solo « questa linea, quella e quell'altra » oppure, come ha detto l'insegnante, « una linea verticale tracciata dall'angolo superiore sinistro, un'altra da quello destro ed il prolungamento della linea di base dall'angolo inferiore destro ». Queste linee non sono una somma di elementi, connessi alla cieca con la soluzione. Se questo fosse stato ciò che gli scolari avevano ricevuto dalla lezione, si sarebbero persi nei compiti A-B; non avrebbero avuto cioè nessuna base per procedere sensatamente alla soluzione dei nuovi problemi.

Ma se hanno afferrato il problema (ed afferrato vuol dir questo) allora vedono le linee *nel loro ruolo e nella loro funzione strutturale*, nel loro significato in seno al logico contesto. Essi vedono come queste linee, proprio queste in questa situazione, determinano la soluzione per la *relazione interna* (la relazione strutturale ρ) tra queste operazioni e il raggiungimento del risultato finale. Le operazioni vengono viste « dall'alto », dall'angolo di visuale più opportuno per la struttura interna dell'intero procedimento, in quanto funzionano in seno al contesto e soddisfano le sue esigenze. Questo sì allora fornisce la base per trattare sensatamente i problemi A-B.

Due delle cose citate qui assumono un'importanza decisiva: il significato strutturale delle parti e il carattere che esse possiedono di relazione interna con il raggiungimento reale, trasparente del risultato. La prima è già stata chiarita in molti dei suoi aspetti; il carattere principale della seconda è una relazione ρ tra le operazioni e il raggiungimento del risultato.

Ad un primo esame il nostro problema può essere visto in termini del significato di ciò che è stato appreso dalla lezione ricevuta per quanto riguarda il *transfer* strutturale in situazioni mutate. Supponete che si parli del fatto di tracciare le linee come di « mezzi appresi per raggiungere il fine ». Nella figura usata per l'insegnamento abbiamo la situazione s_1 , i mezzi m_1 (tracciare le tre linee) che portano al risultato, r . Viene appreso questo:

$$s_1, m_1, r.$$

Che cosa è dato come base, come aiuto, per trovare l'appropriato m in una situazione s_2 , oppure l'appropriato m_2 in una situazione s_2 , ecc.? Che cosa è stato offerto per favorire il *transfer* strutturale di m in situazioni mutate?

Naturalmente dobbiamo discriminare m_1 ; per quanto oggettivamente sia sempre lo stesso, può tuttavia funzionare in maniere diverse: se le tre operazioni sono state imparate solo come « somma », senza afferrare o mettere a fuoco la relazione strutturale interna tra proprio questo tipo di m in questa situazione, e il raggiungimento del risultato, allora abbiamo un complesso di operazioni che può venire ripetuto, può venire applicato correttamente a varianti tipo in una specie di vaga trasposizione strutturale, oppure seguendo alla cieca il parlare astratto dell'insegnante secondo il quale la lunghezza delle linee è variabile. Il problema può venir risolto finché le varianti in s permettono l'applicazione di proprio quelle linee. Ma se esse non si adattano alla nuova situazione, allora viene a mancare, in quello che è stato imparato, una base sensata per trattarla. In altre parole, se il significato delle tre operazioni viene veduto solo in ciò che l'insegnante dice (due linee verticali dagli angoli superiori, prolungamento della linea di base verso destra), allora la lunghezza delle linee e la loro distanza sono variabili e adattabili ad una forma di routine s_2 ; ma per situazioni in cui questi tre aiuti generali non siano applicabili (per situazioni che richiedano il loro mutamento) non viene data nessuna base.

Al contrario, se il procedimento viene compreso strutturalmente, la stessa soluzione viene ad essere impostata in modo radicalmente diverso, e il *transfer* strutturale che ne risulta è qualche cosa di fondamentalmente diverso. Se il centro del procedimento sta nell'afferrare « l'insieme » (cioè: liberarsi di una parte che disturba nelle figure facendo uno spostamento di compensazione) allora anche la nuova situazione può venir vista in termini di una ricerca del di-

sturbo, della lacuna e di quello che in questo nuovo caso è necessario per venirne a capo. In maniera analoga il numero, la lunghezza, la posizione delle linee ausiliarie sono variabili e possono mutare seguendo le caratteristiche della nuova situazione.²⁴

Come nei processi genuini (pagg. 57-59) i passaggi erano venuti fuori in base a difficoltà strutturali, a esigenze di struttura, qui le risposte a queste situazioni mutate avvengono in maniera sensata, con l'aiuto di quello che è stato compreso nella situazione di apprendimento.

Vi sono dei casi caratteristici in cui un soggetto nella situazione di apprendimento non ha realmente capito. Egli riesce in variazioni tipo, applicando ciò che l'insegnante ha dimostrato, ma di fronte a nuovi compiti è perduto. Spontaneamente torna sulla lezione, ci riflette sopra, poi improvvisamente esclama: « Ho capito! » ed avendo compreso strutturalmente s_1 , m_1 , r , affronta questo nuovo compito e lo risolve facilmente. Alcuni soggetti spesso descrivono con termini estremamente vivaci quello che è loro successo nella transizione dal copiare quanto l'insegnante aveva insegnato, al « vederci chiaro »: come l'atto di tracciare le tre linee dell'esempio fatto dall'insegnante, d'un tratto era diventato chiaro, trasparente, pieno di significato, per il fatto di avere compreso la struttura interna, le esigenze interne del processo. « E poi è stato facile risolvere i nuovi problemi », concludono.

In breve, la nostra formula è questa: in vere reazioni *A* il comportamento è determinato dalle esigenze della situazione data; nelle reazioni *B* viene determinato da alcuni dettagli esteriori. Nelle reazioni *A* il soggetto opera sulle qualità caratteristiche della nuova situazione, poiché ha compreso la situazione della lezione nel suo intimo senso.

Il problema della trasponibilità è di una certa importanza e, sebbene io creda che il lettore che ci ha seguito sia in grado di vederne il punto principale, debbo aggiungere che il problema non è affatto risolto solamente per aver espresso la formula generale. Per lo scienziato sorge un buon numero di problemi: è questo un va-

²⁴ Ad esempio, in alcuni casi (vedi esempio pag. 57) è facile che m_2 diventi due linee invece che tre. Per il caso a pag. 24 si cerca una posizione diversa che permetta il chiaro scambio delle parti di disturbo. Nel caso a pagg. 25-26 viene data una traccia affinché vengano cercate parti interscambiabili, da cui potrebbe sorgere l'idea di dividere a metà la linea inclinata.

sto campo in cui il ricercatore sperimentale è in cerca di chiarificazioni, cioè delle condizioni e delle leggi che governano l'estensione e il carattere di variabilità che risultano da situazioni di apprendimento diverse. Per capire il problema è necessario studiarlo *in contrasto* con casi in cui l'apprendimento non dà alcun aiuto materiale per risolvere sensatamente situazioni mutate, in cui anche il genio più grande non potrebbe trovare alcuna base per fare una trasposizione sensata della ben nota ed usata situazione di apprendimento per « ripetizione meccanica ».

D'altra parte c'è la possibilità che il soggetto afferri la struttura interna della situazione che in seguito lo aiuterà quando avrà a che fare con varianti del problema originale. Prendiamo in considerazione un caso del tutto terra terra di s_1 , m_1 , r in cui non venga data una tale possibilità. Supponete che, invece di disegnare le tre linee che determinano la trasformazione del parallelogrammo in un rettangolo di uguali dimensioni, ad un soggetto venga mostrato un parallelogrammo su di uno schermo; inoltre supponete che vi siano diversi bottoni e che il soggetto impari che premendo un bottone rosso, uno blu e uno verde, il parallelogrammo scompare e viene fuori una cioccolata, oppure sullo schermo appare un rettangolo. Può impararlo, ma se in seguito gli date un'altra figura, del tipo *A* o *B*, naturalmente sarà imbarazzato. Può darsi che cerchi di premere gli stessi bottoni, ma senza risultato alcuno. Può cercare di premere altri bottoni, in tentativi ed errori alla cieca, e per combinazione può anche darsi che trovi quelli giusti, ma di nuovo non saprà che fare quando gli verrà presentata una nuova figura, poiché non vi è la possibilità di scoprire una sensata relazione interna tra s_1 , m_1 e r . Le connessioni sono arbitrarie o nascoste, e non è possibile scoprire una base per risolvere sensatamente la situazione quando sia variata.

Molti teorici non vedono il problema, la differenza tra questi casi e quelli che vengono risolti sensatamente. Per evitare il problema hanno una risposta facile già pronta; essi notano, ed è vero, che nel primo caso, a differenza del secondo, viene escluso ogni aiuto da parte dell'esperienza precedente e concludono (ma la loro conclusione è cieca) che la differenza nelle risposte di primo tipo è spiegata semplicemente dal lavoro di associazioni precedenti, tutte fondamentalmente della stessa natura dell'apprendimento meccanico. Per loro l'imparare sensatamente e l'applicare non sono null'altro che il risultato di una somma di associazioni precedenti. Spero che il lettore riesca a vedere, dopo tutte le nostre discussioni, che questo

vorrebbe dire liquidare il problema in maniera troppo semplicistica: anche se tutti i fattori presenti fossero dovuti all'esperienza precedente, il nostro problema rimarrebbe. La domanda cruciale non è *se* l'esperienza passata rivesta un ruolo in queste situazioni, ma *quale tipo* di esperienza passata: se siano le connessioni cieche oppure il fatto di cogliere la struttura con una possibilità di intelligente trasposizione; inoltre *come* entrino in gioco importanti acquisizioni dovute all'esperienza precedente, se per richiamo esterno o sulla base di esigenze strutturali di sostanziale adeguatezza funzionale. Il ricorrere all'esperienza precedente non risolve dunque il problema; al contrario, lo stesso problema si ripete per la passata esperienza.

Lo studio dell'uso di quello che ciascuno ha acquisito con l'esperienza precedente è certo di grande interesse; ma per un primo accostamento al nostro problema non è di importanza decisiva se il materiale usato abbia origine dall'esperienza presente o da quella precedente; quello che veramente importa è la sua natura, se cioè una struttura ragionevole venga afferrata e come venga introdotta. Anche se ogni cosa, lo stesso atto di afferrare, fosse dovuto soprattutto alla ripetizione di esperienze precedenti (una speranza che alcuni psicologi nutrono, ma che io considero fuorviante, o ad ogni modo non provata) oppure se dovessimo applicare il concetto di ripetizione meccanica anche alle strutture ragionevoli, sarebbe anche in questo caso importante affrontare e studiare la differenza descritta, in quanto è decisiva per la possibilità che ci siano processi ragionevoli e organizzati strutturalmente. Nel linguaggio comune « aver acquisito esperienza » significa per lo più qualcosa di molto diverso dall'accumulo di connessioni esterne meccanicamente apprese, come quelle del nostro ultimo esempio: si tratta di acquisizioni più sensate, di processi più intelligenti.

Possiamo riassumere nel modo seguente i problemi A-B che riguardano il parallelogrammo: il punto decisivo per il ruolo che gioca un dato s_1 , m_1 , r nell'affrontare situazioni nuove, è *ciò che* viene imparato nell'esempio insegnato e in altre esperienze precedenti. Il vedere se il soggetto è capace o no di trattare le situazioni A-B decide se una tale esperienza ha stabilito connessioni alla cieca oppure una penetrazione della struttura del problema. Potrei aggiungere a questo che il ruolo dei particolari in s_1 , m_1 , r può essere di maggiore o di minore importanza; si raggiunge il caso estremo quando l'acquisizione in vista di nuovi compiti è soprattutto costituita dalla piacevole esperienza di essere in grado di progredire verso la

soluzione andando alla ricerca delle esigenze della *situazione in esame*, e cercando di soddisfarle direttamente.

39. Se in tale processo si cercano le operazioni della logica tradizionale, se ne possono trovare in gran numero; si può perfino arrivare a descrivere il processo tramite una serie di proposizioni. L'aggregato di queste proposizioni, però, non rappresenta quello che è veramente avvenuto nel corso del processo: molte cose sono svanite, i caratteri di dinamicità, di vitalità, sono scomparsi.

La logica tradizionale non si interessa troppo al processo di *trovare* una soluzione. Si interessa piuttosto del problema della correttezza di ogni passaggio della prova. Qua e là nella storia della logica tradizionale possiamo trovare qualche accenno circa i procedimenti atti a trovare la soluzione. Questi caratteristici tentativi sono stati della seguente natura: « Cercate qualsiasi proposizione generale che voi conoscete, il cui contenuto abbia un riferimento con qualcuno degli elementi in questione; raccogliete queste proposizioni; fra di esse cercate delle coppie che, contenendo un concetto comune (termine centrale), permettano la formulazione di un sillogismo », e così via. (Cfr. l'esempio nel capitolo III, pag. 113, che, per quanto sciocco, si accorda bene con un procedimento di questo genere).

Ritorniamo sul problema della prova e vedremo facilmente che anche la prova sensata comporta dei fattori di tipo strutturale. Ma per il momento esaminiamo alcuni aspetti caratteristici dell'atteggiamento della logica tradizionale, prendendo in esame la seguente considerazione di un logico: « Tutto il problema si risolve con l'uso della proprietà commutativa, $a + b = b + a$, proprio come $2 + 5$ è uguale a $5 + 2$; entrambi infatti danno come risultato 7 ». (Un empirista lo avrebbe formulato in un modo molto simile).

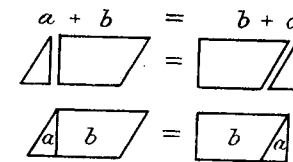


FIG. 39

Letto, pensaci un po' da solo; paragona questa affermazione, conforme allo spirito della logica tradizionale, con un processo di scoperta genuino. Può darsi che tu sia d'accordo e può darsi di no.

Se vedi delle differenze, sono esse senza importanza, marginali? Oppure coinvolgono fattori che sono decisivi proprio per questo problema di pensiero produttivo? Se sei un logico, abituato ai metodi della logica tradizionale, molto convinto delle tue definizioni di logica e di pensiero, forse reagirai violentemente contro alcune osservazioni che seguono. Non servirti, per favore, delle solite scappatoie e non accantonare il problema; cerca di render giustizia ai punti che sto per esporre. Non giudicare male la mia intenzione che non è assolutamente quella di attaccare la correttezza della logica tradizionale: è un invito a comprendere alcuni problemi e a vedere quello che insegna la logica tradizionale nella sua giusta luce.

Il principio $a+b=b+a$ è in certo qual modo implicato nel processo di trovare l'area del parallelogrammo, ma in un modo del tutto diverso dal significato che ha nella logica tradizionale, ed è proprio questa differenza che appare essenziale al fine di rendere possibile il genuino processo produttivo.

I) Prima di tutto preciseremo che l' a e il b della fig. 39 non compaiono fin dall'inizio. Questa divisione del parallelogrammo deve essere raggiunta nel corso del processo di soluzione del problema! Ed è anche di grande importanza il fatto che venga trovato, creato, proprio questo triangolo a , proprio questo tipo di divisione, mentre per la formula ciò non costituisce un problema: a e b sono lì, belli e pronti fin dall'inizio.

II) Un altro punto: mentre in $a+b=b+a$, si suppone che a rimanga invariato nel cambiamento di posizione, nel pensare effettivo circa l'area del parallelogrammo, il triangolo a muta di significato con lo spostamento. L' a a sinistra dell'equazione viene trovato, creato, nel desiderio di eliminare la parte che disturba, mentre l' a a destra è la parte necessaria per riempire la lacuna. Abbiamo un'equazione solo nel senso di semplice eguaglianza di dimensione: questa eguaglianza è importante, ma lo spostamento da sinistra a destra è il passaggio da una cosa a un'altra molto diversa: $a+b$ per quanto riguarda la forma non è lo stesso che $b+a$, e nemmeno lo stesso (cosa questa essenziale) per il processo in sé.

Anche se facciamo astrazione dal processo reale, la formula $a+b=b+a$, presa nel suo significato esatto, non è equivalente all'equazione espressa nel diagramma (vedi diagramma seguente). Sarebbe veramente adeguato solo se le due parti a e b non avessero nulla a che fare l'una con l'altra, fossero, cioè, due pezzi qualunque

la cui posizione reciproca non avesse alcuna importanza. Ma la forma è importante, altrimenti non avremmo un parallelogrammo e per la stessa ragione neppure un rettangolo.

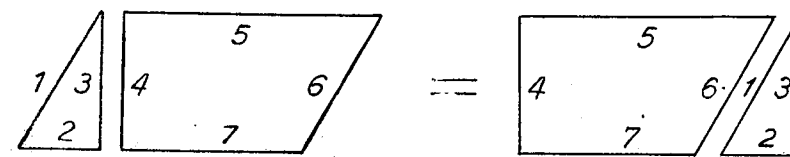


FIG. 40

Un esame delle parti della figura mostra chiaramente che vi sono differenze notevoli tra il lato destro e quello sinistro della figura. Questo vale non solo per i tratti d'insieme (il parallelogrammo in contrapposizione al rettangolo) ma anche per le singole parti delle linee. Se il lettore studierà e metterà a paragone il significato delle linee, sarà forse sorpreso nel rendersi conto di quanto profondamente diversa sia la situazione per quanto si riferisce ad esse a destra e a sinistra. Citerò solo alcuni punti. Le linee 1 e 6 a sinistra sono confini; a destra divengono identiche, non sono più due linee distinte in quanto scompaiono dalla vista nel completamento del rettangolo. A sinistra 1, 5, 6, 2-7 formano la figura, con l'aggiunta delle linee introdotte 3-4, mentre a destra 4, 5, 3, 7-2 formano la figura e 6-1 è una linea che scompare dal quadro. L'equazione ignora che tali linee insieme formano il contorno che, dopo tutto, è importante per la figura la cui misura deve venir calcolata.

Lo stesso avviene per gli angoli: il loro significato, la loro funzione nella figura è, fondamentalmente, differente dalle due parti: angoli che rivestono un ruolo importante a sinistra, scompaiono a destra, ecc.

Se si analizzano con esattezza tutti i fattori di questo genere, si giunge ad un numero notevolmente elevato di differenze strutturali. Viste dal basso, in maniera frazionante, tali differenze strutturali apparirebbero estremamente complesse. Sarebbe davvero molto difficile, e con tutta probabilità impossibile, ottenere una chiara visione del processo se si dovesse iniziare con la semplice somma di caratteristiche così dettagliate. Viceversa, non esiste alcuna complessità che provochi disturbo se si affronta il problema « dall'alto », dalle qualità di insieme delle figure e dal significato strutturale delle linee, angoli, contorni, che le compongono.

III) Il cambiamento che risulta quando $a+b$ diventa $b+a$ è la caratteristica basilare del processo produttivo. Nelle figure non abbiamo, come nell'equazione, semplicemente una relazione di mutua uguaglianza di due cose, ma un cambiamento con una *direzione*:

$$a+b \rightarrow b+a$$

un cambiamento che è *necessario*. È un cambiamento da qualcosa a qualcosa di significativamente diverso: non abbiamo solo un'equazione, abbiamo anche una *transizione*. Il problema della validità, per quanto importante, è fondamentalmente cieco di fronte a questo movimento direzionale. Ecco qui una differenza basilare rispetto alla concezione della logica tradizionale. Mentre, infatti, la logica tradizionale si interessa soprattutto di stabilire se un dato a_1 sia o non sia « uguale » (o « equivalente ») ad a_2 , per noi il problema è la transizione da a_1 ad a_2 , il fatto che venga eseguita proprio questa transizione, ecc. E questo è un problema fondamentale in quanto comporta il passaggio da una posizione statica ad una dinamica.

Transizioni di questo genere non comportano forse le alternative di procedimenti « logici » o « illogici », sensati o alla cieca? Non dovrebbero venire trattate dalla logica?

Una transizione di questo genere comporta spesso una « riorganizzazione della struttura »; a questo proposito vorrei osservare che questo termine, importante nella teoria della forma, viene spesso male interpretato, cosicché il suo significato risulta sminuito. Alcuni anni fa uno psicologo ne illustrò il contenuto con una serie di sillabe senza senso che dovevano venir imparate prima disposte in un ordine, poi in uno diverso. Qui non parliamo di un procedimento arbitrario di questo genere, ma di una riorganizzazione resa sensatamente necessaria dalla struttura della situazione. I vettori che operano in questo cambiamento e nella sua realizzazione emergono dalle esigenze funzionali della struttura della situazione.

Posso affermare che in casi genuini come questo il dire che la transizione si effettua in direzione di una figura più nota non caratterizza adeguatamente la transizione: in questo caso la transizione è fatta verso una forma in cui il problema diviene strutturalmente chiaro. La misura dell'area in termini di quadratini unitari diviene chiara ed evidente nella forma del rettangolo.

IV) Si può notare che l'equazione $a+b=b+a$ riveste un ruolo davvero importante anche nel corso del processo che riguarda

il problema della semplice dimensione. Il principio che operazioni di questo genere non modifichino la superficie è un caso notevole di semplicità strutturale in contrasto con la possibilità che le operazioni di tal genere vengano accompagnate da mutamenti di superficie (vedi pag. 73). Questo non vuol dire che sia vero di necessità: la natura non è obbligata a dimostrare proprietà così elementari. Quello che è comodamente vero per quanto riguarda la somma (qui trattiamo della *dimensione* dell'area, che è un argomento che richiede l'uso di una logica di tipo sommativo), non è detto che sia vero in generale: non lo è per quelle istanze che non sono di natura sommativa.

L'ordine ba di contro all'ordine ab , per quanto irrilevante rispetto al problema puramente sommativo delle dimensioni, è molto importante per altri aspetti di questo stesso processo. L'ordine di successione, infatti, spesso esercita un'azione molto più complessa sull'oggetto, sulla natura delle parti, sui caratteri dinamici che la situazione comporta, che non nel nostro caso. Nel nostro esempio, dopo tutto, col mutamento si ottiene di nuovo una figura chiusa. Osservate la differenza tra i due modi in cui ab si muta in ba in questi semplici esempi:

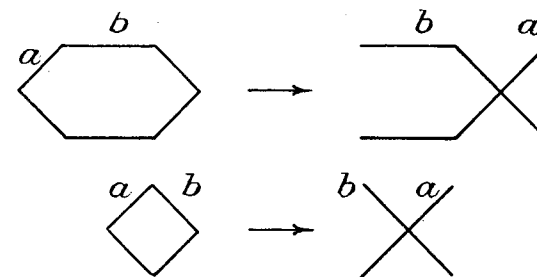


FIG. 41

Supporre la proprietà commutativa, ad esempio, per le melodie, sarebbe affatto cieco, senza senso. Lo stesso vale per molti altri casi. Qui sono coinvolti grandi problemi, questioni fondamentali della logica; alcuni problemi come quelli illustrati sopra con l'esagono e il quadrato, vengono studiati parzialmente nella moderna teoria delle reti di relazione, ma problemi più profondi sorgono nei riguardi delle qualità e della dinamica d'insieme.

Molti considerano ancora la proprietà commutativa come una proprietà generale, fondamentale della logica, che presuppone in ge-

nerale il carattere sommativo, atomistico dei fatti, delle proposizioni, ecc., al punto tale da far nascere la dottrina che la logica abbia a che fare fundamentalmente con « tautologie ». Alla luce della nostra discussione una tale opinione sembra fundamentalmente chiusa ai vari problemi del pensiero.

La proprietà commutativa non ha certamente valore generale per gli elementi di un vero processo di pensiero. Se dovessimo mettere i caratteri, le operazioni, o i passaggi di un processo di pensiero genuino in ordine sparso e stabilire l'eguaglianza in base alla proprietà commutativa, faremmo un'affermazione del tutto cieca: gli elementi di un tale processo non sono una somma di parti.

V) Per il logico la proprietà commutativa è uno degli enunciati tra le proposizioni che costituiscono una dimostrazione. Ora mi sembra necessario affermare che la dimostrazione stessa ha una sua struttura. Se un soggetto non riesce a vedere la struttura di una dimostrazione accadono delle cose tristi. Spesso uno scolaro di fronte alla serie di proposizioni della dimostrazione, nel suo libro di testo, è stupito, preoccupato, smarrito. Legge le proposizioni, le controlla nel diagramma, legge i teoremi, inizia un procedimento che consiste nel cercare di far combaciare i vari pezzi come in un gioco di mosaico, per ottenere il contesto sensato. Se ancora non vi riesce, può darsi che impari a memoria le proposizioni nella sequenza data: nel ripetere la prova cercherà freneticamente di ricordare qual era l'asserzione successiva nel testo; se non vi riesce, può saltar fuori con qualche altra proposizione che, per quanto corretta, è semplicemente priva di senso nel contesto. Lo scolaro bravo, naturalmente, fa quello che si deve fare, ma nelle dimostrazioni che molti libri di testo offrono è costretto a farlo *lui*, cioè deve convertire la distribuzione sommativa delle proposizioni nella struttura sensata della dimostrazione. Questo comporta il raggruppare sensatamente, il capire la gerarchia funzionale, la direzione, le posizioni strutturalmente sensate, il ruolo e la funzione di ogni affermazione ed il suo significato in seno al tutto. Se un soggetto non riesce a vedere, ad esempio, che una delle asserzioni, assieme a certe altre, appartiene ad una sotto-unità della dimostrazione (diciamo, la similitudine dei triangoli), e la raggruppa in maniera sbagliata, è lontano dall'aver capito. Vi sono casi in cui un soggetto, cercando di raggiungere un certo ordine nelle proposizioni che riguardano linee soltanto, poi angoli, poi piani, si ritiene orgoglioso di aver ottenuto un ordine logico, ma torna nella disperazione se richiama alla mente il suo compito.

Non è di scarsa importanza il comprendere se una proposizione ha la funzione di premessa o di conclusione, che a sua volta serva come ulteriore premessa, ecc.

Considerazioni analoghe valgono per quanto riguarda *il trovare* la dimostrazione. Il trovare sensatamente la dimostrazione non ha luogo nel modo descritto prima (pag. 81) che è così tipico dell'atteggiamento della logica tradizionale. Non si tratta semplicemente di fare delle asserzioni corrette, di richiamare alla mente alcuni teoremi imparati, ecc.; la scoperta sensata procede attraverso la comprensione dei requisiti della prova, affrontando quello che è necessario secondo un ordine sensibile alla struttura.

Ma mentre la struttura della dimostrazione, nel nostro caso dell'area del parallelogrammo, è relativamente semplice, non è altrettanto facile trovare un procedimento psicologicamente adeguato e strutturalmente sensato in altre materie d'insegnamento. In questo campo vi è urgente bisogno di miglioramenti, di lavoro produttivo.²⁵

40. Abbiamo discusso i fattori che sono essenziali per risolvere il problema, per raggiungere il risultato. Ma che dire del risultato in sé? Spesso i processi di pensiero sono considerati come processi volti alla soluzione di un problema, al raggiungimento di una meta stabilita, e fin qui è quello che abbiamo fatto noi stessi. Il compito del pensiero, secondo molte teorie, consiste solo in questo. Ma i nostri problemi non si ripetono forse per quanto riguarda il risultato stesso?

Qui, nel caso del nostro modesto problema di geometria, la situazione è abbastanza ingenua. Qui opera semplicemente la gioia di risolvere un tale problema, la gioia del raggiungimento di un risultato, il piacere di usare le proprie facoltà mentali. Fin qui il pensiero può essere una cosa relativamente delimitata. Oltre a ciò, ci sono delle situazioni nelle quali il compito risulta sensato in un

²⁵ Per parecchi anni ho lavorato con questi compiti in conferenze sull'insegnamento e l'apprendimento ed in lavori di ricerca assieme ad alcuni colleghi. KATONA, G., ha trattato alcuni di questi problemi nel suo libro *Organizing and memorizing* (New York, Columbia University Press, 1940) (trad. ital.: *Memoria e organizzazione*, Editrice Universitaria, Firenze, 1965) e nei seguenti scritti: « On different forms of learning by reading », *Journal of Educational Psychology*, 1942, pagg. 335-355; « The role of the order of presentation in learning », *American Journal of Psychology*, 1942, vol. 55, pagg. 328-353. STERN, C., ha fatto una relazione del suo lavoro sull'insegnamento dell'aritmetica in uno scritto, letto alle riunioni della Eastern Psychological Association nel 1941. [Questo scritto ora costituisce una parte del suo libro *Children discover arithmetic* (New York, Harper, 1949) — M. W.].

più ampio contesto. È questo il caso del problema dell'area quando è posto in un contesto nel quale un contadino vuole determinare l'area del suo campo; oppure quando il problema sorge in un contesto più vasto di pensiero geometrico — come, ad esempio, quando qualcuno ha compreso l'area del rettangolo e gli interessa di determinare l'area di altre figure in seno al problema generale di determinazione dell'area.

Vi sono, però, delle situazioni in cui risulta assurdo lavorare al problema dell'area del parallelogrammo in quanto questo compito non si adatta strutturalmente alla situazione, perché lo stesso scopo è fuori posto e la situazione richiede altre cose. Se, in una situazione di questo genere, viene dato questo compito oppure sorge il problema in un modo o nell'altro, alcuni senza vedere quello che è necessario, si mettono al lavoro e rimangono attaccati ciecamente alla meta fissata. D'altra parte troviamo spesso delle reazioni intelligenti, in cui il soggetto si rifiuta di risolvere il problema in quanto ciò che gli preme è quello che nella situazione data è veramente importante.²⁶

Darò un semplice esempio. Un insegnante, del tutto innocentemente, usa certe occasioni per fare qualche esercizio su determinati problemi. Nell'ultima lezione ha insegnato alla classe come ottenere l'area del trapezio tracciando le linee ausiliarie: ha insegnato la formula $\frac{a+b}{2} \cdot h$. Ora, riferendosi ad un quadro incorniciato che è attaccato alla parete, dice: « Voglio sapere l'area della cornice del quadro »; segna le linee con le lettere a b c d , ne dà le dimensioni e aggiunge: « Vedete, ci sono quattro trapezi: spero vi ricordiate come trovarne l'area ».

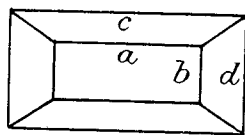


FIG. 42

Alcuni bambini lavorano di buona lena al compito fissato dall'insegnante; calcolano le aree col loro metodo monotono; alcuni cadono in errori, correggendoli con attenzione forzata. Alcuni bambini però appaiono semplicemente divertiti, non fanno niente del

²⁶ Cfr. il caso nel Capitolo Quarto, pagg. 148 e segg.

genere, bensì moltiplicano c per d , a per b , sottraggono ab da cd dicendo: « E allora? Perché mai dovrei ottenere le aree dei trapezi? »

Pensare non vuol dire soltanto risolvere problemi assegnati. La meta stessa del risultato, come parte della situazione, può essere sensibile alla struttura, oppure sciocca. Come le operazioni in seno ad un vero processo di pensiero funzionano come parti con la loro posizione e ruolo rispetto alle esigenze strutturali, così avviene per il risultato, come parte di un contesto più ampio. Spesso colui che pensa, nel tentativo di risolvere un problema assegnato, si ferma, rendendosi conto che la situazione richiede cose del tutto diverse, richiede che venga mutata la meta stessa. Il restare attaccati a mete stabilite, il voler insistere per raggiungerle è spesso pura e semplice mancanza di pensiero.

Casi di questo genere nella vita assumono spesso un aspetto importante. Qualche volta l'uomo, ad esempio l'uomo politico, dopo aver cercato con tutte le sue forze di raggiungere una determinata meta, d'improvviso si rende conto che la meta stessa, nel modo in cui era fissata, era fuori luogo, senza una relazione con le esigenze reali, con mete più essenziali. Questa in sé può essere la scoperta di qualcosa di cui prima non ci si rendeva conto per nulla, cioè che i mezzi per raggiungere una meta cercata metterebbero in pericolo, eliminerebbero una meta molto più importante. Il pensiero è interessato non semplicemente ai mezzi, ma ai fini medesimi con il loro significato strutturale.

I nostri compiti di geometria non presentano problemi di questo genere: sono compiti in una regione di vita quieta, pura, pacifica, chiara; nei quali si può procedere in un modo trasparente, limpido come il cristallo. Questa è una delle ragioni per cui gli educatori hanno a più riprese esortato allo studio della geometria, che permette alle facoltà mentali di svilupparsi in un'atmosfera di coerenza chiara e perspicua, e che può quindi essere utile per la formazione di atteggiamenti di pensiero altrettanto coerenti di fronte a problemi più complessi e meno concisi.

È questa una delle ragioni per le quali in questo libro abbiamo scelto per la discussione questi semplici esempi della geometria: è sembrato più opportuno discutere i problemi teoretici di base con materiale strutturalmente più semplice.²⁷

²⁷ Per una ulteriore discussione di argomenti che interessano questo capitolo vedi le Appendici 2, 3, 4 e 5 — M. W.

*Il problema del ponte **

Nel 1911, mentre ero impegnato nel lavoro di ricerca all'Istituto psichiatrico e psicologico di Vienna, il direttore della clinica per bambini venne a chiedere il mio aiuto per un problema un po' particolare. La clinica aveva assunto un pediatra ed uno psicologo per trovare il modo di educare un gruppo di bambini sordo-muti, la cui età variava dai quattro ai quattordici anni. Gli specialisti avevano l'impressione che questi bambini, incapaci di parlare, avessero una capacità intellettuale estremamente bassa. Potevo andare io a cercare di scoprire se fossero davvero così poco intelligenti?

Nel trattare con questi bambini provai prima di tutto un metodo che vi riferirò nelle sue linee generali.

1. Seduto ad un tavolo con uno dei bambini, prendo tre cubetti e costruisco un ponte. Poi lo butto giù. La maggior parte dei

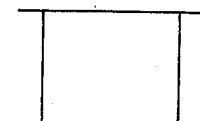


FIG. 43

bambini dopo tale dimostrazione comincia a costruire un ponte. (In una variante metto i tre cubetti da parte nel mucchio. I bambini al-

* Questo capitolo non era incluso nell'edizione originale, sebbene un primitivo indice trovato tra le carte di Max Wertheimer indicasse che egli un tempo aveva avuto l'intenzione di usarlo a questo punto. Il manoscritto di questo capitolo non aveva la forma definitiva dei capitoli inclusi nell'edizione originale: si è dovuto procedere ad un po' di lavoro redazionale, ma si è cercato di contenerlo al minimo. — M. W.

lora cercano i cubetti e cominciano la costruzione). In alcuni casi in cui non ha luogo questa reazione spontanea, prendo una bambolina e la faccio camminare sotto o sopra il ponte. Spesso questo è di aiuto.¹

I bambini sono in grado di fare tutte queste cose. Ma che cosa fanno in effetti? Ripetono semplicemente quello che ho fatto io o comprendono qualche cosa? Talvolta accade che, nel togliere i cubetti dal mucchio, i bambini non scelgono proprio quelli che avevo usato io, bensì degli altri. E, dopo alcuni tentativi con cubetti scelti

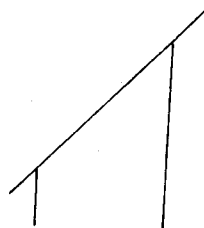


FIG. 44

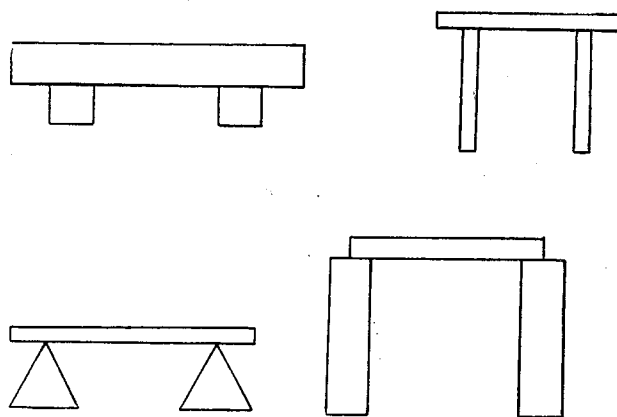


FIG. 45

male, talvolta riescono soltanto a costruire un ponte che crolla prima di esser completato. Allora, subito dopo, cercano i cubetti giusti. Altri bambini risolvono il problema fin dall'inizio. Fanno una traspo-

¹ In questo e in quasi tutti i tentativi successivi non ho usato parole o segni: ho fatto la mia costruzione ed ho aspettato le reazioni del bambino.

sizione. Scelgono due cubetti che corrispondono ed uno che faccia da ponte tra le verticali. Se il terzo cubetto scelto è troppo corto per la distanza tra le due verticali, o lo cambiano con uno più lungo, o portano i due cubetti verticali più vicini l'uno all'altro. Alcuni — molto pochi — cercano di primo acchito esattamente i cubetti che io avevo usati, ma i più non cercano per nulla di copiare la distanza originaria o le misure dei cubetti originari: adattano le distanze e le dimensioni ai materiali per la costruzione che hanno in mano. (Soltanto un bambino cercava ansiosamente i cubetti originali, ponendoli alla distanza originaria.)

2. Ora pongo davanti al bambino una pila di cubetti dalla quale sono stati tolti i cubetti originali del punto I. Funziona; costruiscono un ponte. In altri casi pongo sulla tavola tre cubetti soltanto. Tutti li usano ragionevolmente. Nessun bambino, facendo la costru-

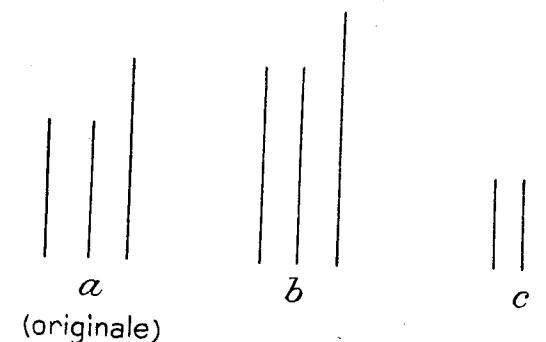


FIG. 46

zione con il gruppo c, usò come verticale il cubetto che era tale nel gruppo originale. Era chiaro che ciò che regolava il loro comportamento non erano gli stimoli originali ma le relazioni. I due cubetti uguali e più piccoli vengono scelti come verticali e vengono posti ad una distanza tale da rendere possibile l'uso del terzo come parte superiore.

3. In altri esperimenti (con alcuni bambini che i medici consideravano i più tardivi) adottò una situazione cruciale. Nel gruppo di tre cubetti con cui devono fare la costruzione, ce n'è uno della dimensione di quelli usati originariamente come verticali, e due di dimensioni identiche a quelle dell'orizzontale originario. Rimarranno

attaccati agli stimoli appresi e alle loro connessioni, e metteranno due dei cubetti nelle loro posizioni originarie?

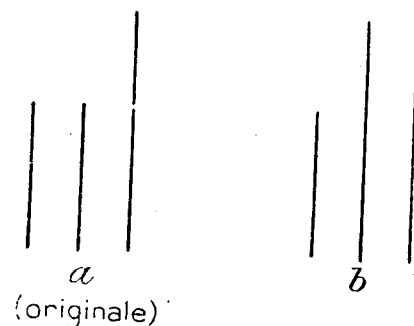


Fig. 47

Alcuni sì. Essi mettono il cubetto corto verticalmente, quello lungo in posizione orizzontale, tenendolo in tale posizione, e appaiono ansiosi di trovare un altro cubetto piccolo. Io non intervengo. Allora cominciano a mettere il terzo cubo in posizione verticale: la co-

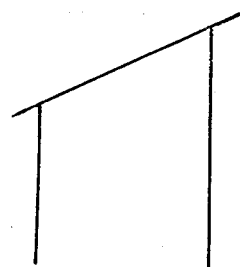


Fig. 48

struzione crolla. (Altri tentano di farlo fin dall'inizio.) Dopo che è crollata, la mettono di nuovo in piedi, ma la maggior parte dei bambini, dopo circa due tentativi, d'improvviso sorride, e muta la posizione ed il ruolo dei cubetti! Molti bambini lo fanno subito dopo una breve pausa, senza alcun previo tentativo. (Vedi fig. 49.)

Era evidente che per molti bambini questi tentativi non costituivano semplicemente delle esperienze negative. Si poteva osservare che imparavano qualcosa di positivo dai tentativi non riusciti: essi avevano notato con attenzione il punto essenziale nel crollo dei cubetti: la relazione tra stabilità ed eguaglianza.

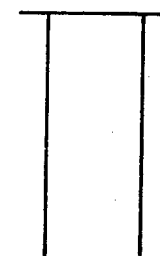


Fig. 49

4. In esperimenti con altri bambini di quel gruppo usai cubetti colorati, avendo cura che le verticali fossero uguali in misura e colore, mentre il terzo cubetto fosse diverso per entrambe queste caratteristiche. Nel « test » una coppia è uguale per misura e una coppia diversa è uguale per colore: nessuno dei bambini è indotto in errore. Così vediamo che non è decisiva una relazione di eguaglianza *qualsiasi*, ma la coerenza interna tra una struttura che è orizzontale (stabile) e la proprietà dell'eguaglianza *di dimensioni* delle due verticali: una relazione ρ .

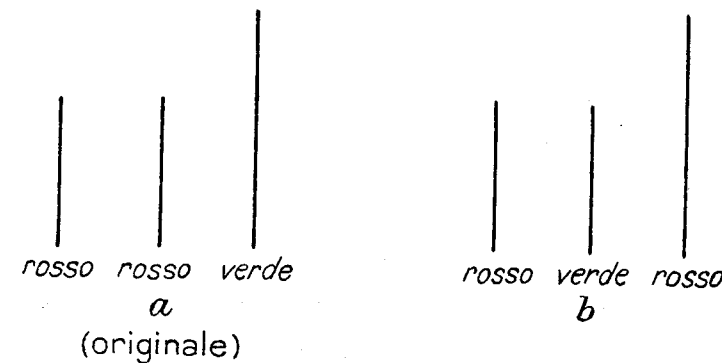


Fig. 50

5. L'eguaglianza di dimensioni dei cubetti verticali è decisiva? Prima di iniziare il « test » costruisco una scalinata con cubetti grandi e questa volta indico a gesti che voglio che costruiscano il ponte sugli scalini. Essi lo fanno, come vedete nella fig. 51; usano uno dei due cubetti uguali come verticale, l'altro come orizzontale. Questo dimostra che non è decisiva l'eguaglianza, ma piuttosto la connessione

interna tra la posizione orizzontale e la stabilità, e che il ruolo di parte viene determinato da questo in modo secondario.

Qualcuno all'oscuro dei nostri problemi, si chiederà perché ho ritenuto necessario di fare esperimenti in tal modo (come nei §§ 2, 3, 4, 5). « Il risultato non è forse scontato? » è facile che egli chieda. Non lo è affatto. Anzitutto, vi sono dei bambini (sebbene questo avvenga raramente) che sono abituati a comportarsi come piccoli schiavi, a rimanere attaccati punto per punto a ciò che hanno appreso, alle parti intese sommativamente, imparate a fatica, e alle loro connessioni; essi non riescono a risolvere tali varianti. Allo stesso modo vi sono bambini, sebbene anche questo avvenga di rado (personalmente non ne ho trovato nessuno nel gruppo), che nel corso di tentativi non riusciti, continuano a ripetersi senza riuscire ad avere l'idea di mutare la situazione nel modo sensato necessario.²

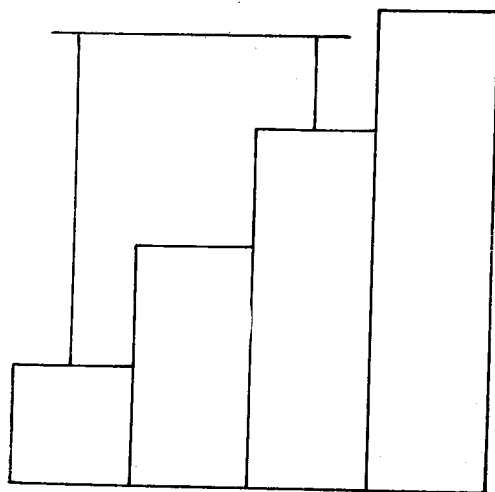


FIG. 51

Secondo, la situazione della nostra scienza della psicologia è tale che c'è bisogno di esperimenti cruciali di questo genere: per raggiungere una vera chiarificazione scientifica dei problemi implicati, la scienza ha bisogno di domande cruciali di questo genere. (A dispetto del fatto che si conoscano col buon senso. Qualche volta le

² Nei pochi casi di questo tipo a cui ho assistito, un cambiamento di atmosfera che dia al bambino una maggiore libertà, un cambiamento verso un'atmosfera di amicizia e di ottimismo, diede subito aiuto. Vedere Capitolo VII.

cose ovvie contengono problemi fondamentali, affascinanti per lo scienziato; e qualche volta il buon senso sbaglia).³

6. Ancora, è possibile che alcuni teorici pensino a questo modo: « Dopo tutto, relazioni o no, in fondo il problema non è altro che una somma di connessioni ». Possiamo trovare un esperimento cruciale per saggiare tale asserzione? È possibile stabilire sperimentalmente se in questo caso non abbiamo nulla all'infuori di una connessione imparata a casaccio?

È possibile: basta introdurre l'arbitrarietà nella connessione. Come possiamo fare ciò? Potremmo costruire un complesso di cubetti magici, cubetti con cui si può costruire un ponte che resiste se i colori sono uguali in una coppia verticale, mentre crolla se non lo sono, indipendentemente dalla grandezza relativa delle verticali.

Oppure, in accordo con un tipo di sperimentazione diverso, non ci dobbiamo preoccupare di costruire un tal mondo magico. Invece, basta che l'insegnante dica, dopo una delle costruzioni: « Va bene », e dia al bambino un pezzo di cioccolata, e, dopo un'altra costruzione: « È sbagliata », e, Dio non voglia, punisca il bambino prima di vedere se la struttura cade.

L'effetto dell'apprendimento sarà in tal caso equivalente alla situazione che abbiamo trattato in precedenza in questo capitolo, che, fortunatamente, è, in certo grado, ragionevole, naturale?

Ma tralasciamo per ora tale questione e procediamo con semplici esperimenti.

7. Come in (1) comincio a costruire un ponte, ma per il « test » successivo pongo le due verticali un po' più distanti l'una dall'altra. Il bambino guarda il terzo cubetto, poi spinge una delle due verticali più vicino all'altra,⁴ in una posizione più appropriata.

³ Posso osservare, nell'interesse di qualcuno che desideri ripetere questi esperimenti con i bambini, che bisogna essere piuttosto cauti nella scelta dei cubetti. Se si usano cubetti che, a causa dell'attrito, fanno sì che resti in piedi anche una cattiva costruzione, questo ostacolerà la vostra ricerca. (È necessario, ad esempio, usare cubetti levigati per ridurre l'attrito). Pensate agli scimpanzé che non avevano bisogno di mettere le scatole una sopra l'altra in modo stabile in quanto erano abbastanza svelti da saltare dalla cima prima che la costruzione crollasse: (KÖHLER, W., *The mentality of apes*, New York, Harcourt Brace, 1925. — Trad. ital.: *L'intelligenza nelle scimmie antropoidi*, Editrice Universitaria, Firenze, 1961).

⁴ Questa diminuzione della distanza tra le due verticali non aveva luogo se il terzo cubetto si poteva vedere e se non risultava più corto di questa nuova distanza. In questa situazione osserviamo che la necessità funzionale del fatto che la lunghezza del terzo cubetto debba essere maggiore della distanza tra le due verticali, operava chiaramente. E osservando questi bambini si poteva vedere che il compor-

Io torno a porlo nella sua situazione originaria, e allora qualche volta ne nasce una divertente serie di spinte avanti e indietro del cubetto tra il bambino e me. Dopo un po' (e per alcuni bambini senza che vi sia questo gioco di spingere avanti e indietro) il bambino torna al mucchio dove ricerca, evidentemente, un cubetto più lungo « appropriato ». Poiché non lo trova (in quanto non c'è un cubetto della lunghezza necessaria nel mucchio sul tavolo) ne prende due di piccoli e costruisce la struttura della figura 52. Vediamo allora che la

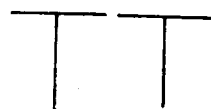


FIG. 52

relazione tra la distanza e la lunghezza del terzo cubetto è decisiva. (Un bambino prese il cubetto originale, che non era abbastanza lungo per la distanza tra le verticali, e lo tenne sospeso tra di esse. Il cubetto cadde, ma il bambino ripeté più volte l'operazione).

8. Quando questo problema viene risolto, butto giù il ponte, prendo le verticali e le pongo ad una distanza ancor maggiore di modo che la soluzione precedente non è più possibile. Il bambino costruisce la struttura della figura 53.⁵

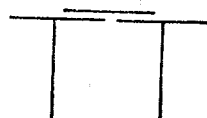


FIG. 53

Se, per caso, questa struttura rimane in piedi, aumento la distanza. Il bambino tenta di nuovo e questa volta la costruzione cade. Il bambino ripeté l'esecuzione con il medesimo risultato.

Osservo il bambino che considera le costruzioni e le ricostruzioni mentre continuano a cadere. Il bambino pone il cubetto di centro sulle due orizzontali, continuando a tenerlo in mano. Ma pri-

tamento era guidato dalla comprensione che i due cubetti corti non « chiudono », non danno stabilità, ecc. Il comportamento era plasmato non dalla ripetizione degli elementi concreti originali, ma dalle esigenze della struttura della situazione.

⁵ Di nuovo, nella scelta dei cubetti si dovrebbe avere l'avvertenza di assicurarsi che costruzioni di questo genere non si reggano in piedi.

ma che la struttura cada, nel momento in cui vi è il pericolo di urtare i blocchi orizzontali e sbilanciarli completamente, d'improvviso torna a levare il blocco centrale e costruisce, incontrando una certa difficoltà, ma con decisione, la struttura della figura 54, ponendo come aggiunta per bilanciarla due piccoli cubetti alle estremità!

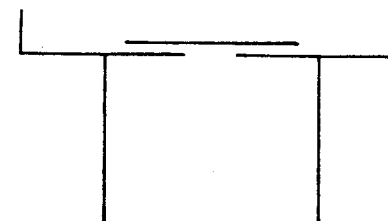


FIG. 54

Parecchi lo fanno senza molti tentativi e il loro comportamento durante le prove dimostra chiaramente come il bambino si interessi alla direzione in cui cadono i cubetti.⁶

Questo può essere un esempio di una scoperta o invenzione vera, se pur modesta: in questa situazione è chiaro che per il bambino vuol dire aver trovato qualcosa di nuovo.⁷ È sorpreso lui stesso. Altri bambini non riuscivano a farlo. Un numero considerevole di adulti con i quali ripetei questo esperimento non lo risolsero, ed alcuni fra loro erano persone molto intelligenti e colte, raffinate. Alcuni di loro mi dissero che avevano passato una notte in bianco senza giungere al risultato.

Qualche volta ebbero luogo altre soluzioni come, ad esempio, il raddoppiamento dei pilastri verticali, l'introduzione di un terzo pilastro verticale al centro, ecc.

Vi posso far notare che un bambino, dopo il crollo della prima costruzione, prese, con un'espressione furba sul viso, un unico pila-

⁶ Lo scoprire la direzione di caduta dei cubetti non rappresenta soltanto il volgersi dell'attenzione ad uno stimolo: vi è implicito l'importante procedimento di scoprire la regione decisiva in seno alla struttura. Confrontate esperimenti con adulti e bambini in cui essi cercano di copiare un trucco magico: com'è difficile per loro, in determinate condizioni strutturali, giungere a ciò che risulta veramente importante! Non avendo compreso, in una tale situazione, cercano di copiare le operazioni una dopo l'altra con tale esattezza e sottomissione da perdere di vista il punto essenziale.

⁷ Mi preoccupai con molta cura, mentre interrogavo l'insegnante prima dell'esperimento, di accertarmi che quei bambini non avessero avuto prima di allora esperienze di questo tipo.

stro, cercò di farci stare sopra in equilibrio il blocco orizzontale e su di questo cercò di mettere i due cubetti, osservando con interesse quello che accadeva. Quando questa costruzione rimase in piedi, egli ritornò al ponte lungo e risolse il problema.

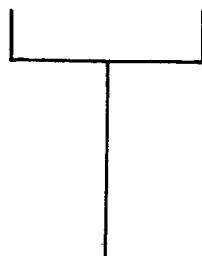


Fig. 55

Voglio aggiungere che il costruire la struttura non è, in sé, un compito facile: bisogna avere la massima attenzione per metterla su in modo che non crolli prima che sia finita. In realtà si tratta di un'impresa precaria, perché non si possono mettere contemporaneamente il cubetto orizzontale ed entrambi quelli alle estremità con due mani soltanto. Nonostante queste difficoltà, però, la costruzione venne eretta nei casi positivi con coerenza e chiarezza. Quando si ottiene una prova negativa, sia con bambini che con adulti, non bisogna interpretarla semplicemente come un segno di intelligenza inferiore; possono intervenire fattori assai diversi: la difficoltà di maneggiare i cubetti, la goffaggine, ecc. In alcuni adulti vi è poi il fattore addizionale del disdegno per problemi di questo genere, dell'avversione ad essere sottoposti a « test », ad essere presi come soggetti per esperimenti, a trovarsi di fronte a un uditorio, ecc.

Molti psicologi, sentendo parlare di questi esperimenti hanno detto: « Questo sarebbe un bel "test di intelligenza": perché non standardizzarlo? » (Io non ho nulla in contrario, sempre che ciò non impedisca di pensare, di investigare su quello che accade, sul vero significato psicologico della prova). Molto spesso nei « test di intelligenza » lo psicologo non sa che cosa sta misurando. E in effetti il fatto che un certo item di un test sia stato risolto oppure no, non ci dice in realtà molto se ci rimane ambiguo il significato dell'esecuzione positiva del compito e se non siamo in grado di dire se è una cieca ripetizione di una somma di azioni imparate (scegliere pro-

prio questo cubetto e metterlo in questo posto) oppure se si riferisce piuttosto ad una reale penetrazione di quanto occorre fare.

Se il lettore ora dovesse chiedere: « Prima avete detto che alcuni risolsero il problema e altri no. Quanti lo hanno risolto? Quanti non ci sono riusciti? Che età hanno? » perderebbe di vista il senso della discussione. Qui noi siamo interessati a scoprire in che modo i bambini raggiunsero la soluzione, quali fattori erano coinvolti in questo risultato fecondo. Abbiamo dovuto usare queste varianti poiché non ci accontentavamo di dare come risposta solamente dei concetti generali, come l'« esperienza precedente », o il funzionamento di connessioni apprese, o il desiderio di raggiungere una mèta, ecc. Ora cercheremo di descrivere l'aspetto di questi procedimenti.

9. Per risolvere l'ultimo problema (che chiaramente comportava per molti bambini la gioia di una esperienza nuova, di una conquista), il passaggio decisivo era quello di porre dei cubetti addizionali alle estremità del blocco orizzontale. Come ha avuto origine questa operazione? Come si sono imbattuti i bambini proprio in questo passaggio? Forse attraverso tentativi alla cieca ed errori? No certamente: in quanto non hanno fatto, come invece sarebbe avvenuto in tal caso, un certo numero di tentativi sciocchi prima di imboccare questa soluzione. Certamente non hanno proceduto verso la soluzione attraverso un dato numero di operazioni arbitrarie.

Forse per caso? È estremamente improbabile.

Forse grazie all'uso dell'esperienza passata, al richiamo alla mente di operazioni simili eseguite con successo? L'influsso di precedenti esperienze è assai probabile; ma chiarisce davvero il problema il riferirsi alla esperienza passata in termini così generici? Introduciamo pure, qui ed ora, l'elemento necessario per la soluzione. Mostrai ai bambini la figura 55, non soltanto come prodotto finito, ma mentre la stavo costruendo; inoltre la feci costruire al bambino, in modo che ottenesse da solo l'effetto di raggiungere l'equilibrio. Questo non fu di alcun aiuto nella soluzione del ponte lungo, nemmeno se aggiungevo l'osservazione: « Ora sarai certamente capace di costruire il ponte lungo ». È pensabile che alcuni bambini possano essere aiutati da un tale procedimento, ma questo non avvenne nel caso di quelli che osservavo io. Quali condizioni sarebbero necessarie per tramutare questo procedimento in un aiuto? Perché in questi casi non servì? (Come ho detto, ci furono dei bambini che interruppero

spontaneamente il loro lavoro intorno al ponte lungo, cercarono di costruire proprio questa struttura, e quando riuscirono ad ottenerla, ritornarono al problema originario e lo risolsero).

Che cosa dunque è decisivo qui? come possiamo scoprirlo?

Se si osserva il comportamento dei bambini: cosa fanno, dove guardano, che cosa sembra interessarli, come giungono ai loro reali risultati, sembra che ci sia il seguente processo:

I) Il bambino pone il blocco centrale sopra la costruzione, la quale crolla (esperienza negativa, non riuscita; alcuni bambini appaiono disperati, altri ripetono l'operazione parecchie volte).

II) Questa non è per il bambino semplicemente un'esperienza negativa. Egli è chiaramente interessato nel cercare di localizzare la difficoltà, nello scoprire da cosa derivi l'effetto negativo del crollo, come e perché sia successo.

III) La caduta del blocco centrale non è più il centro del problema. Sta accadendo qualcosa anche a destra e a sinistra! E *quello* che accade lì è consono al disturbo, o ha qualche importanza in relazione ad esso. (Tutto questo ha un valore maggiore che non ottenere tutti i dettagli attraverso un'analisi frazionante degli avvenimenti: mira alla regione importante nella interrelazione degli eventi).

IV) La stabilità della costruzione viene messa in pericolo proprio qui. In che modo? La direzione di caduta dei pilastri che viene osservata è dovuta alla instabilità prodotta dal peso eccessivo su di un lato. (Naturalmente questo non viene formulato dal bambino in termini così astratti, ma egli avverte il bisogno di compensare simmetricamente l'eccesso di peso che vi è da un lato per raggiungere la stabilità. La situazione esige un aiuto).

Come viene dato questo aiuto? In modo cieco? Per mezzo del richiamo di qualcosa alla mente? Come ho detto un momento fa, un bambino interruppe il suo lavoro sul ponte ed eresse la struttura della figura 55; dopo essersi reso conto, raggiante, che il cubetto a sinistra poteva compensare il peso del cubetto a destra, tornò al ponte lungo e risolse il problema.⁸ Un altro bambino, senza far questo, centrò

⁸ Cfr. MAIER, N. R. F., « Reasoning in humans: the solution of a problem and its appearance in consciousness », *Journal of Comparative Psychology*, 1931, vol. 12, pp. 181-194.

⁹ Ora vediamo anche che un'operazione, data come aiuto, ha valore soltanto alla luce del bisogno funzionale, nella funzione che riveste in seno all'intera struttura. L'operazione da me eseguita sembrò ai bambini citati sopra, a cui venne mo-

chiaramente quel che accadeva nel ponte lungo, toccò con le dita le estremità in pericolo sperimentando chiaramente quel che era avvenuto e poi risolse il problema.

Le condizioni di gravitazione devono venire incluse nel quadro della struttura; ma non è di aiuto pensare al problema in termini come « si deve prendere in esame l'esperienza della gravitazione ». Il lato gravitazionale del problema qui entra strutturalmente come parte del quadro che comporta stabilità, simmetria (non semplicemente simmetria geometrica, simmetria spaziale, ma simmetria di *gravitazione*) nel suo posto ragionevole in seno all'intera struttura.

In questa struttura vi è un certo numero di relazioni ρ che sono collegate a qualità di insieme. Ora noi potremmo costruire, come in (7), una copia puramente sommativa al suo posto, in cui, invece di relazioni ρ e qualità d'insieme ragionevoli, siano introdotte connessioni cieche. Potremmo ad esempio erigere una costruzione magica in cui il porre un peso da una parte sola produce l'effetto della stabilità, mentre due pesi simmetrici producono proprio l'effetto contrario, cioè quello di fare crollare la struttura.

A questo punto potremmo aggiungere che la situazione è, per i bambini, meno semplice di quanto asserito qui: devono arrivare al ρ malgrado le difficoltà tecniche: qualche volta una costruzione crolla anche se è messa simmetricamente in equilibrio, perché i cubetti, spesso, vengono trattati maldestramente, senz'arte, e vengono appoggiati con forza eccessiva.

In ogni caso la mia impressione, come risultato di tali esperimenti, è che i bambini possono essere in grado di scoprire, lavorando al problema in modo davvero ragionevole, proprio quello che è necessario, senza una speciale esperienza precedente. Da soli riescono a trovare le esperienze di cui c'è bisogno, in maniera ragionevole.

Lo sperimentare tali processi può sembrare al bambino soltanto un gioco, o la soluzione di un indovinello. Ma osservando in seguito il loro comportamento si riceve l'impressione che quello che hanno guadagnato è stato un approfondimento di capacità di osservazione, oppure la comprensione di alcuni caratteri razionali del no-

strata la figura 55 come aiuto, qualcosa di completamente estraneo. Non vedevano la interrelazione tra questo passaggio ed il problema del ponte lungo e non erano in grado di usarla proprio perché per loro non aveva questo significato funzionale. Ecco un problema per esperimenti futuri; forse se si dà questo aiuto nel momento giusto, nel momento in cui il bambino si è già addentrato nella regione della difficoltà, allora forse servirebbe.

stro mondo fisico. La « curiosità » che spesso capita di osservare in questi casi non sembra semplicemente la curiosità per qualcosa di nuovo, per svelare un trucco, ecc., ma il procedere verso una più profonda comprensione del nostro mondo.

L'introduzione di premi, come cioccolata o soldi, talvolta sembra stimolare il desiderio di giungere ad una soluzione, ma in molti casi sembra invece agire contro una vera soluzione. Il desiderio di avere la cioccolata, se è fisso in mente, in sé non provvede alcuna direzione materiale per i vettori di cui c'è bisogno. Questi devono derivare dalla struttura della situazione, da quello che i requisiti richiedono. Sembra che i premi abbiano valore positivo solo se vengono scordati di fronte a ciò che richiede il compito, o, in altre parole, se avviene una trasformazione da « ciò che voglio: la cioccolata » a « quello che la situazione esige ».

Osservando di nuovo il problema nel suo insieme, vediamo che qui non abbiamo semplicemente un aggregato di alcuni elementi o di alcune relazioni, bensì un processo governato da qualità d'insieme che abbracciano una gerarchia di elementi posti logicamente più in alto o più in basso. Si vede anche che ciascuno di questi elementi (o relazioni o connessioni) non è un'aggiunta arbitraria alla posizione che occupa, ma completa in modo ragionevole la struttura del tutto, essendo l'elemento « giusto », adeguato, razionale, al suo posto, nel suo ruolo, nella sua funzione in seno alla struttura.

Se noi studiamo le reazioni dei bambini o degli adulti nelle diverse varianti, i processi implicati non sembrano procedere dal basso all'alto, dai termini posti « logicamente » più in basso a quelli posti più in alto, ma nel modo inverso. Quello che determina il comportamento nelle reazioni ragionevoli sono, in primo luogo, le qualità d'insieme (stabilità, chiusura, simmetria) e quello che esse richiedono nella scelta dei cubetti, nelle loro posizioni, nelle distanze. Logicamente le qualità d'insieme implicano o richiedono la relazione di relazioni; attraverso queste, le singole relazioni, e attraverso queste ultime, gli elementi.

Certamente il bambino non ha in mente questa astratta struttura logica. Essa può anche risultare troppo complicata perché gli adulti riescano ad abbracciarla in un'unica concezione (specialmente quelli abituati a leggere affermazioni di questo genere con l'attenzione concentrata sui singoli dettagli). Certo la logica fraziona le cose a quel modo nel formulare gli elementi, le relazioni, ecc., separatamente: ogni cosa a sé. Ma questo non dovrebbe esser fatto

per averli tutti in addizione l'uno all'altro (come pensano alcuni logici), ma per averli nel loro posto, ruolo e funzione in seno alla struttura. Per molti logici esiste il pericolo che quando hanno fatto la loro analisi, essi vedano solo le caratteristiche sommative, invece di vedere il quadro dall'alto al basso e di rendersi conto della natura ρ degli eventi.

Fortunatamente il lavoro della percezione (e dell'azione) non è mai frazionato in modo tale che la materia sia tanto complicata psicologicamente quanto appare nel quadro logico.¹⁰ Se la percezione fosse fondamentalmente il risultato della giustapposizione degli stimoli (sia pure con l'aiuto di meccanismi aggiunti) sarebbe una cosa davvero molto complicata.

10. Cerchiamo di esprimere la struttura logica dei procedimenti, cioè quelle caratteristiche di struttura che valgono anche per il quadro psicologico.¹¹

Le due verticali V_1 e V_2 sono omotipiche: hanno la stessa posizione logica, lo stesso ruolo e funzione nell'insieme. Fra di esse esiste la relazione di essere di misura uguale (m) da una parte, e la loro distanza orizzontale (d) dall'altra. Il terzo cubetto, quello orizzontale (O), ha relazioni logiche omotipiche con V_1 e V_2 , poiché l'estremità sinistra di O coincide con l'estremità superiore di V_1 e quella destra con l'estremità superiore di V_2 . Ma O ha, in più, una relazione con la relazione d (la lunghezza di O è superiore a d), ed un'altra relazione con m , poiché l'eguaglianza di m in V_1 e V_2 rende possibile la posizione orizzontale di O . E proprio queste due ultime relazioni di relazioni, se si può ammettere questo termine, hanno una relazione rilevante con le qualità d'insieme della costruzione: la sua stabilità, il fatto che l'essere chiusa conferisce stabilità, e insieme la relazione implicita nel fatto che, con d , si forma un vano nella costruzione.¹²

¹⁰ Cfr. WERTHEIMER, M., « Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt », *Psychologische Forschung*, 1923, vol. IV, pagg. 301-305. Vedere anche ELLIS, W. D., *op. cit.*, sezione 5; e BEARDSLEE, D. C., e WERTHEIMER, M., *op. cit.*, pagg. 115-135.

¹¹ Spero che il lettore non riceva un'impressione sfavorevole dal complicato quadro logico che qui è tracciato: certamente le reazioni ed il comportamento dei bambini, ed anche dei grandi, non sono affatto basati su tali nozioni logiche astratte: questi sono soltanto strumenti logici che servono per formulare la struttura logica dei procedimenti. Il loro merito è quello di esprimere, in un modello, le caratteristiche strutturali che sembrano proprie del quadro psicologico, quadro che procede in modo molto diverso dall'astrazione logica.

¹² Qui sono stati omessi alcuni dettagli, come la posizione di O su V_1 e V_2 , che è simmetrica; il carattere gravitazionale della situazione, ecc. Questi scompaiono nel

11. Nel processo di costruzione del ponte entra in gioco una serie di operazioni diverse: scegliere i cubetti, porli in determinate posizioni, ecc. Allo scopo di mettere alla prova vari tipi di orientamenti teoretici, di esaminarli nei loro elementi essenziali, con l'aiuto di variazioni, si usò anche il metodo seguente: formulare le operazioni, nel modo più oggettivo ed esauriente possibile, e tradurle nei termini di una determinata teoria. Per esempio, che aspetto avrebbe una disposizione « equivalente » a quella che abbiamo discusso, se per ipotesi supponiamo che ciò che si svolge nel bambino, nella situazione del ponte, non sia altro che una serie di connessioni o associazioni arbitrarie, cieche alle relazioni interne, alla struttura nel suo insieme, alla relazione ρ ?

Nella costruzione del ponte sono implicate le seguenti operazioni:

- 1) Prendere un cubetto (il medesimo cubetto usato dall'insegnante, oppure uno qualsiasi), e
 - 1b) Metterlo in posizione verticale sul tavolo.
- 2) Prendere un altro cubetto uguale al primo (per grandezza, colore, forma?) e
 - 2b) Metterlo in piedi, di nuovo in posizione verticale, come il precedente,
 - 2c) In un punto accanto al primo, a una certa distanza da esso (copiando la distanza usata dall'insegnante, o prendendo una distanza simile a quella),
 - 2d) (Oppure a una distanza lievemente inferiore alla lunghezza del terzo cubetto).
- 3) Prendere un terzo cubetto (di nuovo copiando quello usato dall'insegnante, oppure scegliendone uno qualsiasi della lunghezza appropriata),
 - 3b) Sceglierne uno un po' più lungo della distanza orizzontale tra i primi due, e
 - 3c) Disporre il terzo orizzontalmente sopra gli altri, forse in modo simmetrico.

In breve, prendere un cubetto « a », metterlo in posizione verticale (v), diciamo a sinistra (s); prenderne un secondo, di nuovo un « a » (uguale al primo), porlo in piedi (v) anch'esso, diciamo a destra (d), e ad una certa distanza (D) dal primo « a ». Ora pren-

quadro; ma poiché non ne mutano l'essenziale, qui non li abbiamo presi in considerazione, per non rendere la situazione troppo complicata.

dere « b » (il terzo cubetto), porlo orizzontalmente (o), sopra di essi (t); simmetria (S)!

Potremmo supporre che la cosa essenziale consista nell'avere imparato questo, nel senso di essere venuti in possesso delle connessioni esatte, delle associazioni tra gli elementi; in questo caso una corretta soluzione o un corretto processo significa che le operazioni vengono fatte, determinate da queste « connessioni ». Se noi affrontiamo i procedimenti a questo modo, come fanno alcune teorie psicologiche, allora è possibile « copiarli », ad esempio, nella seguente semplicistica maniera: non c'è il ponte, non ci sono cubetti, ecc., ma vi sono dei quadrati di cartone contrassegnati con delle lettere, e alcune scatole, ciascuna con sopra una fessura e con un segno sul davanti. L'insegnante mostra, o fa imparare al bambino, le seguenti operazioni:

- 1) Prendere un cartoncino con sopra la lettera « a », e metterlo nella scatola con i segni v e s .
- 2) Prendere un cartoncino con sopra la lettera « a », e metterlo nella scatola con i segni v , d , D .

(Variante: invece di prendere un cartoncino con la lettera « a » nel passaggio 1, prenderne uno con una lettera qualsiasi. Poi nel passaggio 2, prenderne un altro con la stessa lettera del primo).

(Un'altra variante: ci sono tre lettere sui cartoncini, corrispondenti alla lunghezza, al colore e alla forma. Bisogna insegnare allora che una di queste tre lettere deve essere la stessa in entrambi i passaggi. Quale? Vi sono altre restrizioni?)
- 3) Prendere un cartoncino con la lettera b , o con le lettere b , Dm (che esprimono una distanza maggiore), e metterlo nella scatola con i segni o , t , S .

Ora per quanto riguarda le operazioni che devono venir imparate, le connessioni legate a ciò che è essenziale nel procedimento, questo equivale all'incirca al primo problema del ponte. (Con qualche aggiunta potrebbe venir reso perfettamente equivalente ad esso per quanto riguarda la logica).

È anche possibile usare, invece delle scatole, un procedimento simile all'originale, senza però tralasciare il fatto che in questa copia noi abbiamo una somma di operazioni, o di connessioni arbitrarie. Si potrebbero anche introdurre alcune « relazioni » costruendo una

costellazione che comporti una somma di relazioni. Potrebbero anche venir usate direttamente le relazioni spaziali.

Una tale costruzione « copiata » offre la possibilità di studiare i procedimenti di apprendimento e di esecuzione, per scoprire se copie di questo genere non perdono di vista forse proprio le caratteristiche essenziali di questo primo tipo di procedimento.¹³

Certo è possibile imparare quello che viene insegnato in una costruzione di tal genere. Lo psicologo può studiare le differenze che compaiono nella difficoltà di apprendere, di ricordare, di eseguire i « transfer ». Noi riteniamo che la copia richiederà un tempo più lungo per essere imparata, che verrà dimenticata molto più presto, mentre gli errori, paragonati all'originale, avranno necessariamente un carattere fortuito e insensato. Le possibilità per il tipo di « transfer » descritto nella situazione originale vengono drasticamente limitate, e necessariamente sono quasi sempre alla cieca.¹⁴

¹³ Uno psicologo — e non è stato il solo ad usare questo metodo — ha cercato di studiare il formarsi di concetti generali e di operazioni rispetto a concetti logici, in un modo molto simile a questo. In seguito venne da me e disse: « Ora vede finalmente che non sono chiuso alla filosofia, che non sono un uomo impegnato soltanto nella cieca sperimentazione. Spero che vorrà ammettere che anch'io sono un filosofo e che, con questi procedimenti, sto indagando sull'essenza della logica e dei principi logici ».

¹⁴ Vedere Appendice 5 per un problema legato a quello trattato in questo capitolo. (Vedere anche KATONA, G., *Organizing and memorizing*, New York, Columbia University Press, 1940). - M. W.

CAPITOLO TERZO

Il problema degli angoli opposti al vertice

Eccovi un problema elementare di geometria. Due linee rette si intersecano e formano due angoli, a e b . Siete in grado di dimostrare che sono uguali?

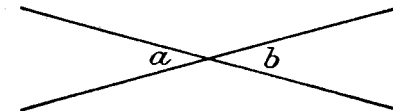


FIG. 56

Molto probabilmente avrete studiato questo teorema a scuola; forse lo avete dimenticato; meglio così. Cercate di farlo prima di leggere quanto esporrò in questo capitolo: potrete gustare di più quel che segue.

Nel porre questa domanda a bambini capaci e ad adulti, spesso si ottengono reazioni come queste: « Che domande fate? Non è ovvio? Certo che gli angoli sono uguali, non lo vedono forse tutti? » E se si insiste, si può avere questa risposta: « È chiaro: due linee prima si incontrano, poi divergono nella stessa maniera ».

Una delle difficoltà principali nel trattare il problema è data dal fatto che lo scolaro non vede (non riesce a vedere) il senso della domanda. Essa appare artificiosa, priva di senso. Spesso la richiesta di dimostrazione non può venir capita in una situazione come questa; molti non sanno o non sono in grado di rendersi conto del valore di una dimostrazione in questo caso, necessità questa che sorge nel corso dell'evoluzione della teoria matematica.

Alcuni dicono: « Naturalmente è possibile dimostrarlo, se si vuole. Tagliate la carta nel senso dell'altezza, girate la mezza pagina

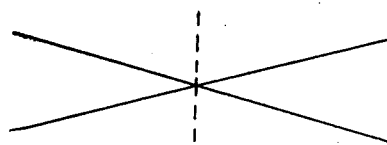


FIG. 57

sovrapponendo i due angoli. Metteteli a controluce e vedrete che coincidono ». Ma se io ribatto: « D'accordo, coincidono, ma siete in grado di dimostrare qui sulla figura che i due angoli sono uguali? », allora la maggior parte dei soggetti non sa che cosa fare. Alcuni si immergono in profondi pensieri, che possono anche contenere poco di positivo.

Prima di tutto vi dirò quello che avviene nelle scuole.

I

L'insegnante dimostra il teorema. Traccia le linee, mette le lettere agli angoli, e procede nel modo seguente:

$$a + b = 180^\circ$$

$$b + c = 180^\circ$$

$$a = 180^\circ - b$$

$$c = 180^\circ - b$$

$$a = c \quad \text{c.v.d.}$$

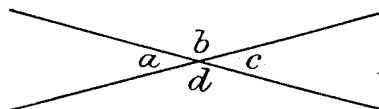


FIG. 58

Il processo può venir descritto nei termini della logica tradizionale oppure in quelli della teoria dell'associazione. L'insegnante mostra un certo numero di operazioni successive, fa alcune addizioni, scrive alcune equazioni, le trasforma e infine ne deduce il risultato. Gli allievi imparano la dimostrazione e sono poi in grado di ripeterla.

Certo la dimostrazione può venir descritta in termini di un certo numero di operazioni e tutte queste, per il problema della validità, si devono prendere in considerazione. Ma quello che importa veramente è forse un tale aggregato di proposizioni?

Alcuni giorni dopo l'insegnante chiama un allievo alla lavagna e gli chiede di dimostrare l'eguaglianza degli angoli. Se ora l'allievo ripete parola per parola quello che gli è stato insegnato, saremmo

imbarazzati a stabilire se ripete alla cieca, come uno schiavo, quello che ha sentito, oppure se ha afferrato, ha capito.

Talvolta accade che l'allievo non ricorda esattamente, e scrive:

$$a + b = 180^\circ$$

$$c + d = 180^\circ$$

Poi, sfacciatamente: dunque $a = c$. Altri si sentono disorientati, hanno l'aria disperata, oppure assumono un'espressione stupida, da pecore. Altri ancora possono fare

$$a + b = 180^\circ$$

$$b + c = 180^\circ$$

$$a = 180^\circ - b$$

$$b = 180^\circ - c$$

e poi rimangono egualmente senza risorse.¹

Ma potete anche trovare soluzioni come:

$$a + d = 180^\circ$$

$$c + d = 180^\circ$$

$$a = c$$

Alcuni allievi ridono di questo: « Guarda! Ha fatto due sbagli! » Ma l'allievo veramente bravo dice, o sembra dire, a se stesso: « Perché mai dovrei curarmi dei termini? Non ha importanza in che modo lo risolvo ». L'insegnante chiede se non può scrivere la prova esattamente come gli era stata data; ed egli scrive con sicurezza:

$$b + c = 180^\circ$$

$$c + d = 180^\circ$$

$$b = d$$

Questo è certamente un passo nuovo, ma costituisce un cambiamento alquanto diverso da quelli apportati dal primo allievo.

Vediamo che il « numero di errori » non è decisivo. Un solo errore rende la risposta un caso B, un procedimento insensato; due « errori » può darsi che portino al successo e può darsi di no, le

¹ Cfr. Capitolo I, pag. 23 e segg. Atti così sciocchi non sembrano caratteristici del comportamento dei bambini in generale: sembra diventino possibili principalmente in base all'insegnamento tramite ripetizione meccanica, ecc.

operazioni possono essere sensate o meno. Due « errori » insieme possono essere indice di una sensata comprensione. Che cos'è decisivo? Torneremo più avanti su questo punto.

Alcuni allievi rimangono gravemente turbati solo che l'insegnante usi un diagramma con lettere diverse da quelle consuete. Con questo, tuttavia, non si è provato che « la mente è completamente regolata da abitudini ». ² È piuttosto una prova che questi particolari individui rimangono ciecamente attaccati a « ciò che è stato loro insegnato ». Può darsi che altri siano un po' sorpresi dal cambiamento, ma quello che cercano di fare è una cosa diversa dalla ripetizione servile, insensata.

Eccovi alcuni esempi per esaminare soluzioni A e B.

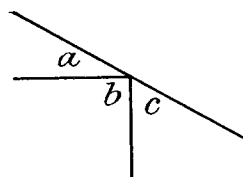


FIG. 59

1. Abbiamo una linea retta; altre due linee formano un angolo noto, ad esempio 90° . Se qualcuno applica coraggiosamente in questo caso i passaggi della dimostrazione appresa, dimostra di non aver capito nulla. Questo è un compito B.

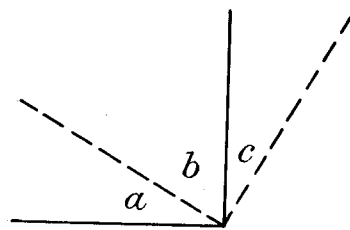


FIG. 60

2. C'è un angolo retto. Le due linee tratteggiate formano anch'esse un angolo retto. Alcuni si rifiutano di tentare la soluzione, « Ma noi, professore non lo abbiamo mai fatto! ». Ma alcuni procedono coerentemente, benché la situazione sia molto mutata. Questo è un compito A.

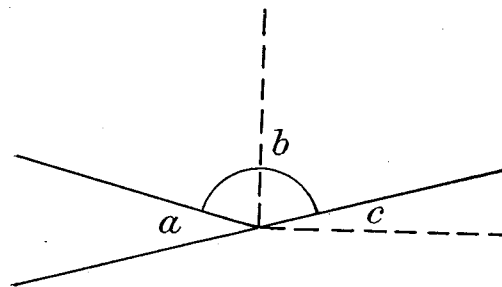


FIG. 61

3. Si traccia l'angolo a e si prolunga uno dei suoi lati a formare l'angolo b ; b è bisecato dalla verticale tratteggiata. Si aggiunge una quarta linea che forma un angolo retto con la linea bisettrice. Il compito è di dimostrare l'uguaglianza degli angoli a e c . Il lettore può scoprire da solo se questo è un caso A oppure B.

² THORNDIKE, E. L., *The psychology of algebra*, pag. 458 (New York, Macmillan, 1920). Vedere il capitolo sesto su Thorndike. - M. W.

II

Vi racconterò ora le esperienze che ebbi quando diedi, all'inizio, il compito di provare l'eguaglianza dei due angoli, $a=c$, senza mostrare come bisogna procedere. Il compito è duro, la maggior parte dei soggetti non riescono. Spero che il lettore veda da solo il perché: le operazioni strutturali necessarie non sono facili da scorgere (cfr. pag. 115 segg.). Illustrerò questo fatto con tre esempi:

1. Prima di tutto vi riferirò di un soggetto (adulto) che procedette in stretta conformità con alcune classiche osservazioni della logica tradizionale. Egli disse: « Vediamo, quali proporzioni di carattere generale ho a mia disposizione? » Dopo un po' si diede da fare a scrivere proposizioni vere:

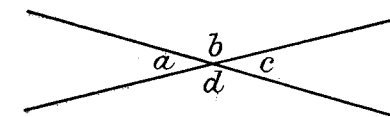


FIG. 62

$$\begin{aligned} a+b &= 180^\circ \\ a+d &= 180^\circ \\ b+c &= 180^\circ \\ c+d &= 180^\circ \\ a+b+c+d &= 360^\circ \\ (a+b)-(c+d) &= 0 \end{aligned}$$

Poi si mise alla ricerca di altre proposizioni di tal genere. Dopo un po' di tempo cominciò ad operare delle permutazioni, combinando coppie di equazioni, sommandole, sottraendole, cercando di vedere se mai ne uscisse qualcosa. Arrivò finalmente all'equazione $b=d$, ma non pensò di fermarsi e continuò finché giunse al risultato $a=c$.

Il procedimento era simile alla risposta che un compositore diede ad un visitatore curioso che desiderava sapere da dove prendesse le idee per le sue melodie, come le trovasse. Il compositore, annoiato dal visitatore, rispose: « Oh, è semplice; prendo un certo numero di note e compio alcune permutazioni ».

2. Eccovi un esempio notevole di un processo che si svolse sensatamente. Per fortuna il soggetto ragionava ad alta voce (qualche volta borbottando). Mi dispiace di non aver potuto effettuare una ripresa cinematografica con colonna sonora per mostrare gli illuminanti cambiamenti di espressione nella voce e nel viso, nel corso del suo lavoro.

Osservando il disegno disse lentamente: « Ecco, questi non sono due angoli separati, la cui posizione reciproca sia arbitraria ». Chiestogli di spiegarsi meglio, fece questo disegno:



FIG. 62 A



FIG. 62 B

« Non sono angoli come questi: sono parti che nella figura si corrispondono. Le linee rette passano da parte a parte senza deviare. Questo fatto deve avere qualcosa a che vedere con l'eguaglianza degli angoli!... Parlando di angoli, il fatto di "essere rettilineo" significa 180° ... » Allora fece questo disegno:

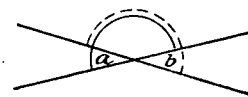


FIG. 63

e disse: « Ciò che "a" è come parte dei suoi 180° , "b" è come parte dei suoi 180° ! » La rimanenza è in entrambi i casi l'angolo in alto, che è identico per tutti e due! Segnò questo angolo con la lettera c e scrisse queste due equazioni:

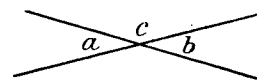


FIG. 64

$$\begin{aligned} a + c &= 180^\circ \\ b + c &= 180^\circ \end{aligned}$$

E continuò: « Ciò che a è in $a + c$, b è in $b + c$ », e scrisse:

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - c \\ b &= 180^\circ - c \end{aligned}$$

« Dunque », concluse « $a = b$ ».

3. In un altro procedimento in cui i primi passaggi erano alquanto simili, mentre gli ultimi erano del tutto diversi, il soggetto vide la necessità di intendere a, e allo stesso modo b, come parti di 180° ; ma dapprima non vide quanto era richiesto in merito alla rimanenza. Egli procedette nel seguente modo: « Devo usare a come parte di 180° , devo usare b come parte di 180° ». Tracciò il disegno:

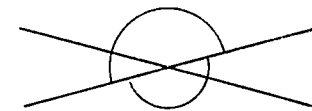


FIG. 65 A

Poi esitò, dicendo: « C'è un'altra possibilità di accoppiamento ». Raggiante, mutò la figura in:

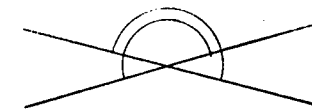


FIG. 65 B

III

Un processo sensato, come quello descritto nei nostri due ultimi esempi, comporta operazioni di raggruppamento e di comprensione della struttura, dell'uguaglianza, della simmetria, del « giocare lo stesso ruolo », dell'avere la stessa funzione nel gruppo; di evidenziare le relazioni e in modo particolare quella relazione ρ con cui si afferra il rapporto interno tra il raggruppamento richiesto e la struttura data.

Probabilmente il lettore ha già visto che cosa vi è di essenziale nei casi e nelle reazioni A e B. Ciò che importa nelle reazioni A e B (vedi figg. 59-61, pag. 112) non è la ripetizione di alcuni elementi, il copiare un aggregato di passaggi; ciò che conta è il problema della struttura. Per stabilire l'eguaglianza di a e c, l'angolo a viene visto come parte di 180° , come parte cioè dell'angolo $a + b$; allo stesso modo c viene visto come parte dell'angolo $c + b$ (che è uguale). Avendo il medesimo resto, gli angoli a e c devono essere uguali. Il problema di struttura nelle due equazioni dunque è:

$$\begin{array}{ccc} a + b & = & 180^\circ \\ \uparrow \text{identica} & & \uparrow \text{si sa che} \\ c + b & = & 180^\circ \\ \downarrow \text{rimanenza} & & \downarrow \text{sono uguali} \end{array}$$

FIG. 66

Così, ciò che conta è il modo in cui le due equazioni sono in relazione strutturale l'una con l'altra, ed un procedimento sensato cerca queste esigenze di struttura, mentre le reazioni B le violano, non le vedono. Le reazioni A sono determinate da esse, ma trattano liberamente gli elementi; non ha alcuna importanza il fatto che i passaggi della dimostrazione vengano « ripetuti correttamente ».

In termini generali la struttura è:

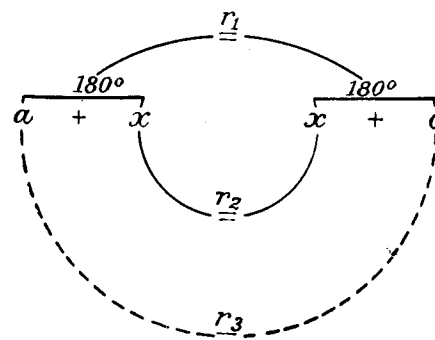


FIG. 67

Non sono decisivi gli elementi, ma il modo di formare i gruppi tra le relazioni:

r_1 , l'eguaglianza delle sotto-unità;

r_2 , l'identità della rimanenza;

che portano a r_3 , l'eguaglianza dei due angoli.

Questo non è un aggregato qualsiasi di relazioni o di operazioni: esse sono collegate al compito, sono parti sensate di un'unità chiusa.

Alcuni teorici riconoscono che la visione d'insieme è necessaria, tuttavia ancora non centrano il problema. Essi formulano certe reazioni B, come, ad esempio, la seguente: « Il soggetto ha sbagliato poiché non ha tenuto conto di tutti gli elementi e di tutte le relazioni ». Tutti gli elementi? Tutte le relazioni? Una caratteristica dei processi sensati è proprio questa, di *non* prendere in considerazione tutti gli elementi. Se viene data questa figura (fig. 68) con il compito di dimostrare che $a=b$, è sensato *non* preoccuparsi della quinta linea. In breve, « insieme » non vuol dire « tutto »; l'insieme parla della struttura degli elementi, in quanto essi devono venir messi in rela-

zione tra loro, in vista del compito; l'insieme, infine, si riferisce alla « buona forma ».

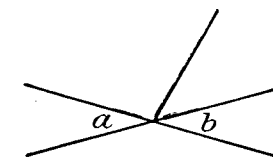


FIG. 68

Il lettore potrà avere un chiarimento se applica lo schema della struttura che è pag. 116, alle reazioni A e B. In alcuni dei casi B (i casi insensati o quelli disperati) manca una relazione principale; in altri, come nella figura 69, ve ne sono due. Ma i procedimenti sono compiuti alla cieca a causa della posizione strutturale degli elementi

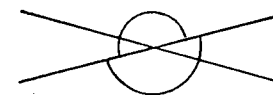


FIG. 69

che essi mettono in relazione. Questo porta alla conclusione che non sono decisive le relazioni da sole, ma lo sono le relazioni rispetto alla loro posizione in seno alla buona struttura.

Nella figura a pag. 116 la relazione 1 non è una relazione fra elementi, ma fra due gruppi o sotto-unità, che vengono visti come simmetrici. La loro eguaglianza (relazione 1) riveste un ruolo decisivo nel processo, qualunque sia l'elemento, 180° , 90° , ecc. La relazione 2 è una relazione tra elementi « omotipi » nelle due sotto-unità. La relazione 1 assieme alla relazione 2 implica ragionevolmente la relazione 3 che si cercava: $r_1 r_2 \supset r_3$. (Il logico non si deve sbagliare circa la formula: $r_1 r_2$ portano a r_3 ; non si tratta di una relazione transitiva. La formula non ha senso se le relazioni non vengono intese nelle loro posizioni strutturali).

Il compito di trovare la dimostrazione del teorema, $a=c$, senza aiuto, sembra molto più difficile che non, ad esempio, il problema dell'area del parallelogrammo. Perché?

Oltre al punto citato prima, che la ragione per cui si chiede la dimostrazione è spesso del tutto incomprensibile, la ragione principale sembra questa: la situazione richiede che la figura venga vista

in due organizzazioni, ab/bc — simmetriche, d'accordo, ma che si sovrappongono, mentre ancora si tende ad accoppiare i due angoli critici a e c .

Considerare l'angolo a come « l'angolo che riveste lo stesso ruolo in ab di quello che c riveste in bc » richiede una chiarezza mentale considerevole.⁸ Vi sono dei soggetti che si aiutano disegnando due figure:



Fig. 70

E anche nell'insegnamento sembra che talvolta questo aiuti la comprensione.

IV

Il fatto decisivo nelle reazioni A e B era la relazione strutturale delle coppie di equazioni; ma questo non basta. In casi genuini, spesso l'idea stessa della prima equazione, di accoppiare l'angolo dato con il terzo angolo, viene alla luce poiché si osserva che ciò può venir fatto simmetricamente per entrambi gli angoli in questione. Non si tratta di un'operazione in sé e per sé, ma di un'operazione giustificata in quanto parte di uno schema. Si avverte che le due operazioni (più avanti equazioni) si uniranno, e in questo modo porteranno alla soluzione. In tali casi non vi è semplicemente la successione di due atti, ma quando il primo viene alla luce è già concepito *come* il primo di una coppia. Lo si scrive come un'espressione separata, ma non lo si concepisce da solo.

Il pensiero non procede di necessità, come molti credono, passando semplicemente da un'espressione all'altra in successione, formulando proposizioni una dopo l'altra; questo accade qualche volta, ma spesso nel vero atto del pensiero, nei processi genuini, ciò non avviene. Qui il procedimento va dalle qualità d'insieme osservate, agli elementi visti come parti del tutto.

⁸ Spesso, semplicemente dopo aver avvertito le esigenze strutturali, il procedimento diventa più facile ricorrendo all'algebra.

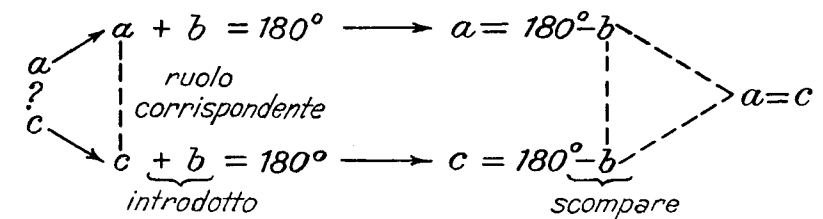


Fig. 71

La linea di pensiero, la direzione non consiste, in questo caso, in un'unica successione di elementi: vi è una doppia direttrice simmetrica, poiché ciascun angolo critico viene trattato come parte nel suo intero, formato dall'introduzione del terzo angolo, che in seguito può di nuovo sparire attraverso la simmetria delle operazioni.

Un paragone: alcuni atti richiedono che entrambe le mani cooperino simmetricamente, l'una con l'altra, per integrare i rispettivi movimenti. In alcuni casi sarebbe insensato procedere con una semplice successione di elementi separati: date, ad esempio, due carte da gioco ad un bambino e chiedetegli se sa farle stare in piedi. Il bambino può prendere una carta e inclinarla di circa 30° gradi rispetto alla verticale, un'azione che risulta sensata soltanto in relazione all'idea della struttura ultimata: farlo con una carta sola senza vedere che cosa si farà con l'altra è insensato. Vi sono dei soggetti che sono stati educati in modo tale da essere ostacolati nel loro pensiero dall'abitudine di procedere solo in successione, passaggio per passaggio. Ma non si dovrebbe supporre di dover sempre fare una cosa dopo l'altra, con l'idea « Mi occuperò dopo delle altre cose ». Quello che fate, cercate anzitutto di vederlo nel suo contesto; trattatelo come parte di tale contesto.

L'abitudine alla successione (e così pure la teoria diffusa che il pensiero proceda in questo modo per natura)⁴ è dovuta alla sua adeguatezza in situazioni sommative in cui un'operazione è unita ad altre in maniera puramente aggiuntiva. È dovuta inoltre al fatto che non possiamo dire due frasi alla volta, che non possiamo scrivere simultaneamente due proposizioni, che nelle relazioni siamo costretti a esporre una cosa dopo l'altra... È questa una delle ragioni che rende spesso utili i diagrammi.

⁴ Cfr. la formulazione di Kant secondo il quale il pensiero umano è di necessità soltanto *deduttivo*.

In più, l'abitudine a procedere semplicemente per successione è spesso causata dall'esigenza di esattezza, di correttezza in ogni passaggio: cose davvero necessarie, naturalmente, ma che non bastano. E ancor più è dovuta al fatto che l'espressione esatta, o logica, l'espressione formale sembrava possibile soltanto in una somma di elementi giustapposti: per ripetere, tutto questo in connessione con l'assunzione assiomatica che il pensiero è, deve essere, per natura, verbale, che la logica è questione di linguaggio: assunzioni queste che sono entrambe null'altro che generalizzazioni alla cieca. Avere una visione dell'insieme sembrava escludere la possibilità di giungere ad esatte formulazioni.

CAPITOLO QUARTO

La famosa storia del piccolo Gauss

1

Per prima cosa, una domanda al lettore.

In una casa nuova costruiscono una scalinata a ridosso di una delle pareti, nell'ingresso. Ha diciannove gradini. Il fianco non ap

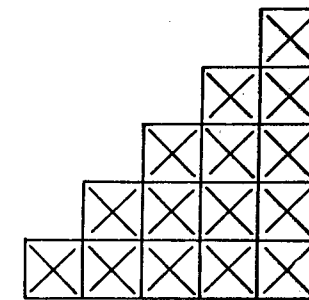


FIG. 72

poggiato alla parete deve venir rivestito con pannelli quadrati intagliati, grandi come la sezione di uno dei gradini. Il falegname dà ordine all'apprendista di andarli a prendere in bottega. Questi domanda: « Quanti pannelli devo portare? » « Vedi tu », replica il falegname. L'apprendista comincia a contare: $1+2=3$; $+3=6$; $+4=10$; $+5=...$

Il falegname si mette a ridere: « Perché non usi il cervello? Li devi proprio contare uno per volta? »

Caro lettore, se fossi tu nei panni del garzone, che cosa faresti?

Se non riuscite a trovare una strada migliore, vi chiedo: « Cosa si dovrebbe fare nel caso che la scala non fosse a ridosso della parete e richiedesse gli stessi pannelli quadrati di legno su entrambi i lati? »

Vi sarebbe d'aiuto suggerirvi di pensare allo schema dei due lati ritagliati sulla carta? »

Queste che vi ho fatto sono alcune delle domande sperimentali attraverso cui ho studiato i caratteri della vasta gamma di problemi che comporta il compito di Gauss.

* *

Vi racconterò ora la storia capitata al famoso matematico Gauss, quand'era bambino. La storia è pressappoco questa: egli a sei anni frequentava la scuola elementare di una cittadina. Il maestro diede un compito di aritmetica e disse alla classe: « Chi di voi troverà per primo la somma di $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$? » Assai presto, mentre gli altri erano ancora immersi nei calcoli, il piccolo Gauss alzò la mano: « *Ligget se* » disse, che significa « Ecco fatto ».

« Come diavolo hai fatto a finirlo così presto? » esclamò il maestro sorpreso. Il piccolo Gauss rispose — naturalmente non sappiamo esattamente che cosa rispose, ma in base a quello che ho trovato facendo gli esperimenti, penso che sia stato qualcosa come: « Se l'avessi fatto sommando 1 più 2, poi 3 al risultato, poi 4 al nuovo risultato, e così via, avrei impiegato molto tempo, e cercando di arrivare presto molto probabilmente avrei fatto degli sbagli. Ma vedete, $1+10$ fa undici, 2 più nove fa di nuovo — deve fare! — 11 . E così via! Vi sono cinque coppie di questo tipo: 5 volte 11 fa 55 . » Il ragazzino aveva scoperto il nocciolo di un importante teorema.¹ In diagramma:

non

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+\dots \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 3+3 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 6+4 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 10, \dots \end{array}$$

bensi

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10

4

FIG. 73

$$^1) S_n = (n+1) \frac{\pi}{2}$$

Lo stesso problema che quell'insegnante aveva posto alla sua classe, io lo posi a molti soggetti, anche a bambini di età diverse, per vedere se veniva trovata una buona soluzione; e quali spinte, quali condizioni, la potevano provocare. Per studiare le caratteristiche dei passaggi che la soluzione comporta, usai variazioni sistematiche, alcune delle quali descriverò più avanti. Qualche volta diedi delle serie molto lunghe, e dissi subito: « Risolvete il problema senza usare le scomode addizioni »; oppure rimasi semplicemente in attesa delle reazioni.

Eccovi i migliori tipi di procedimenti spontanei che ho trovato.

1. Dapprima non si vedeva nessun modo di trattare il problema. Poi: « Se bisogna sommare una serie di numeri, è certo esatto sommarli come vengono, ma è noioso ». Improvvisamente « Questa non è una successione qualsiasi; i numeri aumentano costantemente, uno dopo l'altro: può darsi che questo fatto abbia... *deve* avere qualcosa a che fare con la somma. Ma in che modo le due cose siano unite (la forma della successione e la sua somma), quale sia la relazione interna tra di loro, questo risulta oscuro, non è chiaro; in qualche modo lo sento, ma non riesco a chiarirlo. »

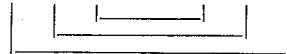
Dopo un po': « La serie ha una direzione nel suo aumentare, una somma non l'ha. Ora: l'*aumento* da sinistra a destra comporta una *diminuzione* corrispondente da destra a sinistra! Questo *ha* a che vedere con la somma. $\longrightarrow$ sempre più; $\longleftarrow$ sempre meno; con lo stesso andamento. Se vado da sinistra a destra, dal primo numero al secondo, vi è un aumento di uno; se vado da destra verso sinistra, dall'ultimo numero a destra a quello che immediatamente lo precede, vi è la diminuzione di uno. Dunque la somma del primo numero con l'ultimo deve essere uguale alla somma della coppia interna successiva. E questo deve valere dall'inizio alla fine!

« Rimane solo un problema: quante sono le coppie? Ovviamente il numero delle coppie è uguale alla metà di tutti i numeri, dunque alla metà dell'ultimo numero ».

In sostanza la soluzione del problema comporta un nuovo raggruppamento, una riorganizzazione della serie. Non si tratta di un riordinamento alla cieca; esso viene ottenuto ragionevolmente, mentre il soggetto cerca di afferrare la relazione interna tra la somma della serie e la sua struttura. Nel processo i vari elementi assumono chiaramente un nuovo significato: appaiono determinati funzionalmente in modo nuovo. Il nove non viene più visto come 8 più 1, è diventato 10 meno 1, e così via.

Se si ottiene la formula generale $S_n = (n+1) \frac{n}{2}$ in un modo simile a questo, allora si comprendono i termini della formula alla luce di questa struttura: $(n+1)$ rappresenta il valore di una coppia, $\frac{n}{2}$ il numero delle coppie. Molti, però, conoscono la formula soltanto, completamente alla cieca. Per essi tutte le forme: $(n+1) \frac{n}{2}$, oppure $\frac{n+1}{2} n$, oppure $\frac{n(n+1)}{2}$, oppure $\frac{n^2+n}{2}$ sono semplicemente equivalenti.² A essi sembra che i due n indichino lo stesso elemento. Non si rendono conto che, nella prima formula, n nell'espressione $n+1$ è membro di una coppia, mentre n in $\frac{n}{2}$ indica il numero di termini nella serie, per determinare il numero delle coppie. Naturalmente le quattro formule danno lo stesso risultato finale e sono in certo modo equivalenti; non lo sono però dal punto di vista psicologico.³ In realtà sono anche logicamente differenti se si considerano sotto l'aspetto della loro forma e funzione, e non soltanto in termini di equivalenza esterna. Naturalmente questa può essere considerata una questione di logica, soltanto se non escludiamo dalla logica il significato funzionale dei termini, la questione genetica, la questione dell'accostarsi alla formula: del trovare, o capire sensatamente la formula.

La formula vale in egual modo quando la serie termina con un numero dispari, ad esempio, 1 2 3 4 5 6 7. Qui il rag-



gruppamento descritto provoca talvolta qualche esitazione: che cosa bisogna fare con il numero al centro che non può venire accoppiato? In questo tipo di procedimento è richiesto un passaggio ulteriore. Osservando il singolo numero si arriva ad un'improvvisa scoperta:

« Questo deve essere una mezza coppia, $\frac{n+1}{2}$! » E dopo una

² Anche, ad esempio, $\frac{(n+1/2)^2}{2} - 1/8$. Oppure confrontate una generalizzazione cieca della formula $\frac{n^2+n}{2}$ in $\frac{n^2+n}{2}$.

³ La differenza risulta evidente in modo oggettivo nelle risposte a compiti con qualche variante. Vedi pag. 128 nota 7.

breve riflessione si trova che ciò non cambia la formula: vi sono tre coppie e c'è la rimanenza al centro, intesa ora come mezza coppia.⁴

Vi sono altri modi di procedere in maniera efficiente e sensata. Il seguente procedimento di un ragazzo di undici anni è in linea con quanto ho appena descritto. Dopo che io gli avevo semplicemente posto la domanda: « Quanto fa $1+2+3+4+5+6+7+8+9$? », egli chiese, non troppo soddisfatto, « Li devo sommare? » « No », risposi. Sorridendo improvvisamente, disse: « L'ultimo numero è nove. Otto più uno, che è il primo numero, fa anche nove, e così deve essere per le altre coppie... »; poi trovò il risultato.

2. Un'altra via scoperta da un ragazzo di dodici anni iniziava in modo diverso. Il compito era: $1+2+3+4+5+6+7$.

Avvertito di non risolverlo sommando un termine dopo l'altro, disse lentamente: « I numeri aumentano costantemente... » E poi, improvvisamente contento, « Oh, ho un'idea! Prendo semplicemente questo numero al centro e lo moltiplico per il numero dei termini della serie — che naturalmente è uguale all'ultimo numero ». Questo per lui costituì chiaramente una scoperta. Chiestogli di mostrare quello che intendeva dire, egli prese il numero centrale 4 e lo moltiplicò per 7. Quando gli fu assegnata una serie che finiva con 8, egli prese il valore di mezzo tra 4 e 5, cioè $4\frac{1}{2}$.

Nei termini di una formula generale, questo significa

$$c \cdot n \text{ (valore centrale moltiplicato per } n\text{), ovvero } \frac{n+1}{2} \cdot n$$

La formula ha una struttura diversa dalla prima in cui $n+1$ era la somma di ciascuna coppia, e $\frac{n}{2}$ il numero delle coppie.

Vollì chiarire il significato di quello che aveva detto e come avesse raggiunto la soluzione; il ragazzo non fu in grado di dare delle chiare formulazioni matematiche, ma disse: « I numeri crescono regolarmente. Questo significa che per la somma il valore centrale ha un'importanza: i numeri a destra di esso aumentano.

$$^4) \quad (n+1) \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = (n+1) \frac{n-1}{2} + (n+1) \frac{1}{2} = (n+1) \frac{n}{2}$$

coppia $\left[\begin{array}{l} \text{numero di} \\ \text{coppie intere} \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{l} \text{mezza} \\ \text{coppia} \end{array} \right]$

a sinistra diminuiscono allo stesso modo, in modo che viene aggiunto a destra quello che manca a sinistra ». In diagramma:

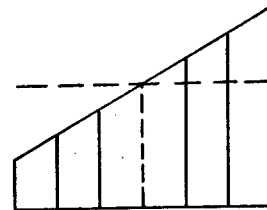


FIG. 74

3. Il procedimento seguente era diverso per struttura: rendendosi conto del regolare carattere ascendente della serie, il soggetto vide il compito di trovare la somma come « molto difficoltoso a causa del bordo frastagliato ».

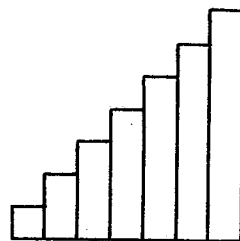


FIG. 75

« Ma » — e a questo punto il volto del soggetto si illuminò — « posso far sparire facilmente questa difficoltà. Se io unisco questa scala ad un'altra invertita, esse dovranno combaciare e dare una figura regolare senza alcuna complicazione. La somma è chiaramente metà della base per l'altezza, $n \cdot (n+1)$ ».⁵

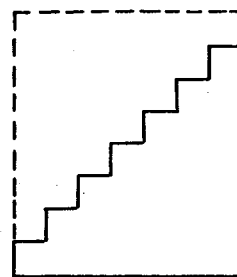


FIG. 76

⁵ Cfr. Capitolo I, pag. 57 segg. La difficoltà di struttura viene compresa e

Questo fornisce una base sensata al ben noto procedimento usato dall'insegnante quando dice: « Per ottenere la somma di una serie di questo tipo, scrivete tutti gli addendi, poi tornate a scriverli in ordine opposto e sommate ciascuna coppia verticale. Tutte le somme sono uguali ».

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 58 + 59 + 60 \\ 60 + 59 + 58 + 57 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 61 + 61 + 61 + 61 + \dots + 61 + 61 + 61 \end{array}$$

Ho trovato un buon numero di persone che davano questo procedimento come soluzione finale; dicevano che l'avevano imparato così a scuola. Chiedendo loro perché scrivessero la serie due volte, invertendola nel secondo caso, erano tutti imbarazzati e non sapevano che rispondere. Quando insistevo: « Quello che io voglio è la somma della serie, perché trovare prima il doppio della somma? », nali", " differenze di significato nei termini"? Quello che conta nella maggior parte dei casi ottenevo questa risposta: « Be', in fondo porta alla soluzione ». Non erano in grado di spiegare come potesse aver avuto origine l'idea di raddoppiare. Devo confessare che io stesso sono stato per lungo tempo imbarazzato a capire in che modo si potesse giungere ragionevolmente all'idea di raddoppiare: mi era sembrato un espediente, come appare a molti, una scoperta a casaccio.⁶

Quando mostrai questi risultati ad un matematico, questi disse: « Perché si preoccupa di quelle che lei chiama " differenze funzionali ", " differenze di significato nei termini"? Quello che conta è la formula, che è identica in tutti i casi ».

Questo atteggiamento è certamente giustificato se ciò che importa non è altro che la correttezza e la validità del risultato finale. Ma nel momento in cui si cerca di arrivare al processo psicologico che ha luogo nel pensare produttivamente, *bisogna* indagare, vedere

fatta scomparire: i due elementi che creano difficoltà combaciano e svaniscono nell'insieme strutturalmente chiaro.

⁶ Cfr. un procedimento simile: ottenere l'area di un triangolo raddoppiandolo in un parallelogramma, oppure, in particolare, raddoppiare un triangolo rettangolo in un rettangolo quando ne viene richiesta l'area.

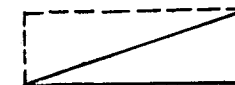


FIG. 77

i termini nel loro significato funzionale. Sono questi che fanno raggiungere il risultato nei processi sensati, produttivi; essi costituiscono la differenza essenziale tra il trovare la formula in un modo razionale e il trovarla imparando alla cieca, oppure in modo fortuito, per prove ed errori.

Le operazioni di struttura nei diversi procedimenti che abbiamo descritto sono per alcuni aspetti diverse.⁷ Vi sono però alcune significative identità: prima di tutto il problema viene veduto, compreso; richiede che venga afferrata la concreta struttura della serie alla luce del problema. Lo scopo di scoprire la relazione interna tra la struttura e il compito porta ad un riordinamento, ad una nuova comprensione strutturale. I passaggi e le operazioni non appaiono affatto come una sequenza fortuita, arbitraria; vengono piuttosto ad esistere come parti dell'intero processo, in un'unica linea di pensiero. Vengono eseguite in vista dell'intera situazione, della loro necessità funzionale, non così a caso, alla cieca, e neppure come ripetizione sbadata di un'antica connessione basata sull'esperienza.

Sebbene l'intero processo talvolta non duri più di un minuto (come nel caso dei due ragazzi ricordati), l'idea giunge spesso

⁷ L'organizzazione, il raggruppamento, eccetera, nei tre esempi corrispondono alle seguenti formule:

$$\begin{array}{llll}
 1. & S & = & (n + 1) \times \frac{n}{2} \\
 & & & \text{valore di una coppia} \quad \text{numero delle coppie} \\
 2. & S & = & c \left[= \frac{n + 1}{2} \right] \times n \\
 & & & \text{valore centrale} \quad \text{numero dei termini} \\
 3. & 2S & = & (n + 1) \times n \\
 & & & \text{una coppia} \quad \text{numero delle coppie} \\
 & & & \text{(o altezza)} \quad \text{(o base)}
 \end{array}$$

Queste differenze nel raggiungere la soluzione hanno anche conseguenze oggettive: sembrano anche più facili che le serie dispari in 1 a causa della complicazione della mezza coppia; se il procedimento 1 è stato trovato o mostrato con una serie pari e, come prova, viene presentata una serie dispari, spesso compaiono difficoltà: esitazione, tempo di reazione più lungo. Il caso opposto sembra avvenire nel procedimento 2: una serie dispari sembra più facile per la presenza di un termine di mezzo, mentre in una serie pari questo manca; se il procedimento 2 è stato trovato o mostrato con una serie dispari e, come prova, viene data una serie pari spesso vi è esitazione. In 3 non esiste una tale differenza rispetto a serie pari o dispari e spesso una serie lunga è trattata più facilmente che in 2, perché non si deve trovare il centro.

in un modo colloidale, dapprima in termini di direzioni, di linee generali di riordinamento, ecc. Spesso ci vuole del tempo prima che la situazione divenga veramente lucida, completamente chiara; questo accade soprattutto quando si tratta di trovare la formula. Una volta avuta l'idea, i soggetti sono in grado di scoprire certe qualità strutturali dell'equazione molto prima di riuscire a scrivere la formula in termini concreti. Che questa fase del pensiero appaia nebulosa è dovuto in gran parte, penso, al fatto che termini precisi per indicare le qualità strutturali, le qualità d'insieme, spesso mancano, non sono mai stati elaborati. Naturalmente il problema è davvero risolto soltanto dopo che tutti gli elementi presenti si sono cristallizzati. Ma il pensare a un processo di compensazione simmetrica costituisce sovente la parte essenziale del procedimento: in questa fase accade spesso che qualcuno abbia le idee chiare sul rifiutare formule proposte che non si adattino alle qualità strutturali vedute, assai prima di essere in grado di scrivere la formula positiva. Questa situazione è simile a quella di un musicista dotato di inventiva quando ha in testa l'idea di una melodia nel suo carattere d'insieme, e cerca di concretizzarla sul pianoforte: produce qualcosa che scarta senz'altro come non valido, ecc., fino a che non trova le note adatte per quello che ha in mente.

II

Vi darò alcuni esempi dei compiti che ho usato nello studio sperimentale del problema di Gauss. Come nel problema del parallelogrammo, venne mostrato a soggetti di età diversa, specialmente a bambini, il metodo di Gauss (pag. 122) in un esempio: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$; di solito senza la formula, qualche volta anche con essa. Poi vennero dati uno o più compiti simili a quelli che appaiono qui sotto, per vedere che cosa avrebbero fatto i soggetti spontaneamente, di quale aiuto avrebbero avuto bisogno, quale tipo di aiuto li avrebbe veramente facilitati, ecc.

Il lettore può immaginare la natura delle reazioni: come vi fossero talvolta dei notevoli processi produttivi (reazioni A) (specialmente con i problemi *d* ed *e*); come talvolta i soggetti approfondissero, ampliassero la formula, e come vi fossero talvolta delle reazioni B, stupide, cieche.

Provi il lettore da solo. Veda che cosa gli succede nel risolvere questi problemi (in un modo o nell'altro sono tutti compiti A):

Qual è la somma di:

- a. $1+2+3+4 \dots +58+59$
 b. $17+18+19+20+21+22+23$
 c. $1+2+3+4 \dots +16+17+18+19$
 bc. $96+97+98 \dots +102+103+104$
 d. $1+5+9+13+17+21$
 cd. $9+11+13+15+17+19+21$

Qual è il prodotto di:

- e. $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32$
 ec. $5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 160$
 f. $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$

Ho detto che questi sono tutti in un modo o nell'altro problemi A: spero che riusciate a vederlo.

In a) la serie originale è prolungata. Se è stata insegnata la formula, si tratta semplicemente di un caso particolare della formula stessa.

b) Non inizia con 1. Che cosa avete fatto? Avete trovato qualche via diretta? Naturalmente ho reso le cose più facili per voi scegliendo un numero tondo, un numero di rilievo. Avete pensato ad una formula comprensiva?

La serie c) ha una lacuna. Vi è stata di disturbo?

Nella serie d) la differenza fra i termini è mutata. Che cosa avete fatto?

Le serie e) e f) richiedono il prodotto. Ne siete rimasti sorpresi? Avete trovato un modo per ottenerlo? Siete riusciti a scrivere la formula?

Naturalmente non insegnavo formule ai bambini piccoli, né le richiedevo. Spesso sceglievo numeri più semplici che nelle serie b) e bc), oppure casi più semplici che la serie e), f); non però necessariamente serie più brevi, anzi spesso più lunghe. Bisogna stare attenti alla relazione che vi è tra i compiti successivi. La cosa più bella è saltare dal compito originale agli ultimi problemi, d) oppure e).

Spesso succedono cose interessanti, con questi compiti: si ottengono reazioni eleganti e del tutto inattese, che sono evidenti anche nelle osservazioni del soggetto; qualche volta ci si imbatte in una completa mancanza di risorse, in risposte sorprendentemente stupide o alla cieca anche in soggetti intelligenti, specialmente se sono stati accecati da atteggiamenti di abitudine o dalla ripetizione meccanica. (Cfr. Capitolo I, pag. 25). La natura sia delle reazioni sensate che di quelle senza senso mette in luce le caratteristiche psicologiche del processo di pensiero.

Per quanto riguarda i problemi di tipo e) ed f) che richiedono il passaggio dall'addizione alla moltiplicazione, posso citare il caso seguente: avevo mostrato il metodo di Gauss, nell'esempio $1+2+3+\dots+4+5+6+7+8$, ad un ragazzo di undici anni, gli diedi poi la serie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30$. « No », disse, « qui è impossibile usare quel bel metodo... », ma dopo un po' aggiunse spontaneamente: « Oh, se moltiplicassi questi numeri, andrebbe bene...! » e mostrò il raggruppamento $30 \cdot 30 \cdot 30$, scoprendo da solo il modo di applicare il metodo ai prodotti.

Quest'ultima serie, sotto forma di addizione, era un caso B; sotto quella di moltiplicazione, un caso A. Negli esperimenti fu possibile usare sistematicamente coppie di forme A e B di serie come le seguenti:

$5+10+20+40+80+160$	(caso B)
$5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 160$	(caso A)
$1+2+4+8+16+32$	(caso B)
$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32$	(caso A)

D'altra parte, in alcune serie il problema sotto forma di addizione era un caso A:

$5+10+15+20+25+30$	(caso A)
$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 30$	(caso B)

Oppure:

$1+2+3+4+5+6$	Caso originale
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	(caso B)
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12$	(caso A)
$1+2+3+4+6+12$	(caso B)

Quali casi un soggetto rifiuta, a quali applica il metodo, quali difficoltà incontra, ecc.: questi sono i comportamenti caratteristici che ci permettono di valutare la comprensione.

Eccovi alcuni esempi simili di compiti B che più facilmente provocano reazioni alla cieca. Se diamo, ad esempio, invece della serie

- a) $1+2+3+7+8+9$
 la serie b) $1+2+3+4+7+8+9$
 oppure c) $1+2+3+4+6+7$

i soggetti talvolta dimostrano un'incapacità di vedere la necessità che la posizione della lacuna sia simmetrica rispetto alla serie comples-

siva. Alcuni soggetti, d'altra parte, applicano il metodo correttamente e senza esitazione (reazioni A) in problemi del tipo *a*), mentre esitano nei problemi di tipo *b*) e *c*); sebbene problemi di questo tipo siano, da un punto di vista analitico, certamente *più* simili all'originale $1+2+3+4+5+6$ che quelli di tipo *a*). Fanno una netta discriminazione fra i tipi, cercando la simmetria necessaria e, nella maggior parte dei casi, sviluppano un procedimento appropriato, più complesso; ad esempio, in *b*) ripristinano la simmetria eliminando il 4; in *c*) aggiungono il 5 mancante, oppure cambiano il 4 in 5, eccetera. Altri esempi di coppie A-B per distinguere le soluzioni nel tipo *d*) sono i seguenti:

$$\begin{array}{ll} 1+2+3+4+5+6 & \\ \text{A } 3+5+7+9+11+13 & \text{A } 1+3+5+7+9+11 \\ \text{B } 1+2+3+4+11+13 & \text{B } 1+2+3+7+9+11 \end{array}$$

Il caso B, specialmente quando è più lungo, offre occasione di applicare ciecamente (sebbene ci voglia una buona dose di cecità) il metodo di Gauss, se il soggetto agisce davvero senza pensare. D'altra parte B viene spesso respinto a ragion veduta, oppure risolto con il metodo lungo, mentre A viene risolto sensatamente.

In questo modo si possono capire, studiare e provare quelle caratteristiche strutturali implicite nel problema di Gauss che sono « essenziali »: le caratteristiche della relazione strutturale interna tra operazioni e forma, in contrasto con altri fattori che sono strutturalmente periferici. Nei vari tipi di compiti assegnati gli elementi erano:

- in *b*), indipendenza dei fattori di struttura dalla posizione iniziale;
- in *c*), la necessaria simmetria della serie, verificata per mezzo della lacuna e della sua posizione;
- in *d*), indipendenza dei caratteri di struttura dal valore della differenza costante;
- in *e*), indipendenza della relazione interna di struttura dalla natura delle operazioni particolari, dimostrata dal *transfer* a casi di moltiplicazione, simili per struttura.

È estremamente interessante studiare quali forme di compiti siano migliori per scoprire il metodo, con o senza aiuto, ed è illuminante per i nostri problemi teorici trovare, ad esempio, che serie più corte non rendono in alcun modo più facile la scoperta, e che nemmeno $1+2+3+4+5+6$ è necessariamente più facile, ad esempio, della serie: $1+3+5+7+9+11$.

Non bisogna dimenticare questo fattore elementare ma essenziale: una serie disordinata, con i numeri alla rinfusa, presenta particolari difficoltà, sia nell'applicazione della regola che nella scoperta della soluzione. Il giusto ordine indirizza ad una visione d'insieme, mostra l'aumentare costante della serie, che è necessario. D'altra parte vi sono dei cambiamenti di ordine che non sembrano così sfavorevoli. Ciò che sembra importante non è il grado di differenza dagli elementi dell'originale, ma piuttosto il tipo di ordine che può aiutare o impedire una chiara visione dell'insieme. Nella serie

$$1+10+2+9+3+8+4+7+5+6$$

qualche volta accade che un soggetto si fermi, ed esclami: « Procede regolarmente: questi vanno in su e quelli vanno in giù », e mostra

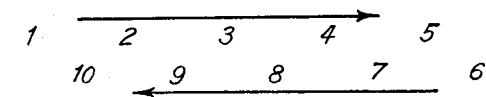


FIG. 78

oppure li accoppia,

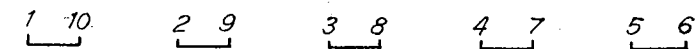


FIG. 79

Quest'ultimo procedimento si avvicina ai ben noti procedimenti « scorciatoia » usati da molti contabili per fare lunghe addizioni: cercano coppie o terzetti di numeri la cui somma sia un facile numero tondo, piuttosto che seguire l'ordine di successione. Questi procedimenti, naturalmente, mancano di quella elegante relazione con il « principio » della serie.

III

Messi di fronte al problema della somma di una serie (cfr. § 1) e senza alcun aiuto, molti non riescono a trovare la soluzione di Gauss. Perché? Che cosa rende il problema così difficile per molti? Che cosa significa quando uno dice: « C'è voluto il genio del giovane Gauss per farlo »? Oppure perché mai i ragazzini negli esempi ci-

tati lo fecero con facilità e coerenza? Che cosa c'è, psicologicamente, in fondo a questi risultati?

I compiti di Gauss comportano alcune difficoltà di struttura, e per superarle, per riuscire realmente a vedere la propria via nonostante queste difficoltà, c'è bisogno di qualche cosa. Sulla base delle mie esperienze direi che le caratteristiche essenziali delle soluzioni genuine sono:

- non essere legati, accecati da abitudini;
- non limitarsi a ripetere pedissequamente ciò che viene insegnato;
- non procedere con un modo di pensare meccanico, con un atteggiamento eminentemente analitico, con una disposizione attenta analitica, per mezzo di operazioni di analisi;

bensì osservare la situazione liberamente, a mente aperta, con una visione complessiva, cercando di scoprire, di capire in quale modo il problema e la situazione siano in relazione tra loro, cercando di capire fino in fondo, di rendersi conto, di mettere in evidenza la relazione interna che esiste tra la forma e il compito assegnato, giungendo, nei casi migliori, alle radici della situazione, illuminando e rendendo trasparenti i caratteri di struttura essenziali della serie regolare, nonostante le difficoltà.

La situazione di Gauss è strutturalmente complessa. La difficoltà principale sembra essere la seguente: è difficile vedere la relazione interna tra forma e compito assegnato (somma), in quanto:

- 1) le differenze che si elidono risultano nascoste;

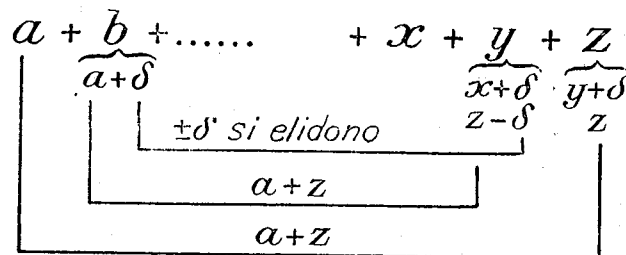


FIG. 80

e poi: 2) a causa della forma psicologicamente forte della serie progressiva $\longrightarrow$ che deve venir spezzata nelle due metà simmetriche $\longrightarrow e \longleftarrow$.

E se semplifichiamo la struttura della situazione, non soltanto

dando meno numeri, ma servendoci di problemi in cui le caratteristiche di struttura basilari non siano così nascoste?

Alcune forme di problemi simili agli esempi precedenti chiaramente facilitavano la soluzione, ad esempio:

$$99,8 + 99,9 + 100 + 100,1 + 100,2 = ?$$

$$273^3/5 + 273^4/5 + 274 + 274^1/5 + 274^2/5 = ?$$

oppure
$$\frac{271 + 272 + 273 + 274 + 275}{5} = ?$$

Ma procediamo in modo radicale, usiamo problemi in cui le differenze che devono essere compensate non siano strutturalmente nascoste. La soluzione diventa naturale se, ad esempio, chiediamo la somma di $-3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3$.⁸

Naturalmente vi sono alcuni che ancora rimangono attaccati all'atteggiamento di ripetizione, che ancora procedono alla cieca, in modo frammentario. Ma la maggior parte dei soggetti, osservando l'intera linea, ridono quando viene loro assegnata una serie di tal genere, oppure sono imbarazzati di fronte all'aria di importanza di un problema così ovvio; questo accade spesso, in pratica con tutti i soggetti. In tali casi avviene qualche volta di ottenere *senza* nemmeno porre la domanda, *senza* chiedere la somma. Se la serie è lunga, spesso risulta chiaro che la cosa non viene fatta formando veramente le coppie una per una, ma attraverso una visione della struttura caratteristica del complesso, basata sulla coerente progressione della serie. Se viene aggiunto un elemento che risulta chiaramente fuori posto, come ad esempio

$$9 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

oppure
$$-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 1 + 9 + 2 + 3 + 4 + 5$$

spesso questo elemento si distingue dagli altri, si isola.

Il nostro caso si riduce a problemi del tipo $m + a - a$; oppure $m + a - a + b - b + c - c$. L'operazione 1) richiede che a sia sommato con m ; l'operazione 2) che a venga sottratto; ma l'operazione 2) è in relazione intrinseca con l'operazione 1), poiché è il suo opposto. In questo contesto risulta chiaro che l'operazione 2) fa sì che venga disfatto ciò che verrebbe fatto con l'operazione 1), e viceversa. Que-

⁸ Cfr. anche l'esempio f a pag. 130. Il lettore lo ha visto più facilmente che e , ec , o perfino d e cd ?

sto è il loro significato strutturale: entrambe vengono viste e valutate non come una semplice somma di due operazioni, ma tenendo conto della loro relazione interna, la quale fa sì che non sia necessario (anzi sia insensato) eseguirle.

Un intuito sottile opera spontaneamente nella comprensione di relazioni come questa, nella ripugnanza a fare cose che si annullano a vicenda. Lo psicologo di mestiere può pensare anche ad analoghe tendenze nel comportamento dei topi: sembra molto difficile, spesso addirittura impossibile, insegnare a un topo come si debba correre per un labirinto nel quale ci sono parti che si annullano tra loro (vedi fig. 81).

Non dobbiamo dimenticare, d'altra parte, che ci sono situazioni, modi di eseguire il compito, in cui il fatto di fare e disfare qualche cosa diventa un'azione non stupida: un gioco ritmico, una danza, per esempio $+1-1$, $-1+1$...; oppure $-1+1$, $-2+2$, $-1+1$, $-2+2$... La simmetria dei movimenti opposti riveste un ruolo positivo importante.

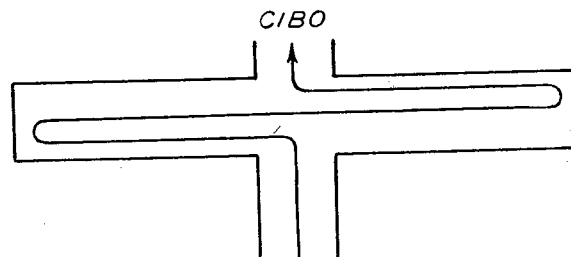


FIG. 81

Nel 1931 diedi a Miss Siemssen all'Istituto di Francoforte il compito di studiare le differenze psicologiche tra il lavoro sensato e quello insensato. A confronto con il mettere libri in ordine (metterli opportunamente sugli scaffali della biblioteca) usammo dei compiti degni di Sisifo, che solo esteriormente somigliavano al primo: file di libri dovevano venir messe sugli scaffali, poi tolte di lì e rimesse dove erano in precedenza, poi rimesse sugli scaffali, e così via... In entrambi i casi l'attività venne osservata per circa mezz'ora. I soggetti eseguirono il compito senza senso abbastanza cortesemente, sebbene con riluttanza e ovviamente con una certa difficoltà a continuare; col passare del tempo la resistenza aumentava e si manifestavano tendenze rivoluzionarie. Ma talvolta, col procedere dell'esecuzione, aveva luogo un risultato sorprendente: per alcuni soggetti il carattere del compito si tramutò in qualcosa di più simpatico, divenne una specie di danza ritmica: i libri venivano tolti e rimessi con movimenti di danza studiati; il continuare non era più tanto difficile, perché il compito si era tramutato in un gioco vivace. Tuttavia nemmeno questo poté durare a lungo.

Per ritornare al problema: il ruolo di un ordine sensato, i caratteri di un raggruppamento sensato nella situazione, diventano tecnicamente chiari se diamo ai bambini compiti dei seguenti tipi e confrontiamo i loro atteggiamenti e le loro risposte:

$$1. \quad m + a - a + b - b + c - c$$

$$2. \quad m + a + b - c - a + c - b$$

$$3. \quad m + a + b + c - a - b - c$$

oppure 4. $m + a + b + c - c - b - a$ ecc., con o senza l'addendo m .⁹

Nel primo caso otteniamo, per la maggior parte, risposte facili, pronte: « Naturalmente è m », con osservazioni occasionali del tipo: « Dovrei sempre fare e disfare? » Viene fatto l'accoppiamento sensato

$$m | + a - a | + b - b | + c - c$$

mai

$$m + a | - a + b | - b + c | - c^{10}$$

In maniera simile, con ancor più decisione, quando la serie è

$$m - a + a - b + b - c + c \dots$$

si ottiene $m | - a + a | - b + b | - c + c \dots$

non $m - a | + a - b | + b - c | + c \dots$

⁹ Anche in casi concreti come, ad esempio:

$$96 + 77 - 77 + 134 - 134$$

$$\text{oppure } 96 + 77 - 134 - 77 + 134$$

$$\text{oppure } 48 + 79 - 124 - 79 + 124$$

$$\text{oppure } 48 + 79 - 79 + 124 - 124.$$

Questo ultimo esempio in un procedimento cieco: $48 + 79 = 127$

$$127 - 79 = 48$$

$$48 + 124 \text{ eccetera.}$$

¹⁰ È illuminante per le concezioni teoretiche del problema del transfer prendere in considerazione casi A-B in forme elementari:

$$1) \text{ Originale mostrato, insegnato: } a + b - a \quad \text{es. } 35 + 14 - 35$$

$$2) \text{ Forma A} \quad c + d - c \quad 87 + 69 - 87$$

$$3) \text{ Forma B} \quad a + b - c \quad 35 + 14 - 87$$

$$4) \text{ Forma A'} \quad a + b - b \quad 35 + 14 - 14$$

In 1) il procedimento di raggruppare il primo termine con l'ultimo viene « mostrato, insegnato ». In 2) sono cambiati tutti i numeri rispetto all'esempio originale. In 3) viene cambiato molto: considerato pezzo per pezzo in termini di somma e di stimoli, è molto più simile all'originale insegnato. Ma se ha avuto luogo un po' di comprensione, il transfer avviene nei compiti 2) e 4), ma non nel compito 3).

La maggior parte dei soggetti non si preoccupa di fare la somma di $m+a$, oppure la sottrazione $m-a$, oppure se la fanno si arrabbiano con se stessi ed esclamano: « Che stupido sono! »

Nel secondo problema incontriamo un numero maggiore di procedimenti frazionanti, ciechi. Spesso si riscontrano esitazione, disagio, osservazioni come: « Questa serie deve essere messa in ordine », « Non è in ordine », e i bambini riscrivono la serie in coppie sensate.

Il terzo tipo di compito, sembra di nuovo più facile del secondo, poiché offre una immediata visione delle due metà corrispondenti; la serie può venir afferrata ancora più facilmente se i numeri dati non sono arbitrari, ma si utilizza un principio che può essere colto nella struttura dell'insieme, come in $m-1-2-3+3+2+1$, ed in altri esempi simili.

Una semplice tecnica sperimentale per lo studio di queste tendenze di raggruppamento sensato è ciò che potremmo chiamare il « gruppo quadrato ». Il problema consiste nel sommare quattro numeri, due dei quali sommati danno un numero di rilievo oppure si elidono:

$$\begin{array}{ll} 1) & +a-a \\ & -b+b \\ \text{cioè, } 1) & +56-56 \\ & -27+27 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2) & +a-b \\ & -a+b \\ 2) & +56-27 \\ & -56+27 \end{array}$$

Il gruppo 1) di solito viene concepito e risolto sensatamente in coppie orizzontali, il gruppo 2) in coppie verticali. Lo stesso avviene con problemi in cui due o più numeri danno come somma un numero di rilievo invece che elidersi

$$\begin{array}{ll} 1) & +98+2 \\ & +75+25 \\ 2) & +98+75 \\ & +2+25 \end{array}$$

Se designiamo i quattro termini di tutti questi gruppi con $\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}$, il raggruppamento preferito nei gruppi di tipo 1) è ab/cd , nei gruppi di tipo 2) ac/bd . Lo psicologo vede che questi sono casi collegati ai risultati delle ricerche sul ruolo dell'organizzazione nella percezione, che rivelano le cosiddette « tendenze gestalt » nella formazione dei gruppi.¹¹

¹¹ Cfr. WERTHEIMER, M., « Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt », *Psychologische Forschung*, 1923, vol. 4, pagg. 322-323; vedere anche ELLIS, W. D., *op. cit.*,

Nel corso di quelle ricerche sperimentali (costruite di solito con figure semplici o punti) emergevano, per l'osservatore, forti tendenze a percepire le qualità d'insieme, e questo fatto costituiva, nell'osservazione, un momento illuminante: il ritrovamento, cioè, di « raggruppamenti ragionevoli » con caratteristiche appartenenti all'intima natura strutturale della situazione: il cosiddetto fattore della « buona forma ».

Quelle indagini mostravano che la tendenza della percezione ad essere « ragionevole » è in relazione con quelle caratteristiche delle situazioni che sono riconducibili a proprietà matematiche « sensate », obbedienti a qualche legge (sebbene con qualche limitazione, dovuta all'importanza data nella percezione alle qualità d'insieme, più che alle « leggi di classe »). (Cfr. pagg. 266 segg.).

I problemi che qui trattiamo non sono per nulla problemi particolari dell'aritmetica o dell'insegnamento dell'aritmetica. Un esempio con figure non diverso dai « gruppi quadrati » aritmetici è la seguente costellazione ottica, in particolare se è realizzata con figure solide, ad esempio, figure nere sul bianco. Il gruppo 1) è visto di solito accoppiato in senso verticale, il gruppo 2) in senso orizzontale.¹²

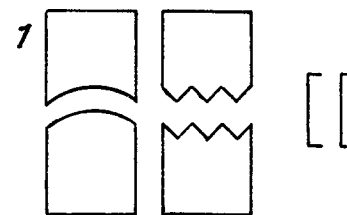


FIG. 84

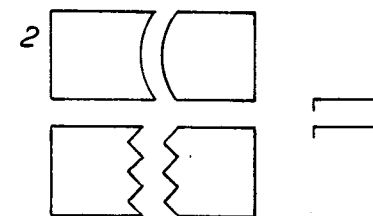


FIG. 85

pag. 82, oppure BEARDSLEE, D. C. e WERTHEIMER, M., *op. cit.*, pag. 128. Per esempio, la fig. 82 viene vista come ad/bc , non come ab/cd . Ancora, la figura 83 viene vista

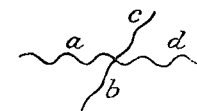


FIG. 82



FIG. 83

come $bcbfgkl.../adehi...$, non come $acegi.../bdfhk...$; nella percezione è quasi impossibile realizzare il secondo modo di vedere la figura.

¹² Cfr. gli esperimenti sul movimento con lo speciale metodo dei gruppi quadrati. Ad esempio, SCHILLER, P. v., « Stroboskopische Alternativversuche », *Psychologische Forschung*, 1933, vol. 17, pagg. 179-214.

Oppure considerate queste situazioni:

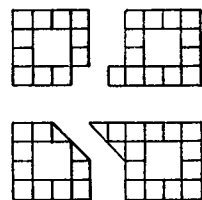


FIG. 86

Sembra esserci anche nei bambini piccoli, quando sono messi di fronte a queste figure (ad esempio cubetti), una forte tendenza nella direzione sensata. Spesso vi arrivano spontaneamente, « migliorando », « correggendo la situazione ». Non c'è bisogno di parlare; mettono semplicemente insieme gli oggetti, li fanno combaciare. Spesso non è neppure necessario assegnare un problema per ottenere una risposta sensata: questa esce dalla dinamica interna della situazione. Di nuovo vediamo il ruolo del « disturbo », della « lacuna », il senso di « adatto », di « essere il necessario », « essere richiesto », come parti di un insieme coerente. Queste caratteristiche sembrano essere di importanza basilare anche per un intelligente insegnamento dell'aritmetica.

Una semplice illustrazione di questo problema¹³ può essere costituita dalla fig. 87, la quale determina una tendenza a toglier via il quadrato o il « resto » dal luogo dove è « di troppo », per metterlo dove manca.

Considerazioni simili sembrano essere di importanza fondamentale nell'insegnamento della geometria. Per esempio, anche per capire sensatamente che cosa sia un *angolo* sembra importante il riuscire a vederlo come parte dell'insieme notevole di 360°: se si considerano gli angoli di 182° e 180°, 355°, 360°, 363°, indifferentemente, come angoli allo stesso livello, non si riesce a vedere la loro posizione strutturale, il loro significato funzionale. Mi riferisco ora ad al-

¹³ In molti anni di studio con i bambini, la dottoressa Catherine Stern ha elaborato strumenti e metodi per l'insegnamento dell'aritmetica in cui la scoperta genuina, in problemi di natura strutturale, riveste un ruolo essenziale. I risultati nell'apprendimento — e nella felicità che ne risulta — sembrano essere straordinariamente buoni rispetto al consueto insegnamento tramite la ripetizione meccanica, che si preoccupa di formare legami associativi, ecc. [Questi metodi e studi sono stati pubblicati nel libro della STERN, *Children discover arithmetic* (New York, Harper, 1949) — M. W.J.]

cuni esperimenti con bambini a cui veniva chiesto di girare la lancetta più grande dell'orologio di diversi angoli, in successione.¹⁴ I problemi erano simili a quelli del problema di Gauss. Per esempio: qual è la posizione finale della lancetta se viene fatta girare in senso

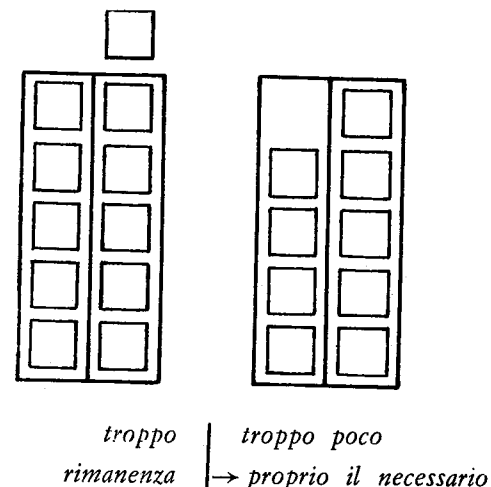


FIG. 87

orario prima di 7°, poi di 90°, poi di 180°, poi di nuovo di 90°? Oppure di 8°, poi di 7°, poi di 83°, 6°, 84°, 5°, 85°, 4°, 86°? In esperimenti con bambini che non conoscevano gli angoli dritti: « Sono le 12, supponete che io faccia girare la lancetta parecchie volte in senso orario. Dove sarà la lancetta se la faccio andare avanti prima di 7 minuti, poi di 25, 5, 24, 6? »

Eccovi un'esperienza che mi capitò discutendo con adulti il seguente tipo di problema: chiesi la somma dei vettori, delle forze che agiscono su un corpo, in esempi come i seguenti: « C'è un vettore (a) che agisce in senso verticale verso l'alto (0°), di misura K; un altro (b) posto ad un angolo di 90° rispetto ad esso, di misura L; un terzo (c) posto a 180°, di misura K; un quarto (d) posto a 270°, di misura L. Qual è il risultato di queste forze sul corpo? »

¹⁴ Vedere WERTHEIMER, M., « Über das Denken der Naturvölker Zahlen und Zahlgebilde », *Zeitschrift für Psychologie*, 1912, vol. 60, pagg. 321-378; ripubblicato in WERTHEIMER, *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie* (Erlangen, Philosophische Akademie, 1925); vedere anche ELLIS, W. D., *op. cit.*, selezione 22.

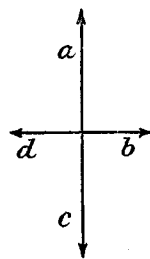


FIG. 88

Ora, specialmente se si fa il diagramma e lo si osserva, il risultato è chiaro: zero; i vettori opposti si elidono; le forze uguali si pareggiano.

Ma accadde che una persona, vedendo la figura completa, insistesse nel risolverlo in quello che egli chiamò « il modo giusto ». Facendo le costruzioni (fig. 89) disse: « I vettori a e b nel parallelogrammo di forze danno la risultante r_1 . La combinazione della prima risultante con il vettore c in un parallelogrammo di forze dà la seconda risultante (fig. 90). Questa con il vettore d dà la risultante 3 che è zero, e r_3 combinata con a , dà $+a$ che è il risultato ». Egli era chiaramente stupito; disse in tono di esitazione: « Ma questo è un non-senso! E tuttavia facendo le costruzioni, viene fuori a que-

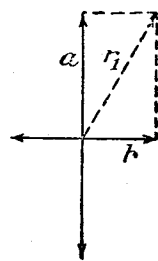


FIG. 89

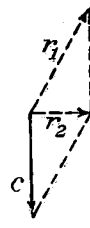


FIG. 90

sto modo... dov'è lo sbaglio? ». Passò più di 14 minuti a pensare intensamente senza riuscire a vederci chiaro, e lasciò stare il problema. Tornandoci su dopo un po', improvvisamente disse con un po' di tristezza: « Ci sono. Avevo già usato il primo vettore », ed aggiunse in tono di scusa: « Sono stato stupido: era chiaro per me che dovevo fare tutto il giro. Con la risultante 3 ebbi la sensazione di aver fatto solo $\frac{3}{4}$ di giro, di essere arrivato solo a 270° pensavo

di doverlo completare, non pensai che avevo già usato il vettore a . Che stupido sono stato! È chiaro che a e c fanno zero, e lo stesso b e d . A questo modo la risultante è zero ».

Certamente il procedimento era giusto fino all'ultimo passaggio: la costruzione di tutte le risultanti è spesso necessaria, costituisce il metodo generale. Non dobbiamo però dimenticare che spesso, in situazioni produttive, la visione sensata del tutto riveste un ruolo decisivo: ne risulta la comprensione della simmetria e dell'equilibrio nell'insieme (e delle deviazioni da questo), in un raggruppamento sensato. Il mio interlocutore, in quel caso, evidentemente era stato portato fuori strada dalla tendenza alla chiusura che si era imposta.

A dire la verità questo fu un caso estremo: se il diagramma viene mostrato o disegnato, quasi tutte le risposte sono sensate (sempre che il significato dei « vettori » sia chiaro).

IV

Ho accennato prima al fatto che porre il problema in questa forma:

$$\frac{271+272+273+274+275}{5}=?$$

sembrava essere di aiuto nel raggiungimento della soluzione. Alcuni vedono subito la loro strada. « È 273 naturalmente », dicono e non cominciano nemmeno le lunghe addizioni. Altri non la vedono e chiedono se devono fare tutte le addizioni. Se il problema viene dato come compito dopo che il metodo di Gauss è stato insegnato, può darsi che il soggetto cominci perfino, alla cieca, con « $271+275=546$ ».

In questa forma il fatto caratteristico è che il denominatore richiede che il numeratore venga diviso in cinque parti e in questo modo aiuta a vedere nell'espressione che sta sopra alla linea di frazione queste cinque parti. Quando gli esperimenti mostrarono che le difficoltà concrete di molti soggetti alle prese con problemi di questo tipo erano simili a quelle incontrate con il problema di Gauss, il passaggio successivo sembrò essere quello di semplificare la struttura.

Quando chiesi ai bambini:

$$\frac{274+274+274+274+274}{5}=? \text{ oppure } \frac{272+272+272}{3}=? \text{ o } \frac{273+273}{2}=?$$

ottenni da alcuni, tra i più brillanti di essi, certi risultati chiari e ben definiti. La maggior parte di loro rise, si divertì allo scherzo, mentre altri si stupirono che dovesse venir dato un problema così facile, oppure si annoiarono; in ogni caso, però, non ebbero difficoltà per la risposta. Si resero conto spontaneamente e con facilità che ciò che il denominatore richiedeva, era già fatto nel numeratore. La divisione per cinque venne intesa nel suo significato strutturale, cioè come richiedente la strutturazione dell'ammontare del denominatore in cinque parti uguali, il che era già fatto. Oppure il numeratore, visto come moltiplicazione, mostrava la compensazione di moltiplicazione e divisione.

Sommare, o in realtà moltiplicare per poi dividere, corrisponde qui al fare e disfare che avevamo incontrato prima, significa lavorare minuziosamente su qualcosa che è già fatto, cercare di raggiungere una soluzione già data. Naturalmente bisogna fare qualcosa, cioè rendersi conto che la soluzione è già lì, vedere che uno dei numeri non è semplicemente qualcosa che deve essere sommato agli altri, ma è proprio la soluzione. Questo è un risultato positivo: l'intelligente mutamento del significato funzionale di un elemento, nella soluzione, nel contesto del problema. Ma nel nostro caso è abbastanza facile: non occorre « scavare a fondo » per superare la difficoltà.¹⁵ Sebbene a volte vi fosse un po' di esitazione, in quanto i soggetti non si aspettavano un problema così facile, subito appariva un sorriso accompagnato da osservazioni come: « È ovvio. Dapprima sembrava un problema difficile, ma non lo è » e veniva data la soluzione.

Pensando a certi atteggiamenti derivati dalla scuola, che io avevo così spesso sperimentato, continuai a fare domande di questo tipo. Era in serbo per me una bella sorpresa — non avevo immaginato a qual punto di esasperazione arrivasse la situazione. Un buon numero di bambini che erano particolarmente bravi in aritmetica nella loro scuola, si dimostrarono completamente ciechi di fronte al

¹⁵ Si hanno esperienze caratteristiche in esperimenti con compiti in cui la soluzione è contenuta di fatto nel testo del problema, ma completamente nascosta dal punto di vista funzionale, cioè data in una posizione ed in un ruolo funzionali decisamente diversi dal contesto della domanda. I soggetti risultano spesso ciechi perfino di fronte alla formulazione esatta parola per parola della soluzione nel testo, ed hanno luogo processi caratteristici quando, dopo un po', la scoprono. Questo fornisce ancora una prova sperimentale dell'importanza di comprendere la posizione, il ruolo, la funzione strutturale di un elemento nel suo insieme. (Cfr. gli esperimenti di MAIER, N. R. F., nell'insinuare compiti tecnici, in « Reasoning in humans. I. On direction ». *Journal of Comparative Psychology*, 1930, vol. 10, pagg. 115-143.

problema, e cominciarono immediatamente a fare i loro tediosi calcoli, oppure chiesero di essere dispensati da questo compito gravoso; non osservarono per nulla la situazione nel suo insieme. A dir la verità quando li aiutai a vedere la soluzione, chiaramente mostrarono di vergognarsi ed esclamarono: « Che tonto sono stato! Che stupido! »

Queste esperienze mi ricordarono una quantità di esperienze più serie che nelle scuole mi avevano preoccupato. Esaminai a fondo più accuratamente i metodi, i modi comuni di insegnare l'aritmetica, i libri di testo, i libri di psicologia specifici su cui quei metodi erano basati. Una ragione della difficoltà divenne sempre più chiara: l'importanza data alla ripetizione meccanica, alla « risposta istantanea », alla formazione di abitudini cieche, analitiche. La ripetizione è utile, l'uso continuo della ripetizione meccanica però produce anche effetti dannosi. È pericoloso perché provoca facilmente l'abitudine ad azioni stereotipate, la cecità, la tendenza ad eseguire come schiavi quello che è stato insegnato invece di pensare, invece di affrontare un problema liberamente.

Un'indagine sugli effetti accecanti della ripetizione meccanica, in serie di compiti assegnati, fu iniziato all'Istituto di Berlino nel 1924. Duncker e Zener ottennero dei risultati strabilianti.¹⁶ Di recente un mio studente, A. Luchins,¹⁷ ha fatto una vasta indagine su questo effetto nelle scuole ed ha maggiormente sviluppato i metodi sperimentali per osservarlo. È sorprendente vedere quanto sia facile, attraverso un certo tipo di meccanizzazione, accecare anche soggetti brillanti e molto preparati, con l'amato metodo della ripetizione. Luchins ha anche usato metodi per il recupero dalla cecità prodotta a questo modo, i quali di solito rendono facile il riguadagnare reazioni sensate, ma che non hanno mostrato alcun effetto positivo degno di considerazione in molti bambini di certe scuole. Naturalmente vi è un certo numero di spiegazioni possibili sia per l'effetto dell'accecamiento, sia per il mancato recupero; Luchins e Asch¹⁸ hanno fatto alcuni esperimenti su questi problemi teorici. Questo sembra chiaro: fattori importanti sono le abitudini sviluppate dalla ripetizione meccanica, l'atteggiamento di fronte ai problemi, l'atmosfera di certe scuole per quanto riguarda l'imparare, il fare e il pensare.¹⁹

¹⁶ Vedere MAIER, N. R. F., *op. cit.*

¹⁷ LUCHINS, A., « Mechanization in problem solving: the effect of Einstellung », *Psychological Monographs*, 1942, vol. 54, n. 6.

¹⁸ ASCH, S. E., « Some effects of speed on the development of a mechanical attitude in problem solving », saggio letto ai convegni del 1940 della Eastern Psychological Association.

¹⁹ Per quanto riguarda le conseguenze di un insegnamento cieco alla struttura, confrontate il Capitolo I, sezione II; confrontate anche i risultati di KATONA

Riferirò ora tre reazioni a queste scoperte.

Una volta parlai di questi risultati ad uno psicologo di fama. Dissi che potevano essere dovuti ad un cattivo insegnamento, come conseguenza dell'importanza data all'associazione irriflessiva e alla ripetizione meccanica, che danneggia l'inclinazione a pensare. « Oh no », disse, « affatto. Il risultato negativo non è per nulla sorprendente se ponete simili domande di "gestalt". Il fatto è che non si insegna ai bambini come risolvere tali problemi; a scuola si insegna loro l'aritmetica, ma se si insegnassero questi problemi di "gestalt" essi li imparerebbero. Il punto è soltanto questo: cosa viene loro insegnato ».

Queste osservazioni mostrano qual è la situazione teoretica. Questo psicologo non è un cattivo pensatore; le sue osservazioni diventano comprensibili se ci si rende conto che, teoricamente, il pensiero è per lui, come per molti altri, fondamentalmente null'altro che il lavoro di legami associativi, di abitudini acquisite attraverso la ripetizione. Che altro *potrebbe* essere?!

Un matematico a cui narrai queste esperienze osservò: « Lei si sbaglia. Vedere la via per una tale scorciatoia non è importante; il metodo di fare accuratamente tutti i calcoli è un metodo corretto, il metodo generale. Si può usare la scorciatoia soltanto in casi specifici ».

Ora questo è un problema serio. Nella mia risposta mi riferii dapprima a molte cose di cui ho parlato nei capitoli precedenti, poi gli chiesi se considerava anche la scoperta di Gauss semplicemente una scorciatoia senza importanza. Ma, punto terzo, dissi: « Io ritengo che sia proprio l'opposto; non si tratta semplicemente di una scorciatoia, di un caso speciale; si tratta dell'atteggiamento di base verso un problema, verso un'operazione. Per molti bambini che vanno a scuola divisione *significa* la tecnica imparata attraverso

la ripetizione meccanica, come ad esempio, in $\frac{816}{3}$: "3 sta nell'8

2 volte, riporto il due, 21 diviso 3 fa 7; 6 diviso 3 fa 2... 272" ». Per loro *questa* è la divisione. Ma sebbene la padronanza meccanica abbia grande valore, specialmente nel liberare la mente per compiti più importanti in una situazione di problema, tuttavia non do-

in *Organizing and memorizing* (New York, Columbia University Press, 1939; in preparazione la traduzione italiana in questa « Collezione »). (Vedere anche Capitolo IV e Appendice IV di questo libro. — M. V.).

vrebbe accecare il soggetto. Fa differenza se la tecnica della divisione viene vista, conosciuta, applicata come una semplice tecnica oppure se il soggetto non vede l'intimo significato della divisione, cioè la suddivisione di un quantità in parti uguali, in tutta la concretezza della situazione data. E lo stesso per quanto riguarda la moltiplicazione.

« Se, in tali casi, uno non è in grado di capire il significato strutturale della divisione, vuol dire che è cieco rispetto ai principi essenziali. Lo affermo seriamente: l'insegnamento dell'aritmetica non dovrebbe dare importanza principalmente alla ripetizione meccanica ma dovrebbe permettere al bambino di scoprire i caratteri strutturali e le esigenze delle situazioni date, e di imparare a trattarle in modo sensato. Questo naturalmente richiede un procedimento molto diverso dalla ripetizione meccanica usata nella maggior parte delle scuole ». Poi gli parlai di alcuni lavori, specialmente dei metodi strutturali della dottoressa Catherine Stern,²⁰ che naturalmente gli piacquero.

La reazione di un altro ben noto psicologo fu diversa. Dopo che gli ebbi raccontato brevemente i miei esperimenti nelle scuole, egli disse: « Naturalmente, capisco bene. Mi ricorda un'esperienza che ebbi alcuni mesi fa e che potrebbe essere tipica. Mio figlio, che è un ragazzo molto intelligente, venne a dirmi: "Vedi, papà, a scuola sono molto bravo in aritmetica: so fare addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, tutto ciò che vuoi, molto svelto e senza sbagli. Il guaio è che spesso non so *quale* operazione usare..." »

La colpa non è degli insegnanti, sono in molti ad essere insoddisfatti dell'importanza data nelle scuole al sistema d'associazioni meccaniche, di cieca ripetizione. Molti fanno assegnamento su di esse perché le vedono in accordo con la psicologia scientifica (che concepiscono come la psicologia dell'imparare pappagallescamente serie di sillabe, e quella dei riflessi condizionati). Molti fanno affidamento su tali sistemi in quanto non conoscono alcun altro modo più sensato, concreto e scientifico di insegnare. Elaborare metodi migliori è davvero il compito di una più adeguata psicologia del pensiero e dell'apprendimento.

²⁰ Cfr. pag. 140, nota 13.

V

Probabilmente ora il lettore ha una chiara idea della struttura psicologica del problema di Gauss; nelle varianti esposte, però, non è stato preso in sufficiente considerazione un punto interessante. È proprio il punto che ha reso la scoperta di Gauss così bella: la sua stretta connessione con il principio della serie. Nel corso di esperimenti ho mostrato una serie di numeri senza dare alcun problema. Eccone una:

-63, -26, -7, 0, +1, +2, +9, +28, +65

Forse il lettore osservando la serie, può aver già fatto qualcosa: può darsi che abbia notato, come avviene per molti, la somiglianza di certi numeri (-63, +65; -26, +28; -7, +9), stabilito che la somma di ciascuna coppia è due; 3 per 2 fa 6, e la somma di $0+1+2$ fa 3, di modo che la somma della serie è 9. Questo procedimento è in certo qual modo simile a quello di Gauss, tuttavia non del tutto identico.

Vi è un altro tipo di reazione. Vi riferisco un protocollo tipico: « A destra la serie aumenta progressivamente; in maniera analoga diminuisce a sinistra. I numeri in qualche modo si corrispondono, il -63 e il +65, il -26 e il +28, il -7 e il +9. Ma e la regione centrale?

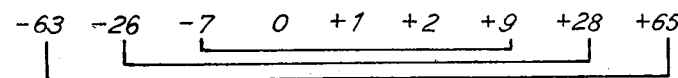


FIG. 91

...Oh, la serie è spostata! Il vero centro è dove adesso si trova il +1! Lì ci dovrebbe essere lo zero... e se sottraiamo a tutti i termini 1 otteniamo $x_n = n^3$.²¹

Un procedimento di questo stesso genere fu seguito anche in un caso in cui si richiedeva la somma fin dall'inizio. Il soggetto, tuttavia, interessato ad afferrare il meccanismo della serie, dapprima non si curò o si dimenticò momentaneamente di questo compito. Dopo che il soggetto in questo modo era giunto a dire: « La solu-

²¹⁾ -64 -27 -8 -1 0 +1 +8 +27 +64
 $(-4)^4$ $(-3)^3$ $(-2)^2$ $(-1)^1$ 1^3 2^3 3^3 4^3

zione è $x_n = n^3$ », gli venne ricordato che il compito assegnato era di trovare la somma. « La somma? » disse, « la somma di tale serie è, naturalmente, zero... Oh, scusatemi, ecco qual è lo sciocco spostamento: l'intera serie è spostata di uno. Ogni numero deve avere un +1 in più, così che +1 volte il numero dei termini... quanti ce ne sono? Fa 9 ».

A questo punto qualcuno osservò: « Che strano comportamento! Ti chiedevano la somma, perché mai ti sei andato a preoccupare di tutte queste cose? » E mostrò il breve procedimento esposto sopra, aggiungendo: « Non era stato richiesto alcun principio. Perché non risolvere il problema nel modo diretto? »

A ciò il primo soggetto, come assente, intensamente occupato ed anche un po' seccato, rispose: « Oh sì, sì, hai ragione, ma per favore non disturbarmi. Non vedi la questione che si apre a questo punto?... » Si immerse nella riflessione: per lui ebbe inizio un lungo processo che lo doveva portare a una catena di scoperte.

Fissarsi su di una domanda posta, risolverla nel modo più breve, non è sempre l'atteggiamento più intelligente: esiste un'altra cosa: il cercare di andare alle radici di una situazione. Giorni dopo lo stesso soggetto osservò: « Quello sciocco spostamento! Dovevo proprio andare fino in fondo ». È bellissimo scoprire la « vera » struttura,²² penetrare attraverso un'apparenza fuorviante, giungere al nocciolo di una situazione, rendersi conto di quello che si ha di fronte.

Dopo un po' il soggetto disse: « Eccola là $x_n = n^3$... la somma è zero sia che la somma continui simmetricamente, sia che venga interrotta in un particolare punto qualsiasi. Questo non avverrebbe nel caso $x_n = n^2$. Vi è l'eguaglianza delle due metà, ma queste non si compensano: $(-2)^2 = +4$, lo stesso che $(+2)^2$. In generale, quando l'esponente è un numero dispari, la somma deve essere zero ». Dopo un poco continuò. « Lo stesso varrà per curve continue, ad esempio per la sinusoide, interrotta opportunamente; per l'area o per la somma delle linee verticali comprese tra la sinusoide e l'asse:

²² Per assicurarsi ragionevolmente se una tale concezione strutturale, qui $x_n = n^3$ (spostata), risulta valida in un caso attuale, si guarda avanti per vedere se ulteriori valori, a destra e a sinistra, risulterebbero o meno in accordo con il principio trovato. Si esamina anche che cosa accade ai valori nelle variazioni della serie. Ma tutto questo non è il nostro problema in questo caso in cui il soggetto era tutto preso da certe qualità di insieme della serie coerente, come dimostrò il suo comportamento successivo.

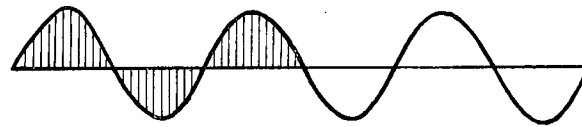


FIG. 92

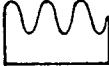
« E lo stesso con l'area in  . L'area diventa un rettangolo.

FIG. 93

Anche se la curva viene spostata!

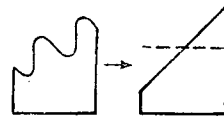


FIG. 94

È una questione di simmetria e di equilibrio in seno all'intera figura.

« E le altre curve? Naturalmente vale anche per $y=x$ (vedi

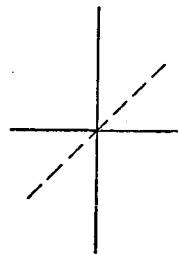


FIG. 95 A

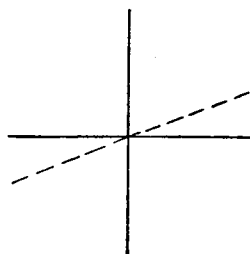


FIG. 95 B

fig. 95A) oppure $y=ax$ (vedi fig. 95B). Vale, per quanto l'angolo possa cambiare, per una qualsiasi linea retta tagliata simmetricamente. In $y=ax+b$ la linea è soltanto spostata. E l'area è l'altezza del centro per la base, in figure come le seguenti:

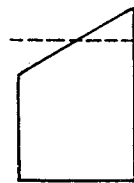


FIG. 96

« Ciò vale per la serie corrispondente $x_n = x_{n-1} + k$. La somma dei termini è uguale a tante volte il valore del centro per il numero degli addendi: c volte n ».

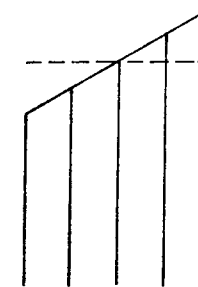


FIG. 97

In questo modo egli giunse al teorema di Gauss, non attraverso una serie che cominciasse con 1, ma dalla visione della qualità strutturale d'insieme dell'equilibrio nella distribuzione, come si vede sopra.

Ritornero fra breve sul suo processo di pensiero. Nel frattempo ci si deve rendere conto che non si tratta soltanto di individuare delle differenze fra i termini della serie, di stabilire l'uguaglianza di tali differenze, ecc., oppure di operare con le leggi di classe delle serie, leggi che in qualche modo valgono per tutti i punti o gli elementi. È fondamentalemente una questione di equilibrio dell'insieme, occorre rendersi conto di questo equilibrio rispetto alle caratteristiche dell'insieme. E questo equilibrio è una cosa dinamica, sensibile alle deviazioni o ai disturbi in una parte qualsiasi.

Se si fa un diagramma della serie di Gauss, si vede che la linea è diritta, oppure che vi è una deviazione dalla rettilinearità, un disturbo; e questo molto prima di poter stabilire o conoscere la misura delle differenze, se siano uguali, ecc. Ad esempio:

$$1+2+3+4+5+6+7+8$$



FIG. 98

oppure

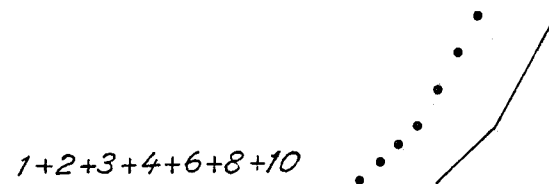


FIG. 99

Vi è una sensibilità a tali variazioni, che spiccano rispetto alla chiara qualità d'insieme della rettilinearità. Una tale serie, per esempio la prima delle due serie sopra (senza il 5), può venir formulata come una serie che obbedisce a una legge esprimibile con una formula generale, $x_n = f(x_{n-1})$, allo stesso modo della serie lineare, soltanto più complicata nei termini. Ma la serie $x_n = x_{n-1} + k$ è notevole per la sua semplicità strutturale, per la chiarezza strutturale della sua qualità d'insieme. Nessuno penserebbe spontaneamente la serie

$$1+2+3+4+5+6+7+8,$$

specialmente in diagramma, come una deviazione da una formula più complessa, con il cinque che si intromette come elemento di confusione, sebbene nei consueti termini matematici una legge è una legge, ed una vale quanto un'altra.²³

In maniera simile con la sinusoide, o con punti di una sinusoide, molto prima di stabilire o di conoscere la misura delle distanze tra i singoli punti, molto prima di avere una « legge di classe », si vede, guardando l'insieme, che il corso della curva è regolare.

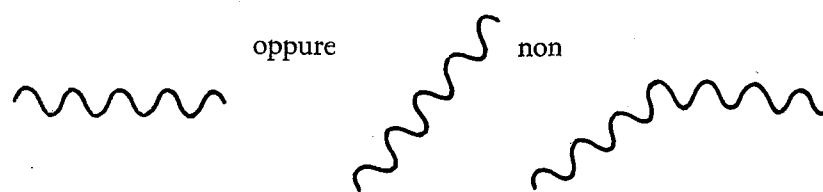


FIG. 100

²³ Naturalmente sono i fatti che devono decidere. Ci si può sbagliare facendo la supposizione di struttura più semplice. Il fattore decisivo è il comportamento strutturale dei termini della serie Cfr. pag. 149, nota 22.

Si vede che vi è una ritmica ripetizione in regolari sotto-unità,

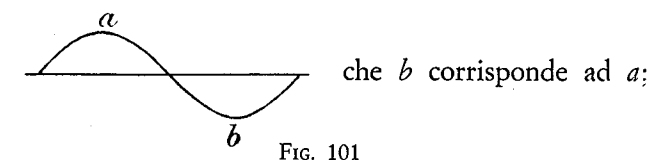


FIG. 101

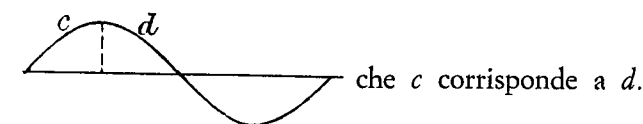


FIG. 102

È da una visione dall'alto che si possono percepire le caratteristiche di simmetria nelle sotto-unità. Ciò che in questo caso importa di più, psicologicamente, sono le caratteristiche di rilievo dell'insieme,²⁴ e delle sotto-unità. Partendo dalla considerazione di queste come centri, le deviazioni spesso divengono evidenti, vengono viste come tali.

Molti diranno: « È vero, ma queste sono solo visioni psicologiche inesatte, globali, che non possono venir messe a confronto con formulazioni matematiche esatte del genere di $y=f(x)$, ecc. ». L'obiezione è cieca. Il metodo matematico, il modo di procedere esatto, è di necessità la via dal basso, dagli elementi? Per essere esatto deve forse derivare le qualità di insieme, come la simmetria, solo in un secondo momento? Non ci potrebbero essere anche dei metodi matematici « dall'alto », non per questo meno esatti? Metodi matematici che partano dalle qualità d'insieme e vadano in secondo tempo da queste agli elementi?

Psicologicamente la situazione per quanto riguarda il vedere le qualità d'insieme spesso non viene mutata nella sua essenza se,



FIG. 103

²⁴ Questo vale non soltanto per le forme ritmiche e per le caratteristiche simmetriche, ma vale anche per la direzione di un vettore principale nei cambiamenti, tendenze, ecc. E vale anche per i processi di pensiero e di azione se, ad onta di complicazioni o di piccole deviazioni, non si perda mai di vista la direzione della struttura.

invece di una sinusoide esatta in tutti i suoi dettagli, si ha una sinusoide tremolante, oppure una curva disegnata con punti in cui vi sia un certo numero di errori, o perfino una distribuzione a caso.²⁵ In questo caso la visione dall'alto permette di scorgere le qualità d'insieme, la forma; i dettagli, le parti più piccole, gli ele-



FIG. 104

menti non sono più governati direttamente e semplicemente dalla legge. La matematica ha modi esatti di trattare casi di questo genere, di formulare qualità d'insieme che sono valide nonostante le variazioni nelle parti.

Questa è spesso la situazione della fisica moderna. In casi di questo genere conosciamo le qualità d'insieme, il comportamento d'insieme di sistemi di cui non si conosce esattamente il comportamento delle parti più piccole, oppure si sa che segue una distribuzione a caso. Nel tentativo di giungere ad una formulazione matematica, dobbiamo dunque partire da una legge per le parti più piccole? Esistono procedimenti che muovono da una descrizione di qualità d'insieme, la quale permette che le parti più piccole abbiano un comportamento variabile.

Non sarebbe possibile, inoltre, sviluppare metodi per trattare questioni di dinamica a questo modo? Concepire tendenze verso determinate trasformazioni non in base a criteri sommativi di forze frazionate elementari, ma come funzioni delle qualità d'insieme e delle loro possibili perturbazioni?

Quali che possano essere gli sviluppi futuri, certamente non è vero che il metodo dall'alto sia soltanto un metodo « globale », « inesatto »; è vero piuttosto che le tecniche dell'altro metodo sono più sviluppate nell'ambito della matematica.

²⁵ Al Congresso Internazionale di Psicologia a Groningen, nel 1926, feci una relazione su ricerche a questo proposito nel contesto di uno scritto che trattava i problemi della forma alle soglie della percezione (« Zum Problem der Schwelle », *Bericht über den VIII Internationalen Kongress für Psychologie*, Groningen, P. Noordhoff, 1926). Ed alcuni anni fa Woodworth citò un esempio illuminante: una muraglia preistorica ad anello venne scoperta da un aeroplano in un campo che veniva coltivato da molti decenni. Nessuno l'aveva notata prima, nessuno era stato in grado di vederla senza l'ampia visione dell'intero campo che aveva il pilota.

Ritorniamo ora al procedimento esposto a pag. 148 e seguenti. Sebbene il soggetto esaminato procedesse con un metodo già praticato da altri (cfr. § II) vi è tuttavia nel suo modo di impostare il problema di Gauss una notevole differenza. Egli intese il problema in un modo più vasto, più profondo. Il problema gli offriva non soltanto un'elegante possibilità di riorganizzazione in quel caso particolare: gli permetteva di individuare una via aperta sulla possibilità di vedere le relazioni interne tra forma e somma.

Nel passaggio successivo egli paragonò la sua formula $c \cdot n$ con quella di Gauss $(n+1) \frac{n}{2}$ ed osservò che si poteva trasformare il $c \cdot n$, con il leggero mutamento, nella seguente formula: $\frac{n+1}{2} \cdot n$.

Poi disse: « $c \cdot n$ sembra essere la formula più generale, quella fondamentale, in cui non importa quale sia l'entità delle differenze uguali, quale sia il primo o l'ultimo termine. D'altra parte io ho qui due variabili, c e n , mentre nella formula di Gauss una variabile sola, n , è sufficiente! Per questo la formula di Gauss che richiede una variante sola è più elegante ». Improvvisamente si mise a ridere: « No, è soltanto una limitazione esterna a far sembrare che sia così. L'1 in $(n+1)$ è infatti il primo numero della serie, così come n è

l'ultimo. In maniera analoga $\frac{n}{2}$ è una espressione semplice solo in apparenza. In effetti è $\frac{z-a+1}{2}$, in cui z è l'ultimo numero, a il primo della serie. Si tramuta in $\frac{z}{2}$ solo in quanto $a=1$. Che la serie

debba cominciare proprio con il valore 1 non è di alcuna importanza, è solo un caso speciale. Inoltre quel particolare tipo di formula è un caso speciale in quanto è limitato ad una differenza di 1 fra i termini. La cosa importante è la relazione di base: alcune serie, alcune curve, alcune distribuzioni mostrano questa chiara relazione interna tra le loro qualità di insieme, il loro principio di costruzione, e la loro somma. Voglio saperne di più a questo riguardo. In generale, quali sono i requisiti? In fondo sembra essere una questione di equilibrio del tutto, una compensazione ad un certo livello tra le varie parti ». Pensando poi al problema della compensazione, riconobbe che lo stesso principio doveva valere per i prodotti. Egli si immerse in questi problemi, ma non starò qui a seguire i suoi passaggi successivi. Questi lo portarono al problema di stabilire se una

relazione interna tra una serie crescente e la sua somma è possibile soltanto per via di compensazione, ed alla fine al fatto che le serie infinite possiedono limiti finiti.

In un tale processo di pensiero la soluzione di un compito effettivo: « Problema risolto, compito terminato », non costituisce un punto di arrivo. Il modo di giungere alla soluzione, le sue caratteristiche fondamentali e insomma l'insieme costituito dal problema e dai suoi esiti funzionano come parti di un vasto regno in via di espansione. In questo caso la funzione del pensiero non è semplicemente quella di risolvere un problema effettivo, ma di scoprire, di vedere, di penetrare in questioni che vanno più a fondo. Spesso nelle grandi scoperte la cosa più importante è che venga trovato un certo problema. Immaginare e porre il problema produttivo è spesso più importante, rappresenta una conquista maggiore della soluzione stessa data ad un problema posto; proprio come qui, nel nostro esempio, scorgere, individuare un problema di struttura fondamentale; e questo è un processo molto più vasto, molto più profondo dei processi descritti in precedenza.

Proprio come un compito o una situazione che costituisca un problema non sono operazioni chiuse in se stesse ma tendono a una soluzione, a un completamento strutturale, così anche un compito con la sua soluzione spesso non è una cosa a se stante: può di nuovo funzionare come una parte che tenda a superare se stessa, nel tentativo di affrontare, di chiarificare un campo più vasto. Spesso un processo di questo genere è molto lungo: è un dramma con regressi e lotte. Vi sono casi notevoli in cui il processo si svolge senza sosta, per mesi, per anni ²⁶ senza che mai siano persi di vista i problemi più profondi, senza che mai ci si perda in dettagli trascurabili, in digressioni, in vie secondarie.

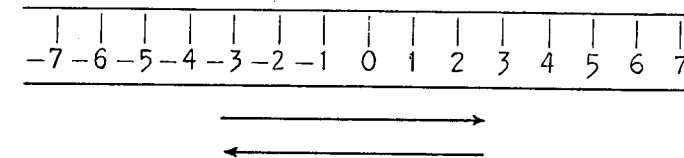
Questa è una importante differenza tra il pensiero pedante e il pensiero che procede a grandi linee, una differenza che anche nella vita è di straordinaria importanza. Molti teorici non vedono esattamente questa differenza e il peso che ha, la confondono con questioni di esattezza unilaterale e frazionante, che è cieca ai grandi elementi costitutivi del processo in questione. L'esattezza non è però incompatibile con la sensibilità per gli aspetti superiori dei problemi: ne è piuttosto un cooperatore necessario.

²⁶ Questo vale non solo per gli individui, ma anche per i gruppi, per cui grandi problemi sono passati da una generazione all'altra, in quanto l'individuo non agisce fondamentalmente come tale, ma come membro di un gruppo.

CAPITOLO QUINTO

*Più tre meno tre**

In un laboratorio di fisica vi è un galvanometro a specchietto: un piccolo specchio è sospeso in modo che l'attrito sia ridotto al minimo, per cui, con una piccola spinta, oscilla con un movimento regolare. Un raggio di luce proiettato sullo specchio è poi riflesso, e getta sulla scala di vetro smerigliato una macchia luminosa che si muove avanti e indietro secondo l'oscillazione dello specchio.



Alcuni ragazzi visitano il laboratorio con me e vedono la luce che si muove: va da -3, attraverso lo zero, a +3, avanti e indietro.

Torniamo il giorno dopo. L'estremità destra della scala è ora nascosta da un divisorio. La luce nel suo movimento di oscillazione si muove verso sinistra fino a -5, ritorna a zero, scompare dietro allo schermo, ritorna, e così via. Io chiedo: « Qual è secondo voi il punto di arrivo dalla parte destra? ».

1. Un ragazzo risponde prontamente: « Più tre; mi ricordo che ieri il punto estremo a destra era più tre ». Questa osservazione

* Questo capitolo non era incluso nell'edizione originale, sebbene un primitivo indice trovato tra le carte di Max Wertheimer indicasse che egli un tempo aveva avuto l'intenzione di usarlo in questo punto. Il manoscritto di questo capitolo non mostra una forma definitiva come i capitoli inclusi nell'edizione originale. È sembrato perciò necessario un po' di lavoro redazionale, ma si è cercato di tenerlo al minimo. — M. W.

può essere solo il risultato di un ricordo frammentario di valore connesso all'esperienza di ieri sulla estremità destra; sembra che il ragazzo non pensi assolutamente all'intima connessione tra i valori. Osservazioni successive mostrarono che era semplice ripetizione: potremmo definire tale richiamo alla mente come irriflessivo.

2. Un secondo ragazzo dice: « Dovrebbe essere più cinque ». Forse questa risposta poggia su di un assunto completamente diverso; successive osservazioni indicarono che egli pensava ad una uguaglianza con segno cambiato dei due numeri estremi, senza andare più in là.

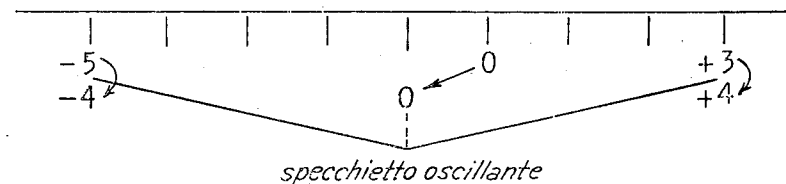
3. Un terzo ragazzo dice: « L'oscillazione è costante: la luce dovrebbe andare verso destra alla stessa distanza a cui va a sinistra; dunque è più cinque ».

Dico: « Mi dispiace, è più tre », e tolgo lo schermo divisorio mostrando che l'estremità destra dell'oscillazione arriva a +3. Egli è visibilmente colpito.

Segue un processo chiaro e fecondo. Dopo un po' il ragazzo sorride e dice: « Non è forse la scala che è fuori posto? » Dopo aver chiesto il permesso la sposta verso sinistra, in modo che i punti estremi dell'oscillazione sono ora +4 e -4, e dice: « Lo zero era fuori posto ». Egli cambiò

	-5	0	+3
in	-4 ←	0 ←	+4 ←

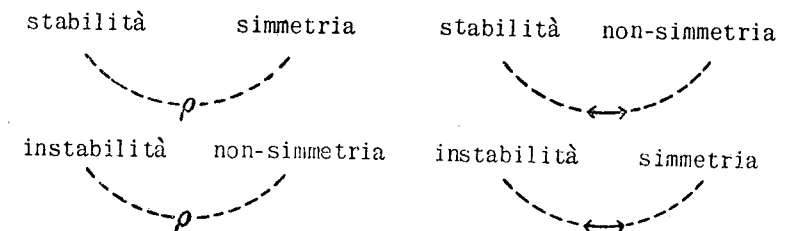
4. Un altro ragazzo ancora non chiese né stette ad aspettare, ma guardò dietro allo schermo, diede un'occhiata al raggio di luce che si muoveva, esclamò: « La scala è fuori posto », e corresse la sua posizione. Il suo comportamento si basava chiaramente sulla comprensione della posizione appropriata dello zero rispetto all'asse di simmetria del raggio in movimento.¹



¹ Supposizioni numeriche da parte del soggetto sono ambigue se non sono accompagnate da un comportamento caratteristico o da ulteriori osservazioni. Che cosa avviene nel caso che la risposta sia più 1? Per alcuni soggetti questo può essere basato sull'equilibrio necessario e sull'idea di spostare la scala, che viene tro-

Come procede il pensiero nelle soluzioni intelligenti (3 e 4)? Le osservazioni indicano: dalla parte sinistra della scala c'è il valore a e dalla parte destra l'incognita x ; c'è il carattere costante del movimento oscillatorio; questo è ragionevolmente, sensibilmente in relazione con la simmetria del fenomeno; questo richiede che i valori estremi a e x siano uguali e inversi. La stabilità richiede, come relazione ρ , la simmetria: dato a , ne consegue $x = -a$.

L'operazione va dall'alto al basso, dallo scorgere l'interrelazione e le qualità di insieme alle parti specifiche. Che cosa potrebbe richiedere ragionevolmente il carattere costante dell'oscillazione per quanto riguarda la posizione dei due valori estremi in relazione l'uno all'altro? Questo porta alla ragionevole esigenza che siano simmetrici e da questo segue la derivazione del valore x , che si ottiene trovando un valore simmetrico al valore dato a . Il processo è basato su rilevanti qualità di insieme e sulla ragionevole relazione ρ che vi è tra loro — tra la costanza del movimento e la sua simmetria — relazione che non regge invece tra costanza del movimento e non-simmetria.



Se le osservazioni del primo giorno hanno portato ad una comprensione, vuol dire che i termini -3, 0, +3 sono stati afferrati nella loro posizione, nel ruolo e nella funzione che occupano all'interno della struttura, in cui -3 e +3 sono corrispondenti e lo zero è il punto medio della distribuzione simmetrica. Nel caso di -5, 0, +3, la necessaria simmetria dei valori è in contraddizione con la posizione dello zero, che quindi si trova fuori posto ed è responsabile della difficoltà nella struttura. Nella soluzione del problema -5, 0, +3 non sono determinanti per chi riflette i particolari valori specifici, bensì la loro posizione, il loro ruolo, la loro funzione nel tutto. I valori cambiano di significato se intesi, da un lato, come parti nella inter-

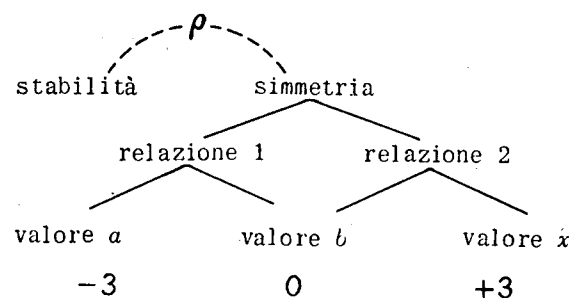
vata fuori posto. Ma la risposta non è di per se stessa chiara: può darsi benissimo che il soggetto sia rimasto chiuso al problema dell'equilibrio ed abbia basato la sua risposta solo sul fatto di mantenere la stessa distanza (6) tra gli estremi, come era accaduto il giorno prima.

relazione della struttura, dall'altro se intesi quali elementi esterni alla struttura, come la posizione strutturalmente arbitraria della scala.

apparenza:	-5	(-1)	0	3
scala spostata:	+1	+1	+1	+1
valore strutturale:	-4	0	(+1)	+4

Per tutti i valori vi è uno spostamento esterno comune di +1; -5 è ora -4 per ragioni interne di struttura; 0 diventa +1 a causa dello spostamento esterno, ecc.

Nel tornare ad enunciare più esplicitamente il procedimento dall'alto al basso possiamo dare una espressione formale della visione strutturale della situazione originale -3, 0, +3:



Non si tratta di un aggregato qualsiasi di numeri, e nemmeno di un cieco aggregato di relazioni. È una struttura governata da una rilevante qualità di insieme, la simmetria (che a sua volta si trova in una relazione interna significativa con la stabilità dell'insieme: una relazione ρ). La simmetria implica l'eguaglianza inversa (non semplice eguaglianza, ma eguaglianza in cui è compresa una particolare direzione) delle relazioni 1 e 2. Il valore a è omotipico a x ; vi è la ragionevole esigenza che gli omotipi a e x abbiano valori eguali, o meglio che essi si compensino l'uno con l'altro; il termine che si trova tra di loro, il valore b , è il centro. Comprendendo la struttura, i valori individuali e la loro distanza hanno una certa ammissibile variabilità; ma dati alcuni di questi elementi, gli altri seguono secondo la struttura, sono requisiti necessari.²

Se vengono dati -5 e 0, e il terzo termine che ci si aspetta è

² Confrontate il procedimento descritto nel capitolo su Galileo, specialmente il modo in cui il considerare ed il concentrarsi di Galileo sulla simmetria strutturale nella dinamica avesse un ruolo significativo, importante per il suo pensiero e per le basi della fisica moderna.

+5 (oppure se sono dati tutti e tre i termini) l'aspettativa, o la comprensione del nuovo gruppo, non è dovuta dunque necessariamente ad un transfer superficiale, al portarsi dietro la nozione che « in questo caso le distanze saranno uguali, come nell'originale », ma può ben darsi che sia dovuto al fatto che è la struttura che la richiede ed è questo che può essere stato afferrato nel caso originale. Naturalmente vi sono due possibilità per una comprensione strutturale della situazione. La risposta di martedì può darsi non sia basata sul trasportare alcune caratteristiche arbitrarie dell'esperienza di lunedì, in base alla semplice assunzione che « oggi sarà lo stesso di ieri », ma prendendo in considerazione una ragionevole interrelazione strutturale, afferrata nell'esperienza di lunedì, che determina la risposta nel problema di martedì. Oppure può darsi che non si sviluppi fino a che non interviene il confronto con il problema di martedì.

Eccovi i passaggi espliciti in un processo che tratti la situazione -5, 0, +3:

Passaggio 1. Qual è il vero significato di questi numeri? Presi da soli non li capisco.

Passaggio 2. L'oscillazione appare costante e in equilibrio. Questo richiederebbe simmetria nel valore dei numeri.

Passaggio 3. I punti estremi distano otto unità; le distanze simmetriche dal centro, perciò, sono 8 diviso 2, e i valori dei punti estremi risultano così, strutturalmente, -4 e +4.

Passaggio 4. Ma essi ci vengono dati come -5 e +3. Come si può comprendere questo? Molto semplicemente. (A questo punto vi è una radicale separazione delle caratteristiche strutturali dai fattori esterni.) La posizione della scala determina in parte il valore numerico dei punti estremi; ma la posizione della scala (fondamentalmente del tutto esteriore), non ha nulla a che fare con la relazione dei punti estremi dello spostamento del raggio di luce dall'uno all'altro, ed è arbitraria rispetto alla struttura interna dell'evento. Quindi, per capire i numeri, dobbiamo mettere in luce quale sia il contributo della posizione arbitraria della scala. La scala è di una unità fuori posto: la correzione di -5 attraverso +1 dà lo strutturalmente appropriato -4, e la correzione di +3 attraverso +1 dà il giusto +4.

Passaggio 5. Fin dall'inizio, la posizione dello zero risultava sconcertante. La comprensione strutturale dei valori numerici dei punti

estremi porta con sé la chiarificazione dello « zero » in $-5, 0, +3$. In nessun modo esso appare in una posizione rilevante per quanto riguarda la struttura nell'oscillazione. Non rappresenta la presunta posizione del raggio di luce, se il movimento oscillatorio dovesse fermarsi. Lo « 0 » è semplicemente un punto di passaggio incidentale, il cui valore strutturale non è 0 ma $+1$. Il punto -1 , per niente rilevante nella situazione $-5, 0, +3$, viene considerato come il vero centro.

In questo procedimento sono implicate alcune assunzioni³ circa la semplice ragionevolezza della struttura: si assume, ad esempio, che non vi siano fattori nascosti che provochino l'unilateralità, o l'asimmetria nell'oscillazione. Uno dei ragazzi aveva guardato dietro allo schermo per vedere se la scala era al posto giusto rispetto allo specchio; un altro ragazzo, di cui non ho parlato prima, voleva che fermassi l'apparato per vedere dove si sarebbe fermato il raggio sulla scala, se a 0 o a -1 ! Se lo « 0 » in $-5, 0, +3$ fosse risultato al posto giusto, sarebbe stato davvero imbarazzante ed avrebbe portato alla ricerca di una ulteriore causa nascosta che rendesse comprensibile l'asimmetria. Si dovrebbe studiare ancora un altro procedimento (se questo fosse possibile con l'apparato a disposizione), cioè la velocità della luce in movimento, per determinare a quale punto l'accelerazione positiva diventa negativa e per vedere se questo punto di velocità massima si trova a 0 o a -1 .

³ Qui non ho fornito esplicitamente gli assiomi presenti in questi avvenimenti strutturali, ma non sono difficili da formulare. Oltre ai problemi di struttura interna, qui è presente, come si è detto in precedenza, un processo di separazione degli elementi strutturali da caratteristiche esterne alla struttura, processo molto simile a quello di trasportare le melodie. A questo punto potrei aggiungere che il trasporto non può venire sempre eseguito in modo completamente arbitrario. Nelle melodie l'altezza o livello generale dell'insieme è in gran parte, ma non del tutto, esterna rispetto alle caratteristiche di struttura della melodia; se spostato troppo lontano può darsi che il livello non sia più appropriato alla struttura; le caratteristiche strutturali di una melodia in basso sono diverse da quelle delle melodie intonate alte. Similmente, se si allargano o si riducono eccessivamente le dimensioni di un'opera d'arte, si può notare che diventano inappropriate; che in effetti esiste una « misura appropriata » (come viene sottolineato dal filosofo Georg Simmel). Condizioni analoghe valgono per la fisica e per l'ingegneria. Confrontate il problema della stabilità di un elefante o di un edificio ingranditi cento volte. Questa è una delle ragioni per cui è uno sbaglio pensare che nelle strutture (o *Gestalten* o « holistic organisation ») ha importanza *soltanto* l'organizzazione in termini della disposizione, e che la natura concreta dei membri-parte, oppure il « livello » globale, è sempre variabile e arbitraria. Lo è in certi casi, ma solo quando le esigenze strutturali non giungono fino a queste caratteristiche.

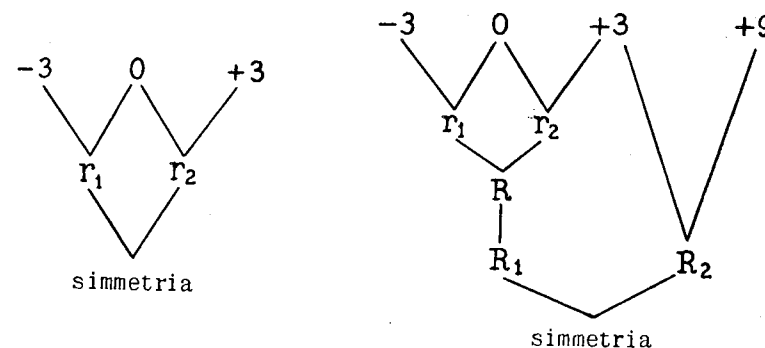
Ho descritto in maniera esplicita questi eventi di modo che in questo caso elementare si possa vedere che i problemi di qualità di insieme non sono affatto imprecisi, ma possono essere trattati esattamente. Questo perché, anche se vi sono ancora molti dell'opinione che non vi sia un modo esatto per trattare lo studio del pensiero dall'alto al basso, il processo di pensiero nell'esempio qui descritto può venire espresso in operazioni con simboli quasi con la stessa esattezza dei procedimenti dal basso all'alto.

Alcuni potranno muovere obiezioni al fatto che si parli di qualità di insieme, pensando che una cosa come la simmetria sia soltanto una relazione di relazioni. Non è così, e questo si può vedere mettendo a confronto i due gruppi seguenti:

I	-3	+3	
II	-3	+3	+9

Tra -3 e $+3$ vi è vera simmetria solo fino a quando costituiscono un tutto; se il tutto fosse come nel gruppo II, -3 e $+9$ sarebbero i punti strutturalmente simmetrici e $+3$ non sarebbe più il corrispondente simmetrico di -3 , ma il centro — lo zero — della struttura.

I valori strutturali sono $-6 \quad 0 \quad +6$
 spostando la scala di $+3$ $+3 \quad +3 \quad +3$ otteniamo
 l'aspetto « -3 » « $+3$ » « $+9$ »



La relazione tra le relazioni -3 e 0 , e 0 e $+3$ non è più una relazione di simmetria: è soltanto una delle tante relazioni. Il chiamare « simmetria » una relazione di relazioni comporta il problema dell'insieme; la relazione R_1 può essere « uguaglianza inversa »,

o « immagine specchio » delle due relazioni r_1 e r_2 , ma non è simmetria.

Per tornare alla situazione $-3, 0, +3$, le due relazioni r_1 e r_2 non sono semplicemente una ripetizione della stessa relazione. La loro direzione è importante, in quanto operano essenzialmente in direzioni opposte. Confrontate

1) $\longrightarrow \longrightarrow$ 2) $\longleftarrow \longrightarrow$ 3) $\longrightarrow \longleftarrow$;

il primo caso, rispetto alla struttura, è completamente diverso dagli altri due, che danno simmetria, che provvedono equilibrio: una specie di « chiusura », una ragionevolezza nell'equilibrio del tutto. Il ruolo di tali qualità d'insieme diventa in particolar modo chiaro in uno studio sistematico delle varianti.

Per citare qui soltanto un punto, spesso un cambiamento maggiore nei singoli termini significa un cambiamento minore in termini di struttura, e viceversa. Ad esempio, il mutare la grandezza di entrambi i vettori del gruppo 2 da $\longleftarrow \longrightarrow$ a $\longleftarrow \longrightarrow$, di contro al mutamento di uno solo di essi: $\longleftarrow \longrightarrow$; oppure l'aggiungere ai vettori del gruppo 2, altri due vettori,

da $\longleftarrow \longrightarrow$ a $\longleftarrow \longleftarrow \longrightarrow \longrightarrow$,

di contro all'aggiunta di uno solo, $\longleftarrow \longrightarrow \longrightarrow$.

Questi sono esempi assai elementari del vasto problema della variabilità in termini di « qualità d'insieme »; problema fondamentale per la definizione di una differenza tra un'interpretazione strutturale affinata e quella cieca e frazionante nelle operazioni di confronto, astrazione, generalizzazione, ecc.

*Il quadrato di un binomio; imparare l'aritmetica **

Il metodo A-B è stato illustrato in vari esempi precedenti: l'area del parallelogrammo, il ponte, più tre-meno tre, gli angoli opposti al vertice. Il principio che guida questo metodo è legato a un problema centrale della teoria della forma, quello della differenza radicale che vi è tra l'aggregato, il mosaico, la concatenazione, da una parte, e le condizioni che determinano un insieme coerente, una buona forma dall'altra. Io ho introdotto ed usato questo metodo in campi molto diversi, quali il riconoscimento di melodie di figure e lo studio delle prestazioni motorie. È applicabile in quasi tutti i settori della psicologia.

Un giorno mi capitò di trovare un libro di uno psicologo di chiara fama.¹ Mentre lo scorrevo vidi una sezione (Appendice III, pagg. 458-464) che trattava dell'effetto prodotto dal cambiamento di alcuni dati sui processi fondamentali del ragionamento. Osservando la messa a punto sperimentale e i risultati descritti in quella sezione (prima di aver letto le altre parti del libro), mi dissi: « Oh, che fortuna. Qui viene già usato il metodo A-B ».

Poi cominciai a leggere con maggiore attenzione il primo paragrafo della sezione. Le formulazioni teoretiche sembravano strane, specialmente per quanto riguardava il metodo A-B. « Tanto meglio », mi dissi, « se uno psicologo che parte con una concezione così diversa è giunto allo stesso metodo ».

* Questo capitolo non era incluso nell'edizione originale sebbene un primitivo indice trovato tra le carte di Max Wertheimer indicasse che egli un tempo aveva avuto l'intenzione di usarlo in questo punto. Il manoscritto di questo capitolo non aveva la forma definitiva dei capitoli compresi nell'edizione originale. Si è dovuto perciò procedere a un po' di lavoro redazionale, cercando, però, di contenerlo al minimo. — M. W.

¹ THORNDIKE, E. L. ed altri, *The psychology of algebra* (New York, Macmillan, 1923)

Andando avanti con la lettura accaddero alcune cose che possono far luce su questa impostazione teoretica. Leggiamo le prime formulazioni. La sezione ha inizio con il seguente paragrafo:

« La psicologia meno recente, perpetuata nelle dottrine e nella pratica educativa corrente, considerava il ragionamento come una forza in gran parte indipendente da abitudini associative, una forza che operava per correggerle ed opporsi ad esse. La psicologia d'oggi trova che la mente è guidata costantemente dall'abitudine, e la correzione o l'opposizione hanno luogo in certe abitudini più elementari, non intelligenti e grossolane, da parte di altre più elaborate, selettive e astratte. Il ragionamento viene definito come l'organizzazione e la cooperazione delle abitudini piuttosto che come una speciale attività al di sopra del loro livello, e ci si aspetta che il "ragionamento" e l'abitudine o l'associazione, lavorino insieme in quasi ogni atto di pensiero ».

Nel leggere questo brano ho incontrato alcune difficoltà. Ad esempio l'espressione « abitudini non intelligenti » aveva tutta l'apparenza di dare la cosa per scontata. Inoltre non avevo chiaro il senso di alcuni termini come « selettivo », « organizzazione », « cooperazione ». Questi termini sono intesi, mi domandai, nello stesso senso in cui sono applicati a materiali insensati, come l'apprendimento meccanico di sillabe? Oppure si riferiscono all'apprendimento in cui l'insegnante chiama certe connessioni stimolo-risposta sbagliate, certe altre giuste? Mi sono trovato a chiedermi addirittura: « Ora, l'autore vuol dire che il pensiero è costituito da abitudini associative, oppure no? ». Sembrava di sì, e poi di nuovo sembrava di no. Alcune formulazioni del testo non sembravano implicare una basilare identificazione del pensiero con tali fatti e pratiche associative, come ad esempio (pag. 462) « ...le abitudini associative non si ritirano di fronte all'attacco della ragione ». Oppure (pag. 461), « ...vi è una sostanziale interferenza con il pensiero (prodotta da una variazione sperimentale del contenuto di un problema) ». Poi vi erano formulazioni come le seguenti (pag. 251) circa « astrazione, generalizzazione e ragionamento »: « queste facoltà più alte sono in realtà la collaborazione di molte connessioni o legami selezionati ed a cui viene dato un valore appropriato per qualche scopo ». Queste parole mi rimisero nella stessa difficoltà: è questo un dare la cosa per scontata?

Poi, sulla prima pagina della prefazione, ho incontrato la seguente asserzione: questo libro « considera l'apprendimento come formazione di... connessioni o legami o abitudini elementari, e trova che il pensiero ed il ragionamento — le cosiddette attività supe-

riori — non sono forze che si oppongono a queste abitudini, ma sono queste stesse abitudini organizzate a lavorare assieme e selettivamente ».

« Bene », pensai « si tratta proprio della teoria dell'associazione, ed i termini "selettivo", "organizzazione", "collaborazione", sono certamente intesi qui nel modo in cui sono comunemente applicati a materiali imparati meccanicamente, all'apprendimento di sillabe senza senso. Ma come è possibile giungere a tali formulazioni proprio attraverso il metodo A-B », pensai « che nella mia esperienza sembra mostrare la fondamentale inettitudine di una teoria di pensiero meramente associazionistica e sommativa? ».

Nei loro esperimenti gli autori mettono a confronto le reazioni di studenti a coppie di esercizi di algebra. Un membro della coppia è un esercizio abituale, l'altro è simile, ma mutato in termini un po' meno familiari. « ...la situazione concreta in un caso è quella attraverso cui si sono formate le nostre ordinarie abitudini associative, mentre nell'altro i particolari concreti sono lievemente alterati » (pagg. 458-459). Ad esempio (pag. 459):

Consueto

- 1) Qual è il quadrato di $x+y$?
(reazione appresa: $x^2+2xy+y^2$)
- 4) Quali sono i fattori di x^2-y^2 ?
[reazione appresa: $(x+y)(x-y)$]

Cambiato

- 1) Qual è il quadrato di b_1+b_2 ?
- 4) Quali sono i fattori di $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$?

I risultati sperimentali mostravano che la percentuale di errori è considerevolmente maggiore quando il compito è del tipo cambiato che quando è del tipo consueto. Ed a questo modo sembra che gli autori provino la tesi dell'associazionismo, che cioè il pensiero è costituito da abitudini. Sembra una cosa ormai scontata: se il compito familiare, originale, viene mutato in uno meno consueto, otteniamo risultati più scadenti.

Devo confessare che le grandi differenze registrate in questo caso mi hanno dato una triste sensazione. [Il cambiamento nel caso 4 richiede di più, cioè vedere che $\frac{1}{x^2}$ è uguale a $\left(\frac{1}{x}\right)^2$]. Di che tipo di

classe si trattava? Che genere di educazione avevano mai ricevuto, dal momento che cambiamenti così lievi, che in effetti non intaccavano minimamente il carattere del problema, creavano tanta difficoltà? Naturalmente, responsabile degli errori poteva essere l'in-

troduzione di indici inconsueti e di frazioni, e non la semplice sostituzione di termini, come, ad esempio, b per x e c per y .

Osservando il procedimento d'un tratto la cosa mi diviene chiara: questo non è il metodo A-B. È un metodo unilaterale e, in effetti, cieco al problema del pensiero. Non studia il pensiero, non prova la comprensione, ma definisce il concetto di «più complesso» in modi del tutto periferici; è lo studio di una metà del metodo A-B; uno studio delle influenze contrarie che derivano dall'aderire ad abitudini cieche di apprendimento meccanico. È una dimostrazione che alcuni processi possono essere determinati da procedimenti meccanici senza l'intervento del pensiero. Non tocca per nulla il problema del vero pensiero — con la possibile eccezione di una pura generalizzazione di routine.

Se voglio studiare e provare *non* il ruolo e l'influsso della memoria meccanica, servile, cieca, ma i problemi del pensiero, allora non posso limitarmi a cambiamenti come quelli citati, ma devo introdurre coppie di cambiamenti di quest'altro genere. Come illustrazione prenderò il primo esempio. Per amore di semplicità, rovesciamo il problema e chiediamo i fattori di queste espressioni:

Originale: $a^2 + 2ab + b^2 = \dots$ La risposta appresa è $(a+b)^2$

esempio B: $a^2 + 2ab - b^2 = ?$

esempio A: $a^2 - 2ab + b^2 = ?$

Visto dal di fuori, in termini di familiarità, in ciascuna delle due variazioni un segno più è mutato in un segno meno. Ma se il soggetto scrive $(a-b)^2$ come risposta all'esempio B, questo dimostra che non ha pensato veramente, o che forse non ha afferrato per nulla il problema. Chiunque non veda la fondamentale differenza tra questi due cambiamenti non ha proprio afferrato la questione. Il segno meno nei due casi significa, per quanto riguarda la struttura, cose fundamentalmente diverse. Il meno davanti ad ab , nell'esempio A, significa « $-ab$ più $-ab$ »; questo implica strutturalmente che uno degli elementi, ad esempio b è negativo e l'altro positivo. In questo non vi è nulla di male: $-b$ volte $-b$ da $+b^2$; per cui abbiamo le basi per l'elementare forma binomiale $(a-b)^2$. Ma e nel caso B in cui abbiamo $-b^2$? Questo significa che uno dei due fattori deve essere positivo e l'altro negativo se si deve arrivare ad un prodotto negativo; nel quadrato del binomio, b dovrebbe essere allo stesso tempo positivo e negativo, il che naturalmente è un controsenso.

Il segno meno in « $-b^2$ » può voler dire un'altra cosa, se il meno vale per l'intera espressione e non soltanto per b^2 , come in $-(a+b)^2$ oppure in $-(a-b)^2$. Ma qui si richiede la simmetria di a e b : in un binomio elevato al quadrato, a deve dividere il destino di b ; e questo non è certamente vero nel nostro esempio B.

Si può obiettare che la tecnica algebrica ha precisamente il merito di liberare la mente da questa comprensione strutturale, e di permettere invece regole meccaniche di procedimento. Questo è certamente vero, ma in processi produttivi, cose come «avvertire la necessità di una simmetria per quanto riguarda la sorte di a e b » rivestono un ruolo decisivo nel condurre ad una nuova comprensione, oppure nello scartare qualche proposta cieca. E anche qui, in casi come quello appena discusso, una «sensazione» della differenza di struttura tra i due segni meno (quelli di $-ab$ e di $-b^2$) sembra fondamentale per il procedimento sensato.

Vi è anche in questo caso la possibilità di cambiamenti teoricamente molto interessanti (metodo del B «elegante»):

Un cambiamento B: $a^2 - 2ab - b^2$

Un cambiamento A: $-a^2 - 2ab - b^2$

Il caso A, visto nelle sue parti, è sottoposto agli *stessi* mutamenti, ed a mutamenti *ancor maggiori* rispetto all'originale, e questo dimostra chiaramente che è un procedere alla cieca il voler trattare con cambiamenti «qualsiasi», oppure con la «quantità» di cambiamento. Lo «stesso» cambiamento, visto a se stante, può voler dire cose fundamentalmente diverse per quanto riguarda la struttura e la ragionevolezza della risposta. E questo è il significato del metodo A-B: la «stessa» quantità di cambiamento oppure una quantità *minore*, possono produrre un caso B, ed un cambiamento maggiore se considerato in sé, può portare, per il soggetto pensante, ad un caso A. Il significato strutturale dei cambiamenti è decisivo. Le reazioni dei soggetti pensanti non sono, nell'insieme, compromesse veramente se i casi B risultano, presi elemento per elemento, molto simili all'originale, mentre i casi A comportano cambiamenti in quasi tutti gli elementi.

Il caso A può risultare completamente diverso. Se, ad esempio, si è veramente afferrata la situazione originale e si ha ben presente ciò che è in discussione, ci si può trovare imbarazzati e non far nulla nel caso B, $a^2 + 2ab^2 - b^2$, sebbene esso comporti il cambiamento di un solo segno; ma si può procedere con sufficiente sicurezza di fronte

a compiti come $-m^2 - 2mn - n^2$, oppure, talvolta, anche di fronte a $-m^2 - 6mn - 9n^2$, in cui quasi tutti gli elementi sono mutati, ma la struttura no.

Fin qui abbiamo preso in considerazione due esercizi cambiati che venivano confrontati, ma è anche possibile vedere reazioni A e B usando un solo esercizio cambiato. Per esempio: si fa imparare l'originale e poi si presenta il seguente problema: $-a^2 - 2ab - b^2$. La reazione B è $(a-b)^2$ e la reazione A $-(a+b)^2$. Ora un soggetto che pensa ad alta voce potrebbe dire: « Oh, ho imparato che $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. Questo lo ricordo bene ». E continua « Che cosa implicava ciò? » Rispondendo alla sua stessa domanda, riprende: « Nell'esempio che ho imparato, la risposta contiene due termini, a e b , che sono uniti da un segno più, che è anche il segno di ogni termine dell'espressione. Qui il segno di ogni termine è negativo, perciò... $(a-b)^2$ ». Questo procedimento comporta chiaramente un'astrazione, assai maggiore che nel caso in cui s'introducano simboli nuovi come m e n . Sono state affrontate le regole, ma in modo chiuso alla struttura.

La reazione A comporta il riconoscere che la struttura è la stessa di prima, comprendendo che i segni sono negativi nell'interna espressione, per cui il risultato sarà $-(a+b)^2$, con una separazione tra struttura interna e destino dell'insieme.

La forza d'urto dei segni negativi viene accresciuta maggiormente se viene dato un problema come il seguente: $-(-a^2 - 2ab - b^2)$. Ho visto un ragazzo svegliare osservare questo esempio, esitare un bel po', poi sorridere e scrivere, nonostante tutti i cambiamenti: $(a+b)^2$. Questo significa forse che, nonostante i cambiamenti, egli diede la risposta appresa in precedenza? Ne dubito. Lo può aver fatto unendo il primo segno meno con tutti gli altri, cambiandoli tutti in segni più. Mentre lavorava al problema, egli fece alcune osservazioni spontanee come: « Tutto questo sembra terribilmente negativo... tutti i termini dentro parentesi sono negativi; questo vuol dire $-(a+b)^2$. Ma il segno meno dell'intera espressione è a sua volta annullato dal primo segno meno ». Cioè l'espressione era diventata $-(-(a+b)^2)$, che, naturalmente, è $(a+b)^2$.

Ecco alcuni altri esempi: quali sono i fattori delle seguenti espressioni?

- 1) $a^2 + 2ab + 4b^2$
- 2) $a^2 + 4ab + 4b^2$
- 3) $4a^2 + 2ab + 4b^2$

- 4) $4a^2 + 4ab + 4b^2$
- 5) $4a^2 + 8ab + 4b^2$

Si può procedere in un modo diverso da quello di cambiare i segni; si possono cioè introdurre anche cambiamenti nei termini. Un caso B estremamente grossolano sarebbe $a^2 + 2bc + b^2$, oppure $a^2 + 2bc + c^2$. Ma, ritornando agli esempi precedenti, l'esempio 1) è un caso B, in quanto viola la struttura: « $2ab$ » richiede « b » come uno dei termini, mentre « $4b^2$ » richiede come termine « $2b$ ». L'esempio 2) è un caso A: in accordo con la struttura, sia il secondo che il terzo membro richiedono come termine « $2b$ ». Il procedimento ragionevole comporta che venga afferrato il diverso significato del coefficiente « 4 » nei due termini. In « $4ab$ » è 2 più 2 , mentre in « $4b^2$ » è 2^2 . Gli esempi 3) e 4) sono simili all'1), nel porre domande senza senso sui termini, violando la struttura complessiva dell'espressione. L'esempio 5) è un caso A, poiché il « 4 » in « $4a^2$ » e in « $4b^2$ » è 2^2 e l'« 8 » in « $8ab$ » è 4 più 4 (in realtà 2 per 2 , più 2 per 2); oppure lo si può vedere come una trasposizione, dissociando la struttura interna nel seguente modo: $4(a^2 + 2ab + b^2)$.

Un soggetto che ha afferrato la struttura e le sue esigenze, talvolta dopo aver osservato per breve tempo il problema, spesso riesce a vedere a colpo d'occhio che le espressioni 1), 3), 4) non vanno bene, per quanto riguarda la interrelazione tra il coefficiente del termine ab ed i coefficienti di a^2 , di b^2 o di entrambi; con uno sguardo complessivo, d'altra parte vede che 5) e 2) vanno bene. Il problema 5) sembra leggermente più facile del problema 2); in 5) vi è la simmetria originale, mentre in 2) l'eguaglianza dei due 4 (che non è un'eguaglianza strutturale) è di disturbo.

Ritornando al problema di base, abbiamo visto che il fattore decisivo non è l'entità del cambiamento, né la somiglianza del nuovo compito, nelle sue parti, con il compito imparato in origine. La ragionevolezza delle operazioni ha una connessione interna con la struttura, non con la somma degli elementi, con la somma dei legami, ecc.

Ma nemmeno con questo abbiamo enunciato il vero punto della questione: la caratteristica essenziale non è quella di eseguire un'operazione in conformità con l'identità o la somiglianza della struttura in esame con qualche « struttura » precedente. La stessa struttura a disposizione deve essere in sé una buona forma, un insieme coerente, e deve essere esaminata e vista a questo modo. Nell'esempio originale abbiamo un'equazione che contiene due espressioni, una da una par-

te e una dall'altra del segno di eguale. Non è la fondamentale identità o somiglianza del membro a sinistra del nuovo problema con quello a sinistra del vecchio (oppure quello a destra nel nuovo e nel vecchio compito) che è, ragionevolmente, decisiva per la risposta. Il fattore decisivo è l'interrelazione della risposta al problema in esame. La risposta deve inserirsi come parte della relazione s (sinistro) = d (destro). Il segno di uguaglianza richiede che s e d siano, nella loro essenza, identici (con la sola differenza, richiesta dal problema, che d deve essere un'espressione più semplice). E questa esigenza, che cioè i due membri siano in accordo, che siano nella relazione « uguale », è decisiva. Per un soggetto che pensi, la professoressa non ha insegnato a considerare il procedimento specifico che lei ha dato come esatto e tale da essere soltanto trasferito e applicato. Capire, infatti, comporta afferrare la relazione interna, la relazione ρ , vedere come si derivi d da s in maniera sensata, oppure, girando l'espressione, come si derivi s da d , e quale sia il significato strutturale degli elementi nella formula.

Un logico a questo punto potrebbe obiettare: « Perché parlate qui di questa misteriosa relazione ρ ? La ragionevolezza, l'esattezza delle risposte è basata semplicemente su assiomi e teoremi. Le operazioni esatte qui sono in conformità con gli assiomi dell'algebra e dell'aritmetica, e se non lo fossero, sarebbero sbagliate. Le derivazioni sono soggette alle norme della validità logica. (E questi assiomi sono soltanto alcuni assiomi, scelti per il sistema) ».

Rimando il lettore a quel che segue in questo capitolo, sulla macchina educativa (pp. 179 sgg.). Se noi parliamo in termini non di matematica astratta, ma di vera equivalenza di s e di d , potremmo anche supporre che la natura sia più complicata, al punto che questi assiomi non abbiano più valore. Tuttavia la relazione ρ , con il suo adattarsi o meno, distinguerebbe i casi che sono semplicemente ragionevoli da quelli che non lo sono. Naturalmente in un caso come quest'ultimo dovremmo abbandonare il criterio della semplice coerenza e cercare qualche altra cosa più a fondo. E potremmo perfino immaginare che la natura renda impossibile qualsiasi assioma ragionevole; ma fortunatamente questo modo sensibile e ragionevole di ottenere i valori va bene. Questa analisi fornisce anche una risposta al problema dell'*a priori*: non vi è nulla in questa concezione che costringa la natura, quando si danno casi di « vera equivalenza » a procedere in accordo con gli assiomi dati. Qui non si tratta di necessità cieca e assoluta, com'è considerata nella concezione dell'*a priori*, ma

della speranza e della modesta assunzione che usare la ragione ha un senso nel mondo in cui viviamo.

Perché quell'argomento, il ricorso agli assiomi, a proposizioni generalissime, come realtà di base, è in un certo senso illusorio, come avevano già dimostrato lucidamente antichi filosofi, Locke per esempio, non fornisce la risposta al nostro problema. È assai più naturale, per i bambini e anche per gli adulti, afferrare quello che qui chiamiamo « ciò che soddisfa i requisiti di un caso concreto », che non concepire, o saper affrontare, l'astratta generalità degli assiomi.

Un associazionista potrebbe chiedere a questo punto: « Se un uomo usa la riflessione in tali esempi, se reagisce in modo "sensibile", questa "riflessione" non è forse di nuovo una questione di abitudine? Prendiamo un semplice esempio. Se uno scolaro, nel risolvere un'equazione concernente una x , porta tutti i termini in x da una parte dell'equazione, certamente si vale di un'abitudine, e di un'abitudine molto utile. Mette in pratica quello che gli hanno insegnato, quelle cose in cui si è esercitato ».

Naturalmente, può essere qualcosa che si è acquisito con l'esercizio, con l'abitudine meccanica. Ma è anche, a parte tutto questo, un procedimento ragionevole. Dal momento che si deve trovare l'incognita, x , è ragionevole che i termini contenenti la x , e solo questi, si trovino in un unico membro dell'equazione. Qui interviene una relazione ρ . Naturalmente, è utile che questa operazione venga resa abituale. Trattando « automaticamente » tali situazioni, la nostra mente è libera di occuparsi dei problemi più « alti » implicati nel compito. Tuttavia, rimane sempre una profonda differenza tra il cieco uso dell'abitudine e l'esecuzione di operazioni sensate. Per esempio, prendiamo l'equazione $100a^2 - 20ax + x^2 = a^2 + 20ax + 100x^2$: trovare il valore di x . Un soggetto, seguendo sicuro quello che gli hanno insegnato, trasporta da un lato i termini

in x e scrive: $99a^2 = 99x^2 + 40ax$ quindi: $x^2 + \frac{40}{99}ax = a^2$. Non

sapendo come trattare una simile equazione, si arresta, privo di risorse. Invece, un soggetto che non segue le abitudini alla cieca, ma sa riconoscere la struttura, non pensa di cominciare col trasportare i termini in x tutti insieme da una parte, ma scrive: $(10a - x)^2 = (a + 10x)^2$; quindi procede facilmente alla soluzione. Nel primo caso, i termini in x sono considerati in modo cieco alla struttura, nel secondo caso no.

Qui potrebbe essere sollevata un'altra obiezione: « Il primo procedimento non è affatto sciocco, perché esiste una formula generale che insegna a ricavare la x dall'equazione ottenuta. È semplicemente l'ignoranza da parte del soggetto delle formule generali per risolvere le equazioni quadratiche, ciò che provoca esitazione. Ed è certamente meglio conoscere questa formula generale ».

Ora mi sembra che questa sia un'obiezione cieca: in primo luogo vediamo che è possibile una soluzione ragionevole *senza* una conoscenza della formula « generale »; in secondo luogo, problemi analoghi sorgono nuovamente anche con la formula « generale »: procedimenti alla cieca di contro a procedimenti sensati, che abbiano chiari i requisiti della struttura.

* *

Nella *Psicologia dell'aritmetica*² di Thorndike ritroviamo l'atteggiamento generale che abbiamo già presentato in questo capitolo, espresso con forza ancor maggiore. « Il ragionamento non è una specie di forza radicalmente diversa che opera contro l'abitudine, ma la organizzazione e la collaborazione di molte abitudini, il pensare più fatti insieme. Il ragionamento non è la negazione dei legami ordinari, ma l'azione di molti di essi, specialmente di legami con gli elementi indefinibili della situazione. Non vi è nessun potere esterno che entra a selezionare e a criticare: quello che opera la scelta e il rifiuto è il repertorio totale di legami che l'allievo possiede a proposito di quel dato problema » (pagg. 193-194). E « risposte centrate a dati insoliti, associazioni per somiglianza e comportamento intenzionale sono in opposizione soltanto apparente alle leggi fondamentali dell'apprendimento associativo. In realtà sono esempi meravigliosi di esso » (pag. 191).

Leggendo la pagina 192 di quel libro rimasi profondamente colpito dalla descrizione di come i bambini possono confondersi facendo esercizi di aritmetica. La discussione riguarda bambini a cui vengono dati esempi del tipo seguente, dopo aver loro insegnato a sommare e a sottrarre numeri di una o due cifre e a moltiplicare numeri di una cifra:

Moltiplicare	Moltiplicare	Moltiplicare
32	43	34
23	22	26
—		—

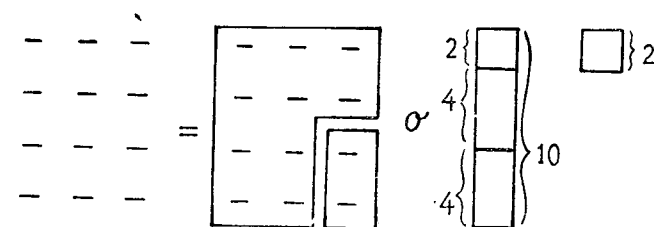
² THORNDIKE, E. L., *The psychology of arithmetic* (New York, Macmillan 1922).

Thorndike scrive che « sommeranno i numeri o sottrarranno il numero inferiore da quello superiore, oppure moltiplicheranno 3×2 e 2×3 , ecc., ottenendo 66, 86, e 624... » Naturalmente tutti noi conosciamo bambini che affronterebbero i problemi in questo modo. Ma non si tratta forse dei deplorabili prodotti di una ripetizione meccanica insensata? E non conosciamo forse bambini che si rifiuterebbero di fare cose così sciocche e insensate, e direbbero piuttosto: « Non so farlo »?

Molto spesso se un bambino esegue in effetti queste operazioni insensate, guarderà con smarrimento l'insegnante, per cercare di indovinare dalla sua espressione quale sia la cosa giusta, poiché il suo atteggiamento è questo: « l'insegnante me lo dovrebbe dire ». Questa è la situazione normale, con l'insegnante che semplicemente dà ordini, dichiara che questa risposta è giusta, quella sbagliata.

Ma se l'insegnante non dice, come un *deus ex machina*: « Questo è giusto, quello è sbagliato », dove va a finire la legge dell'effetto? Si rendono conto gli psicologi che la legge dell'effetto non può essere d'aiuto, semplicemente perché non la si può applicare in realtà? Il successo può essere di aiuto, ma se il bambino non sa se ha raggiunto un vero successo o meno, in quale modo mai dovrebbe giovare il principio della legge dell'effetto?

Ma è vero, come Thorndike e altri sembrano asserire, che il « bambino di ingegno sufficiente » (pag. 192), trovando la via esatta, lo fa semplicemente « attraverso l'operato dei legami », attraverso l'abitudine cieca e l'associazione? Eccovi una relazione che ho ricevuto da un bambino che non eccelleva in modo particolare. « È certamente molto complicato. Per prima cosa tenterò un problema meno complicato. Posso farlo? Diciamo, ad esempio, 14×3 . Ora, se ho 4×3 , questo è uguale a..., questo significa 4, 4, 4. Non ha vera importanza se ho 6, oppure 16, oppure 216, oppure un altro numero... Se ho $3 \times 4 = 12$, questo significa



dodici, che a destra assume il significato di $10 + 2$, la giusta rispo-

sta perché ho la stessa quantità, soltanto messa insieme in modo diverso. » (Capire la « risposta esatta » significa rendersi conto del p , il requisito che la quantità da un lato deve essere uguale alla quantità dell'altro lato). « Ora 14×3 significa la stessa cosa di 10×3 più 4×3 , e adesso devo trovare quant'è ». Dopo aver risolto questo, procedette felicemente al problema più complesso, eseguendolo alla perfezione.

Non chiamerei un bambino di questo tipo necessariamente un genio: si tratta soltanto di un bambino che nelle sue operazioni non era condotto da abitudini cieche dalla forza delle associazioni, ma dalla comprensione dell'esigenza di « quantità uguali » ottenute cambiando un elemento senza mutare la sua quantità aritmetica.

I bambini mostrano molto spesso, e questo mi rallegra, una tendenza del tutto normale a procedere in tali problemi ragionevolmente, a risolvere queste cose col proprio sforzo personale, e non attraverso tentativi ciechi. (A dir la verità, vi sono scuole in cui queste pregevoli tendenze ricevono una scossa notevole nei primi anni d'insegnamento. Qualche volta ho l'impressione che i bambini, a questo proposito, avessero molto più buon senso prima di andare a scuola che non dopo essere stati sottoposti alla ripetizione meccanica).

Parlando più in generale, io non ho incontrato bambini che facessero gli sbagli insensati del primo tipo descritto da Thorndike, eccezion fatta per alcune scuole, dove ciò derivava dalla ripetizione meccanica, alla cieca, oppure da stanchezza o negligenza. In secondo luogo, mi sembra che vi siano due tipi di bambini che si rifiutano categoricamente di fare il problema: un primo tipo che pensa di non dover cercare di risolvere cose che non gli sono state insegnate; il secondo tipo è composto da coloro che, non essendo riusciti a risolvere il problema nonostante i loro sforzi, tuttavia si rifiutano di adottare i procedimenti stupidi che vengono proposti. Terzo, io ho davvero trovato bambini che (senza dare l'impressione di essere dei geni) risolvevano tranquillamente il problema.

Un bambino, messo di fronte per la prima volta a problemi come 24×3 , procedette a questo modo: « Non lo posso fare tutto subito, ma, vedete, questo è 4×3 e 20×3 . »

$$\begin{array}{rcl} & 4 \times 3 & = 12 \\ 24 \times 3 & = & + \\ & 20 \times 3 & = 60 \\ & & \hline & & 72 \end{array}$$

E procedette in maniera analoga di fronte ad una moltiplicazione con un numero di tre cifre. Oppure, messo di fronte a problemi complicati, come 27×34 , qualche volta un bambino procederà a questo modo:

$$\begin{array}{rcl} 20 \times 30 & + & 20 \times 4 \\ 7 \times 30 & + & 7 \times 4 \end{array}$$

Ci si trova di fronte ad un compito diverso quando si cerca di fare usare al bambino la via più corta, che pone questa condizione, « non devi farlo nel vecchio modo; devi scrivere il prodotto (ad esempio 27×3) direttamente ». I bambini spesso si rifiutano di farlo, non riescono a capire di che cosa si tratti. Quando avviene questo io chiedo loro: « Riuscireste a farlo in modo tale da scrivere soltanto il risultato? » Alcuni allora capiscono che non è questione di arrivare al risultato esatto, ma di inventare una tecnica, un trucco, una ginnastica mentale. E questo comporta il problema di scoprire un procedimento che contiene un certo numero di caratteristiche, come il dividere in parti, una delle quali può venir scritta, ed un'altra dev'essere tenuta a mente temporaneamente, come diverso modo di raggruppamento. Si richiede che ci si renda conto che alcuni numeri possono venir subito scritti, in quanto non verranno ulteriormente influenzati da altri, mentre alcuni altri non si devono scrivere, perché possono ancora essere cambiati.

In pratica, questo vorrebbe dire: nel problema 24×3 posso scrivere con sicurezza il 2 del dodici che ottengo moltiplicando 4×3 , ma non posso scrivere l'1 del dodici, perché può essere influenzato dal prodotto 20×3 . Devo quindi tenerlo a mente, sommarlo al valore successivo e scriverlo solo quando è completo. Non ho trovato nessun bambino che riuscisse a fare questo senza un aiuto. La ragione non sta, penso, nel fatto che il compito è troppo difficile, ma nel fatto che la ginnastica mentale che comporta è troppo strana. (L'abilità in una tale ginnastica mentale non è difficile da sviluppare in molti bambini, ma le differenze individuali mi sembrano molto grandi. E non è un compito di pensiero produttivo: si tratta soltanto di acquistare abilità in una tale ginnastica). « Ciò che viene richiesto » qui *non* è richiesto dal problema stesso, ma da una certa tecnica artificiale che ha vantaggi pratici. Fondamentalmente, le esigenze sono dirette verso un vantaggio tecnico, non aritmetico.

Qualcuno potrebbe pensare che non va bene lasciare che i bambini si servano del primo procedimento, che in seguito non use-

ranno; molti ritengono che non si dovrebbero insegnare al bambino cose che in seguito dovrà disimparare. Io non sono d'accordo. È mia opinione che un buon insegnante comincerà con il primo procedimento, anche se poi il bambino non userà quella particolare tecnica. Il fatto di imparare il metodo breve senza capire come lo si ottiene potrà dotare il bambino di un'abilità di routine, ma non tiene conto dello sviluppo del pensiero (e se viene dimenticato il trucco del procedimento, l'allievo si perde, cosa che non avviene con l'altro metodo).

Penso che il dare 32×23 come primo compito sia psicologicamente un errore. Non solo si confonde l'allievo chiedendogli a primo colpo la scoperta di entrambi gli aspetti, ma anche l'eguaglianza dei numeri (nel moltiplicatore e nel moltiplicando) e la loro mancanza di eguaglianza per quanto riguarda il rapporto posizione-valore è di disturbo (2×3 è 6 da un lato, 60 dall'altro). La cosiddetta legge gestaltista della somiglianza, la quale dice che si tende a raggruppare gli uguali, lavora in direzione opposta a quello che si deve fare. In tali casi si può osservare come l'uguaglianza dei numeri sia un'esplicita distrazione ed una causa di accresciuta difficoltà.

Se avviene che il primo problema sembri troppo difficile, vi è sempre la possibilità di ricorrere a 42×3 oppure 12×3 , casi in cui non vi è riporto, e che non comportano alcuna sovrapposizione nelle decine. In ogni caso a me sembra che il miglior procedimento sia quello di *non insegnare* allo scolaro il metodo breve *senza* che vi sia una vera comprensione da parte sua, ma lasciare che risolva lui il problema, lasciare che trovi i passaggi necessari, in un modo ragionevole, passando da problemi strutturalmente facili ad altri strutturalmente più complessi; il che non significa che i problemi dati debbano essere facili anche per altri aspetti.

Il processo di pensiero in tali casi fa naturalmente uso di cose apprese, ma il procedimento non è governato dall'applicazione cieca di ciò che è stato imparato, come nei casi sciocchi a pag. 192 del libro di Thorndike.³

³ È un problema sperimentale mettere a confronto, con una investigazione precisa, ciò che accade quando ad uno si insegna un metodo alla cieca attraverso la ripetizione meccanica, rispetto a quello che egli acquisisce tramite un processo ragionevole. Per certi scopi, a dire la verità, quando non si ha bisogno di un uomo, ma di un robot, il primo procedimento forse ha il vantaggio della velocità. Questo problema sembra parallelo al caso storico dell'insegnamento della medicina come una tecnica meccanica, di contro al tentativo di addestrare i medici in base alla fisiologia [vedere anche KATONA, G., *Organizing and memorizing* (New York, Columbia University Press, 1940) — M. W.]

A me sembra che l'ideale sia quello di un insegnamento individuale, che adatti il procedimento all'individuo. E sembra che questo potrebbe produrre un risparmio di tempo sbalorditivo. Naturalmente vi sono anche nell'aritmetica cose che devono venir imparate a memoria, ma sono molto poche e generalmente possono essere apprese anche in modo sensato; il fatto che vi sono cose di questo genere non dovrebbe influenzare, o mettere in pericolo, o distruggere le altre cose più importanti, per le quali le prime dovrebbero rappresentare semplicemente un aiuto. Naturalmente l'impossibilità pratica di insegnare tutto individualmente, che comporta anche l'impossibilità di trovare un numero sufficiente di buoni insegnanti, richiede una specie di compromesso. Ma questo compromesso deve proprio essere nella direzione di meccanizzare le menti, distruggendone le spontanee capacità?

Torniamo alla differenza basilare tra i due modi di insegnare l'aritmetica. Vi è un ulteriore modo in cui si possono differenziare. Supponiamo che ai bambini non fosse stato insegnato il significato oggettivo dei numeri, ma venissero loro insegnate le stesse associazioni, *senza* offrire loro esperienza con gli elementi reali, senza il rendersi conto del « combaciare » delle strutture rispetto a questi elementi reali. In alcune scuole, basate sull'associazione e sulla ripetizione meccanica, l'insegnamento spesso si avvicina ad un tale stato. Questo darebbe gli stessi risultati, le stesse possibilità? Potremmo disporlo in modo tale da far sì che desse esattamente le stesse opportunità di costruire tutte le associazioni, ma escludendo la possibilità di un vero pensiero.

Possiamo « semplificare » la situazione, in modo simile a quello usato in molti dei soliti esperimenti sull'apprendimento. Costruiremo una « macchina educativa », che in alto ha una fessura in cui si possono mettere delle scatolette; in basso vi è un'altra apertura, da cui cadono altre scatolette, quando si introduce qualcosa in alto. Sulle scatolette sono segnate delle lettere. Ora voi incominciate ad insegnare ai soggetti che, quando introducono nella macchina una scatoletta segnata *u m u*, dal fondo cade un'altra scatoletta segnata *d*. Se si inserisce una scatoletta segnata *d m u*, ne esce un'altra segnata *t*. Se introducete una scatola col segno *t m u*, ne otterrete una col segno *q*.

Supponiamo che il soggetto impari tutto questo accuratamente di modo che in ogni caso, prima di mettere la scatola nella macchina, vi potrà dire che cosa verrà fuori dal fondo.

Ora gli chiediamo cosa otterrà introducendo una scatola segnata $d m d$. Potremmo ottenere alcune supposizioni a casaccio, oppure un rifiuto, oppure la reazione: « Mi fate provare prima, così posso vedere cosa otterrò? » Ma con tutta probabilità non otterremo la risposta: q . Infatti non vi è alcuna possibilità di un giudizio ragionevole o di una predizione di questo tipo.

Ora supponiamo che invece di dare scatole vuote segnate, diamo scatole costruite in modo tale che nella scatola u c'è una pallina, in quella col segno d ce ne sono due, in quella col segno t tre, e nella scatola segnata q , quattro palline. E m significa mettere il contenuto delle scatolette in un'altra scatola; la risposta è quello che si ottiene vuotando la scatola, oppure ciò che si vede nella scatola quando la si apre ed è possibile scorgere tutte le palline. È tutto diverso: facilmente otterrete la predizione q .

In breve, se trattate non con elementi e connessioni cieche fra elementi, ma con il contenuto ed il risultato delle operazioni, questi risultati saranno in intima relazione con i contenuti e le operazioni. Oppure, se il bambino impara l'aritmetica non attraverso la ripetizione cieca, ma comprendendo le ragionevoli relazioni interne che legano operazioni e risultati, non ha bisogno di comportarsi in modo cieco.

Vi sono qui potenze misteriose, magiche, che operano? Oppure proposizioni innate, *a priori*? No. In queste cose l'esperienza ci può insegnare (e ce lo può insegnare molto concretamente) che i risultati delle azioni sono in relazione significativa con le azioni fatte e con i contenuti usati.

Per metterla in termini estremi: la natura — o anche la nostra macchina — potrebbe avere un carattere tale, per cui gli eventi che hanno luogo in seno ad essa risultino diretti da regole diverse; come, per esempio, dalla regola che qualsiasi cosa si aggiunga ad un elemento, il risultato crescerà sempre di uno ($a+x=a+1$). Quindi la somma di due più due risulterebbe uguale a tre (per derivazione logica dalla regola generale dovrebbe essere 3) e la predizione, per $d m d$, di q risulterebbe di fatto sbagliata. Un mondo magico potrebbe benissimo presentare questi risultati, e non per puro caso, ma per legge: « necessariamente ». In un mondo magico la somma di due elementi concreti potrebbe sempre dare come risultato due, se la regola fosse: $a+b=2$. Per una macchina, o per un mondo magico, questa è una regola possibile. Ma si può subito vedere che vi è un divario tra il segno di uguale o la vera equiva-

lenza da una parte, e la relazione interna fra il membro destro e quello sinistro dell'equazione, dall'altra. Il segno di uguale non ha più il significato che possiede di solito, grazie al quale l'intera equazione è divisa a metà, con le due metà sensibilmente equivalenti l'una rispetto all'altra, una a destra e l'altra a sinistra.

Fortunatamente l'esperienza del mondo reale in cui viviamo ci insegna il tipo di relazione interna che risulta ragionevole in modo particolare a causa della relazione ρ , grazie cioè al concordare delle esigenze con il risultato.

Se paragoniamo la prima situazione (le lettere senza senso) con la seconda (conoscere il significato delle lettere), dobbiamo constatare che vi sono scuole in cui l'apprendimento è simile al primo procedimento, oppure scuole in cui i bambini sono costretti ad usare il primo piuttosto che il secondo. Senza dubbio vi è qualche vantaggio nel far buttar giù alcune operazioni meccanicamente per lasciare la persona libera di trattare problemi più difficili. Ma sebbene il procedimento possa essere necessario per un tale scopo, esso è, al tempo stesso, pericoloso. Infatti, invece di aprire la mente, invece di insegnare a trattare ragionevolmente le situazioni, meccanizza la mente offrendo procedimenti che mutano l'atteggiamento libero e sensibile dei bambini.

Il procedimento sarebbe anche più pericoloso se la maggior parte dei bambini non offrisse, fortunatamente, una resistenza interna a tali influenze. È vero che vi sono bambini che reagiscono come prodotti di una tale istruzione quando si trovano nell'ambiente scolastico, ma fortunatamente, anche fra questi, molti sono abbastanza elastici da disfarsi di questo atteggiamento meccanico fuori di scuola.

Per ripetere: dobbiamo fare una netta differenza tra associazioni cieche, abitudini cieche, esperienze cieche, da una parte, e la realtà del pensiero, che è quella di afferrare l'intima relazione tra le operazioni ed i loro risultati ragionevoli.

La possibilità di comprendere le relazioni ρ in matematica è probabilmente la ragione per cui, da molto tempo, gli educatori hanno sottolineato l'importanza della matematica nell'educazione: non per la sua utilità pratica per certe funzioni della vita, per comperare, per vendere, ecc., ma perché nella matematica abbiamo un materiale in cui è possibile lavorare in un modo meravigliosamente puro, andando direttamente all'intima coerenza dei materiali e delle operazioni. L'opinione di questi vecchi educatori era che nel trattare con tali materiali, nel fatto stesso di avere esperienza di questi

argomenti, nello sviluppare l'abilità di trattarli, si formino capacità e attitudini le quali permetteranno che l'allievo in altre situazioni sia in grado di cercare, di afferrare la ragionevolezza e la coerenza delle situazioni, di farsi guidare da essa.

Certamente gli psicologi che basano tutto sull'associazione, su legami o connessioni S-R, non sono in realtà chiusi ai valori del secondo procedimento, dal momento che essi stessi lo usano molto intelligentemente. Ma sembra che essi lo dimentichino in linea di principio quando vogliono essere « scientifici », o che lo nascondano usando termini come « appropriato », « soddisfacente » ecc. Lo hanno chiaramente riconosciuto nel classificare questi secondi casi, usando termini come: « organizzazione » e « indefinibile ». E forse diranno che alla base vi è solo una differenza nell'importanza che diamo a questi aspetti. Ma il porre il maggior peso sul primo, sulla ripetizione meccanica, e rendere questa fondamentale nelle scuole, può darsi che alla fine metta l'educatore e i suoi metodi in opposizione con la genuina direzione che seguirebbero i bambini, i quali sembrano guidati naturalmente da considerazioni ragionevoli. Può essere quindi che ne escano dei bambini buoni solo ad agire meccanicamente, per imitazione, non soltanto nell'aritmetica, ma anche nei problemi della vita: seguiranno ciecamente il prestigio, seguiranno le mode, le norme, le opinioni politiche o musicali, prestando attenzione, invece che al merito della situazione in sé, a ciò che l'« insegnante » ha detto, oppure alla moda o all'autorità.

Pare dunque che ci siano tre formulazioni fondamentali: o il procedimento senza senso è fondamentale, e quello sensato non è che una complicazione del primo; o vi è una differenza di base tra quello privo di senso e quello sensato, e le leggi che governano ciascuno di essi sono completamente distinte; oppure (e confesso di ritenere che questo punto di vista è il più vicino al vero) i procedimenti sensati sono basilari e quelli insensati non sono che un caso speciale in cui il contenuto interno, la coerenza interna, si avvicinano allo zero. Può darsi che non vi sia affatto una tendenza naturale ad agire meccanicamente. Forse il comportamento meccanico nasce dalla necessità di aggrapparsi all'ultima pagliuzza della coerenza interna, cioè alla regolarità. Il fatto che gli uomini sono spesso guidati dall'abitudine vorrebbe allora dire non che l'abitudine è la fonte basilare e il carattere delle loro attività, ma che è l'ultima risorsa quando vi è un'assenza assoluta di possibilità ragionevoli.

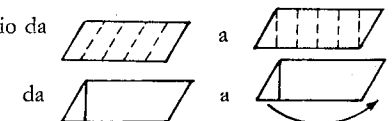
CAPITOLO SETTIMO

Due ragazzi giocano al volano; una ragazza descrive il suo ufficio

Nei capitoli precedenti un elemento ha avuto un ruolo particolarmente importante: il fattore della riorganizzazione ragionevole, del riorientamento che mette in grado il soggetto di avere una visione complessiva¹ della situazione data sotto una prospettiva nuova² e più penetrante;³ è questo il fattore che conduce ad una scoperta e che, in un senso più profondo, la rende possibile. In tali casi

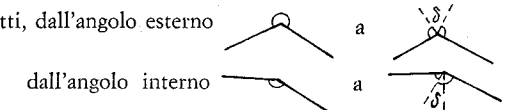
¹ L'avversione da parte dei comportamentisti e degli operazionalisti per termini come « avere una visione complessiva », non li dovrebbe rendere ciechi al problema. Tali termini, io penso, sono del tutto appropriati, ma l'argomento principale può anche venire formulato nei termini di questi estremisti e ciò nonostante rimanere essenzialmente immutato. Anche se qualcuno, abbastanza stranamente, volesse trascurare totalmente i fatti dell'esperienza conscia, le conseguenze della riorganizzazione si manifesterebbero nei cambiamenti del comportamento oggettivo. In un primo esame ciò che veramente importa nel termine « visione di insieme » può venire definito esattamente in termini che vengono formulati operazionalmente.

² Ad esempio (Capitolo primo) il passaggio da



Inoltre (Capitolo quarto), il passaggio da $\rightarrow$ della serie di Gauss come viene vista dapprima, alla nuova concezione $\rightarrow \leftarrow$. Anche più avanti (Capitolo ottavo), il passaggio dalla somma degli angoli interni ed esterni di un poligono alla somma degli angoli

δ (vedi fig. 142) più due angoli retti, dall'angolo esterno



dall'angolo interno

ed ancora, nuovi orientamenti analoghi nei capitoli su Einstein e su Galileo.

³ Ad esempio (Capitolo ottavo), il modo in cui viene concepita la somma degli angoli in una figura chiusa oppure in un solido; il processo di pensiero riferito per ultimo nel Capitolo quarto, pagg. 148-152, anche il sorgere di una visione più profonda nei capitoli su Galileo (Capitolo nono) e su Einstein (Capitolo decimo).

una scoperta non significa soltanto il raggiungimento di qualche risultato che prima non era noto, la risposta in qualche modo data a un problema, ma piuttosto sta ad indicare che una situazione viene afferrata in modo nuovo e più profondo, per cui il campo si allarga e si intravedono possibilità più ampie. Questi cambiamenti della situazione come insieme comportano cambiamenti nel significato strutturale degli elementi che fanno parte, cambiamenti di posizione, ruolo e funzione, i quali spesso portano a conseguenze importanti.⁴

Prima che abbia luogo il processo di pensiero, oppure appena è iniziato, spesso si ha una certa veduta d'insieme della situazione, ed anche delle sue parti, che però in certo modo non si adatta al problema; che è superficiale o unilaterale.⁵ Una tale prima visione inadeguata spesso impedisce una soluzione, uno svolgimento appropriato del problema. Se uno rimane inchiodato a questa visione, spesso non sarà in grado di risolvere il problema dato. D'altra parte, quando il cambiamento ha avuto luogo, e quindi il problema è stato risolto, spesso rimaniamo stupiti al vedere quanto ciechi siamo stati, quanto superficialmente avevamo visto la situazione.

Il cambiamento nella visione di struttura, tenendo presenti le esigenze del problema, è spesso di profonda importanza nello sviluppo della scienza. Questo vale anche per la vita umana in generale, particolarmente nei fenomeni sociali.

Naturalmente un tale cambiamento di struttura è necessario solo se fin dall'inizio non s'era avuta la visione giusta. Spesso la visione iniziale manca soltanto dell'adeguata acutezza, di una chiarezza sufficiente; oppure può darsi che qualche esigenza che la situazione comporta non venga compresa a pieno. In tali casi la soluzione richiede principalmente che la situazione venga ulteriormente chiarificata o cristallizzata, e che vengano compresi aspetti e fattori che nella prima visione erano presenti soltanto vagamente.

Per studiare tali transizioni e le loro conseguenze per il ruolo e la funzione delle parti ho usato talvolta situazioni sperimentali specifiche che provocano un'improvvisa radicale trasformazione da una prima ad una seconda visione. Ho citato alcuni esempi elemen-

⁴ Per esempio, nel Capitolo quarto, pag. 148, « + 1 » diventa lo zero della « serie vera », lo « 0 » diventa « - 1 », ecc.: ancora nello stesso capitolo, pag. 123, il 9, concepito dapprima come $8 + 1$, si muta in $10 - 1$.

⁵ Cfr. gli esempi in WERTHEIMER, M., « Über Schlussprozesse im produktiven Denken », *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie* (Erlangen, 1925) pagg. 164-184; ELLIS, W. D., *A source book of gestalt psychology* (New York, Harcourt, Brace, 1939) selezione 23.

tari (cfr. Cap. primo, pagg. 57-59 sgg.).⁶ Spesso hanno luogo poderosi eventi drammatici, quando un soggetto sperimenta il cambiamento. Le stesse situazioni permettono anche di studiare che cosa accade alle varie regioni della struttura, quando avviene il cambiamento; l'organizzazione e il raggruppamento delle parti; il cambiamento nella posizione delle « caesurae »; il centramento; gli spostamenti nel rapporto di struttura; la comparsa di lacune, di perturbazioni; i cambiamenti rispetto alla misura in cui si possono variare le condizioni locali; gli orientamenti variati nelle aspettative del soggetto e nell'emergere di nuove tendenze d'insieme.

Quando nel pensiero hanno luogo transizioni di questo genere, non è la facilità ad effettuare cambiamenti arbitrari come tale che caratterizza il comportamento intelligente; e non lo è nemmeno l'abilità di produrre una, un'altra o una terza visione della struttura, a volontà, come alcuni sembrano ritenere. Ciò che qui importa piuttosto (ed è una caratteristica dei processi intelligenti) è il passaggio deciso da una visione di struttura meno adeguata, meno appropriata, ad una più sensibile. Ed infatti le esperienze sembrano dimostrare che le persone intelligenti, veramente capaci di pensare, spesso rivelano una notevole capacità di effettuare sottili trasformazioni, e anche i bambini, dimostrano poca abilità ed ancor minore buona volontà di impegnarsi in cambiamenti *senza senso* di situazioni date.

Qualche volta è necessaria la transizione da una somma di fatti priva di struttura, alla struttura appropriata. Ma anche più significativa è la transizione da una visione unilaterale, da una strutturazione superficiale o sbagliata, da una visione scontrata, distorta o insufficiente, alla struttura adeguata e adeguatamente centrata.

La causa principale di un comportamento irragionevole, cieco, sembra dovuta al fatto che un individuo rimane inchiodato ad una vecchia concezione per pura perseveranza e abitudine, col risultato che egli ignora o perfino nega fermamente le esigenze più ragionevoli che vengono chiaramente indicate nella situazione.

Per mostrare più chiaramente come avvengono tali transizioni, vi riferirò ora alcuni semplici esempi tratti dalla vita di ogni giorno, che ho studiato in diversi esperimenti.

⁶ Cfr. anche WERTHEIMER, M., « Zu dem problem der Unterscheidung von Einzelinhalt und Teil », *Zeitschrift für Psychologie*, 1933, vol. 129, pagg. 353-357 (vedere Appendice 1 — M. W.) ed una descrizione di esempi ulteriori tratti dalle mie conferenze in SCHEERER, M., *Die Lehre von der Gestalt* (Berlin, Walter de Gruyter, 1931) pagg. 209-210.

I

Due ragazzi stavano giocando al volano in giardino: io dalla mia finestra li potevo vedere e ascoltare, mentre essi non mi vedevano. Un ragazzo aveva dodici anni, l'altro dieci; giocarono diverse partite: il più giovane dei due era di gran lunga meno bravo e veniva battuto in tutte le partite.

Udivo parte della loro conversazione. Quello che perdeva (chiamamolo *B*) era sempre più scontento. Non aveva alcuna possibilità di vincere: *A* spesso serviva il volano così bene che non gli era possibile rilanciarlo. La situazione peggiorò, e infine *B* scagliò a terra la sua racchetta, si sedette su di un tronco d'albero e disse: « Non gioco più ». *A* cercò di convincerlo a continuare. *B* non rispondeva; *A* si sedette vicino a lui: entrambi avevano un'aria infelice.

A questo punto interrompo la narrazione per fare una domanda al lettore: « Che cosa suggerire? Che cosa fareste voi se fosse il ragazzo più anziano? Avete qualche idea feconda da proporre? ».

Se nel raccontare la storia ci si ferma a questo punto, alcuni soggetti dimostrano di riflettere un po'. Fanno considerazioni da cui si vede che stanno esaminando un problema considerevole e arrischiano alcuni suggerimenti su quello che il ragazzo più anziano dovrebbe fare.

Ciò non avviene per la maggior parte dei soggetti. Essi sono insoddisfatti per l'interruzione della storia, aspettano il seguito, si stupiscono per il fatto che non vado avanti, chiedono come sono andate le cose in realtà, che cosa hanno fatto i ragazzi, se essi fossero i miei figli, perché abbia raccontato la storia, perché mi sia fermato qui, se si trattava di un esperimento, se più tardi li voglia sottoporre a un *test* di memoria e così via.⁷

Alcuni si abbandonano al ricordo, riflettono, meditano: « Oh, tali situazioni mi sono molto note. Sapete, mi interessano i bambini: questo mi ricorda le preoccupazioni che ebbe mio zio con i suoi due figli ». Oppure richiamano alla mente un paragrafo di un testo di psicologia infantile.

Alcuni fanno belle sussunzioni in argomenti di carattere generale: « Questo è un caso di... » e classificano il caso, poi si imbar-

⁷ Il caso estremo è, naturalmente, quando non accade niente del tutto. Finito? Finito. Ci raccontate altre storie? Che cosa facciamo adesso?

cano in generalità, più o meno giustificatamente, come, ad esempio, l'inserimento sociale, il comportamento adattato, i ragazzi difficili.

Alcuni vogliono conoscere un maggior numero di fatti, fanno un certo numero di domande, più o meno ragionevoli.⁸ Ad esempio: « Naturalmente il ragazzo più vecchio si era allenato di più? » oppure: « Il minore era di solito più lento nelle sue reazioni? » Vengono fatte poi anche domande di psicoanalisi.

Per la maggior parte questi soggetti non danno alcun suggerimento concreto, produttivo, e si mostrano sorpresi se viene loro chiesto direttamente qualche consiglio. È chiaro che non hanno pensato per niente a questa possibilità, tanto sono occupati a fare richiami, classificazioni o a raccogliere fatti.

Quasi tutti suggeriscono qualcosa se ciò viene chiesto loro direttamente, spesso col tono di « è ovvio ciò che si dovrebbe fare in tale situazione ». Nella maggior parte dei casi le risposte vengono chiaramente date senza tentar di pensare, come mera ripetizione di cose udite o viste già prima, come applicazione di qualche regola di comportamento appresa, spesso ricordata da corsi di psicologia pedagogica. Spesso vengono date in un tono basso di convinzione profonda, spesso con aria di superiorità.

Le proposte presentate sono spesso dei tipici prodotti di teorie diffuse sui bambini, sugli esseri umani in genere, sulla morale; di regole sociali comunemente accettate, di dottrine a cui aderiscono i soggetti. Spesso si possono riconoscere dottrine di varie scuole psicologiche, nelle loro ultime conseguenze.

I tipi comuni di suggerimenti erano di questo genere:

« Promettete al ragazzo più piccolo un pezzo di cioccolata ».

« Date inizio ad un altro gioco, per esempio gli scacchi, in cui il più giovane sia ugualmente bravo o anche migliore. Oppure promettete di fargli giocare, alternandolo al volano, qualche gioco in cui egli sia di gran lunga il migliore ».

« Portatelo alla ragione sgridandolo semplicemente: dovrebbe essere un ometto, non una femminuccia. Non riesce a sopportarlo? Deve imparare a farlo. Usate la vostra autorità superiore per portare il ragazzo più giovane alla ragione ».

Il caso estremo fu un simpatico giovanotto che in questo caso (come sempre, del resto) cominciò subito a fare una domanda dopo l'altra, un mucchio di domande. Non era possibile fermarlo. La curiosità non è sempre, non in tutti i sensi della parola, un segno di pensiero intelligente e di comportamento ragionevole.

« Non preoccupatevi di lui, è una femminuccia. Sarà una lezione per lui »; « *offritegli un handicap* »; « promettete al minore che l'altro non si servirà in pieno della sua forza superiore e della sua abilità ».

Il lettore potrà più tardi paragonare questi suggerimenti con la soluzione dei ragazzi, non semplicemente per vedere se vanno bene (alcune di queste proposte sono appropriate, in quanto dipendono dalle attuali condizioni della situazione reale), ma per quanto riguarda il tipo di pensiero che comportano.⁹

Talvolta, come ho detto, i suggerimenti non vengono fatti in maniera facile, fortuita, attraverso un semplice richiamo alla mente o un'applicazione di qualche nozione, ma dopo un ripensamento serio, con l'idea che il problema tocchi argomenti profondi. In tali casi vi è una sincera meditazione, vengono poste domande produttive. In parecchi casi il processo di pensiero conteneva passaggi simili a quelli che ebbero luogo nei ragazzi.

Ora andrò avanti con la storia, e in più cercherò di descrivere ciò che, io penso, accadeva nelle menti dei ragazzi.

1. « Cosa succede? Perché non continui? » disse il ragazzo più anziano con una voce aspra, arrabbiata. « Perché interrompi la partita? Pensi che sia bello fermarsi in questo modo sciocco? » Egli voleva continuare ed il rifiuto di B rendeva questo impossibile; gli piaceva giocare e vincere; era anche piacevole riuscire ad ingannare abilmente l'avversario con il servizio. B è l'elemento di disturbo, e rende impossibile ad A di fare quello che desidera tanto.

2. Non era però così semplice. Allo stesso tempo A non si sentiva tranquillo, non gli sembrava una cosa simpatica. Dopo un po' di tempo, durante il quale curiose espressioni passavano sulla sua faccia (vorrei che aveste potuto vederlo mentre lanciava occhiate di lato a B, poi voltava gli occhi) disse (ora però in tono alquanto diverso): « Mi dispiace ». Ovviamente un cambiamento radicale aveva avuto luogo: era chiaro che ora ad A dispiaceva che l'altro bam-

⁹ Anche rispetto alla filosofia della vita che implica e le dottrine psicologiche che stanno alla base e spesso saltano fuori nella discussione; ad esempio, il semplice principio del dolore-piacere, la psicologia del premio e del castigo, il sottomettersi all'idea che l'approvazione può venire comperata, il contrattare in forma estrema (« Adesso sii tu il mio schiavo e poi io sarò il tuo »); d'altro canto un richiamo morale che spesso opera in senso produttivo, ma che in certe circostanze può degenerare in un « indorare la pillola ».

Spesso questi suggerimenti vengono dati con una specie di cinismo oppure vengono trattati, con facile superficialità, come una psicologia ovvia, applicata con proprietà.

bino fosse così infelice. Si era reso conto di quello che accadeva a B, sotto quale luce l'altro vedesse la situazione.

Forse era servito uno sguardo triste, sottomesso di B, nel momento in cui questi aveva girato una volta la testa per un breve istante verso A. A si rese conto (non fu un processo veloce, richiese un certo tempo) del motivo per cui vedeva triste il ragazzo più giovane, il quale, senza nessuna speranza di vincere, si sentiva una vittima. Per la prima volta A avvertì che il suo modo di giocare, il suo scaltro servizio, sembravano a B uno scherzo cattivo; capì che B sentiva di non essere trattato con giustizia, che le azioni di A non erano amichevoli verso di lui. E A comprese che B in un certo senso aveva ragione...

Ora vedeva anche se stesso in un'altra luce: servire come aveva fatto lui, senza dare a B la minima possibilità di rinviare, era qualcosa di più, qualcosa di diverso dall'abilità.

3. « Guarda » disse improvvisamente, « giocare a questo modo non ha senso ». Ora si trattava di un nonsenso non solo per B, ma anche per lui, nonsenso per il gioco stesso. A questo modo la difficoltà era diventata più profonda.

Detto con parole da adulti, era come se egli avesse pensato (non lo aveva fatto sicuramente, aveva semplicemente avuto coscienza della via da seguire) « È insensato che due giochino assieme a questo modo: il gioco richiede una certa reciprocità. Una disuguaglianza così evidente non si adatta al gioco: esso acquista un vero valore solo se entrambi nutrono qualche speranza di vittoria. Il gioco muta interamente carattere, diviene una cosa cattiva per un giocatore, per l'altro, per entrambi se manca questa reciprocità; senza di essa non vi è più in realtà un gioco: vi è semplicemente un tiranno che fa correre in tondo la sua vittima ».

4. Poi l'espressione del suo volto mutò: pareva uno che cerchi con difficoltà di afferrare qualcosa, uno in cui sta lentamente sorgendo un'idea, e disse: « Questo è un gioco strano. Non è vero che io non sia tuo amico... ». In lui era sorta un'idea vaga di quello che un adulto chiamerebbe « ambivalenza », che il gioco comporta: da una parte è molto piacevole divertirsi assieme, da buoni amici; dall'altra vi è lo sforzo di sopraffare l'avversario, di batterlo, di fare in modo che gli sia impossibile vincere, il che in certe circostanze può essere sentito, o può in effetti divenire, vera e propria inimicizia.

5. Subito dopo ebbe luogo un passaggio audace, libero e profondamente coerente. Egli borbottò qualcosa come « Deve proprio... »

Desiderava chiaramente affrontare la difficoltà con coraggio, risolverla onestamente e direttamente. Io interpreto questo « Deve proprio? » come « È proprio necessario questo fattore dell'inimicizia, quando rovina tutto ciò che vi è di bello nel gioco? » A questo punto sorse il problema pragmatico: « Come lo posso cambiare? Non è forse possibile avere, non uno contro l'altro, ma... ». La sua faccia si illuminò e disse: « Ho un'idea: adesso giochiamo a questo modo: vediamo quanto a lungo riusciamo a tenere in aria il volano fra di noi e contiamo quante volte lo facciamo andare avanti e indietro senza lasciarlo cadere. Quanto potremmo riuscire a totalizzare? Pensi che potremmo arrivare a dieci o a venti? Cominciamo con servizi facili e poi rendiamoli sempre più difficili... ».

Parlava felice, come qualcuno che avesse scoperto qualcosa. Per lui si trattava di una cosa nuova, e così pure per B.

B acconsentì felice: « È una buona idea. Dai! » E cominciarono a giocare. Il carattere del gioco era mutato completamente: stavano collaborando, lavorando insieme, mettendocela tutta e divertendosi. A non mostrava più la minima tendenza a voler imbrogliare B; a dir la verità le sue mosse diventavano più difficili, ma egli avvertiva ad alta voce: « Una più difficile, riesci a farcela? », in un modo assennato, amichevole.

Parecchi giorni dopo li vidi giocare di nuovo: il modo di giocare di B era grandemente migliorato. Era una vera partita. Per A si era trattato di un'esperienza importante, come si poté osservare nel suo comportamento successivo: aveva scoperto qualcosa, guadagnato qualcosa che andava molto al di là della soluzione di un piccolo problema sorto in una partita di volano.

La soluzione in se stessa può non avere grande importanza finché è vista semplicemente dall'esterno. Non so se esperti di volano o di tennis sarebbero d'accordo nel dire che era appropriata.¹⁰ Ma non ha importanza. Per questo ragazzo la soluzione non era soltanto un problema tecnico: comportava la transizione da un ten-

¹⁰ So di giocatori di scacchi che vengono seriamente disturbati se in una partita certe costellazioni notevoli vengono infrante da qualche sbaglio periferico, sbadato. Odiano questo fatto con eguale intensità, non importa chi dei due abbia commesso lo sbaglio. Alcuni hanno l'abitudine (*horribile dictu* per gli esperti) di correggere errori di tal genere. Perché? A loro piace una bella partita e non hanno alcun interesse a vincere per qualche sbaglio sciocco del loro avversario. Qualche volta collaborano perfino per rendere più perfetta la partita.

In generale penso che ci dovrebbero essere più giochi di questo tipo cooperativo, creativo, al posto di quelli semplicemente competitivi.

tativo superficiale di liberarsi di una difficoltà, all'affrontare il fondamentale problema di struttura risolvendolo in modo produttivo.¹¹

Quali furono i passaggi che portarono a questa soluzione? Naturalmente quando si interpreta un caso singolo, la base di fatti, la base per le conclusioni è limitata. Tuttavia cerchiamo di formulare alcuni punti essenziali.

Inizialmente A vide l'intera situazione, ed in seno ad essa B, la partita, la difficoltà, accentrati sul suo ego (fig. 105). Erano determinati da questo centro nel loro significato, ruolo, posizione, funzione, sia per quanto riguarda il pensiero, sia per quanto riguarda l'azione. Se questo fosse un caso estremo, B non sarebbe null'altro che qualcuno di cui A ha bisogno per vincere; di conseguenza, rifiutandosi di giocare, B sarebbe il « disturbatore ». La partita sarebbe « la cosa in cui sfoggio le mie capacità, in cui vinco ». B rappresenta una barriera posta sul cammino delle esigenze, dei vettori, degli atti egocentrici di A.

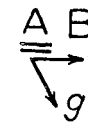


FIG. 105

A non si fermò a questa visione unilaterale, superficiale. Cominciò a rendersi conto di come la situazione apparisse a B, con B al centro (fig. 106). In questa struttura con centro diverso ora si vide come una parte, come un giocatore che si comportava in un modo non del tutto bello verso l'altro giocatore.

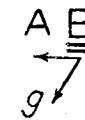


FIG. 106

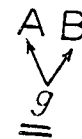


FIG. 107

¹¹ Questa non sarebbe stata affatto una proposta ragionevole in tutte le circostanze. Se A fosse stato un tipo crudele, che cerca soltanto il suo vantaggio personale, tutto teso a vincere, senza curarsi di quello che ciò poteva rappresentare per l'altro ragazzo, orgoglioso perfino del dolore che gli infliggeva, e se allora B avesse proposto ciò, sarebbe stato un comportamento del tutto senza senso. In effetti ci sarebbe stato bisogno del contrario: smetterla del tutto oppure andarsene da un'altra parte per una lotta effettiva.

Un po' più tardi il *gioco* stesso, le sue qualità d'insieme ed i suoi requisiti divennero il centro (fig. 107). Ora né lui né l'altro rappresentavano il centro, ma entrambi erano visti rispetto al gioco.

Logicamente *A* (come *A* vede se stesso) differisce nelle tre situazioni (fig. 108);¹² e così avviene per gli altri elementi, e per le esigenze dinamiche, i vettori, la situazione attuale. La partita viene ora vista chiaramente come una deviazione dalla « buona partita ».

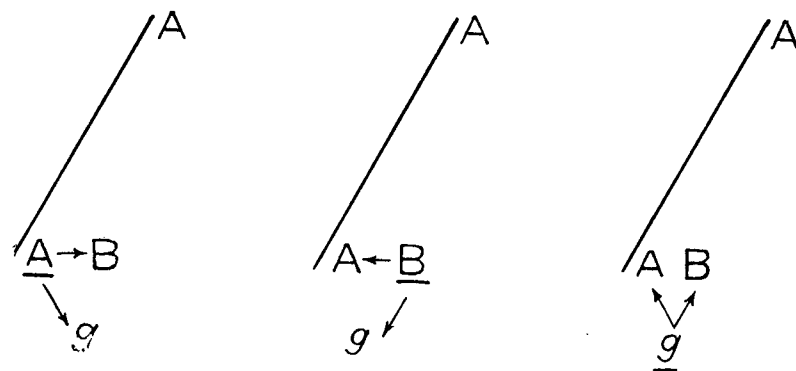


FIG. 108

Ma cos'è che nella struttura del gioco stesso, si trova alla radice della difficoltà? Nella buona partita vi è un delicato equilibrio funzionale: da un lato, divertirsi assieme, comportarsi da amici; dall'altro « cercare di battere l'avversario ». Atteggiamenti più profondi che non semplici regole esterne di gioco leale rendono possibile questo delicato equilibrio, stabiliscono le differenze tra una buona partita, una lotta crudele oppure una competizione spietata; in breve fanno sì che un gioco sia tale. L'equilibrio è psicologicamente delicato e può scomparire, come avvenne in questa situazione.

Il « contro », il « cercare di battere l'avversario », che nel buon gioco funzionano con proprietà, avevano assunto una fisionomia sgradevole che non si adattava più alla situazione del gioco. Questo fece sorgere il vettore: « Che cosa si può fare al riguardo? E subito? » Qui sta il problema. « Non è possibile arrivare al nocciolo della situazione? » Questo porta a considerare la struttura II.

¹² Cfr. WERTHEIMER, M., « On truth », *Social Research*, 1934, vol. 1, pagg. 135-146.

Struttura Ia $\longrightarrow \longleftarrow$ o, piuttosto, nel caso di questi ragazzi,

Struttura Ib $\longrightarrow \longleftarrow$ si trasforma in:

Struttura II ∇ , dalla competizione alla collaborazione;

da « io contro te » a « noi ». *A* e *B*, come parti, in questo caso non sono più come nella struttura I, avversari, ciascuno solo dalla sua parte, ma due esseri umani che collaborano per raggiungere una meta comune.

Tutti gli elementi cambiano significato in maniera considerevole. Ad esempio il servizio non significa più che *B* deve venir sopraffatto, rendendo impossibile il rilancio del volano. Nel primo stato di cose (I), un giocatore è contento se lui segna e l'altro sbaglia; ma ora (II) tutti e due possono provare piacere insieme per ogni buona serie di colpi.

I passaggi che seguono poi dimostrano la transizione che conduce ad affrontare la situazione del problema per quello che è, piuttosto che dal punto di vista di una parte o dell'altra, oppure della semplice somma di entrambe. La soluzione sorge dalla comprensione della difficoltà strutturale; la difficoltà allora assume un significato più profondo. La tensione non è superata in modo superficiale; anzi, la nuova direzione dei vettori consegue dai requisiti strutturali di base che richiedono una nuova « buona situazione ». Voi potete pensare che io legga troppe cose nella mente del ragazzo. Non credo. Potreste essere voi ad avere un'idea troppo povera di ciò che può accadere nella mente dei ragazzi.

In breve, notiamo in modo specifico:

1) operazioni di cambiamento di centro: transizione da una visione unilaterale ad una con il centro richiesto dalla struttura oggettiva della situazione;

2) cambiamento di significato delle parti (e dei vettori) in accordo con la loro posizione, ruolo e funzione nella struttura;

3) visione della situazione in termini di « buona struttura », di modo che ogni cosa si adatti alle esigenze della struttura;

4) tendenza ad andare ai caratteri fondamentali, ad affrontare onestamente il problema e a trarne le conseguenze.

Voglio osservare che il carattere di dirittura, di onestà, di sincerità in tale processo non sembra rivestire un'importanza perife-

rica. Parlando in generale, è una concezione artificiale e limitata quella che considera il pensiero soltanto un'operazione intellettuale, e lo separa completamente da questioni di atteggiamento, sensibilità ed emotività umane « perché tali argomenti appartengono ad altri capitoli della psicologia ». Questo è chiaro specialmente in un esempio, nel passaggio da una visione cieca ed egocentrica con i suoi ingredienti emotivi, alle fasi successive. Ma anche quei processi che sembrano puramente intellettuali comportano un atteggiamento umano: quella specie di propensione ad affrontare i problemi, a trattarli con franchezza, onestà e sincerità. Sebbene abbia accennato a questo fatto soltanto brevemente negli altri capitoli, esso può assumere un valore essenziale in molti casi di pensiero produttivo, compresi perfino i nostri problemi di geometria elementare.

Naturalmente può accadere che certe soluzioni vengano trovate quando il soggetto assume proprio l'atteggiamento opposto, quando cerca di controllare la situazione per mezzo di un trucco, o di farle violenza. Ma anche qui sembra che tali fattori non accompagnino semplicemente le « operazioni intellettuali », ma piuttosto la natura stessa delle operazioni; la loro genesi ed il loro sviluppo sembrano profondamente connessi con l'atteggiamento umano effettivo verso il problema e la sua soluzione. E la slealtà, lo spirito di prepotenza non sono l'atteggiamento più consigliabile nel pensiero produttivo, anche se talvolta possono portare ad un successo pratico, e così acquistare una certa rapidità ed efficienza, di breve portata.

Connesso a queste cose vi è un altro fatto, d'importanza fondamentale per una vera comprensione del pensiero produttivo, sia nel campo teoretico che in quello pratico. Si tratta della transizione da un primo stadio in cui il soggetto vuole semplicemente raggiungere un certo scopo (stadio in cui il pensiero è interamente centrato su questo scopo) ad un altro stadio in cui i vettori, le operazioni, le azioni fanno centro nelle esigenze fondamentali della situazione. In un certo senso il soggetto può divenire virtualmente cieco se mira solo a quel fine ed è guidato interamente dall'impulso a raggiungerlo. Spesso deve prima dimenticare quello che egli desidera in quel momento prima di divenire sensibile a ciò che la situazione stessa richiede. E così, nei casi migliori, il suo atteggiamento sarà molto più simile a quello di un medico o di un saggio consigliere che a quello di un conquistatore o di un aggressore astuto e prepotente.

Questa transizione è uno dei grandi momenti in molti processi di pensiero genuini. Il ruolo degli interessi meramente soggettivi dell'individuo viene, secondo me, stimato eccessivamente nelle azioni umane. Quando si pensa veramente, ci si dimentica di se stessi nel pensare; i vettori principali nel pensiero genuino spesso non si riferiscono all'io con i suoi interessi personali, ma piuttosto rappresentano le esigenze strutturali della situazione data.¹³ Oppure quando tali vettori si riferiscono davvero ad un io, non si tratta semplicemente dell'io come centro dello sforzo soggettivo.

Naturalmente la transizione può anche avvenire nella deviazione delle esigenze più profonde dell'io stesso. Talvolta vi è una felice coincidenza tra le esigenze della situazione che presenta il problema e i bisogni veri, più autentici dell'io, come nel caso del nostro ragazzo.

Questa era soltanto una storiella senza pretese; tuttavia alcune delle sue caratteristiche come, ad esempio, il progresso essenziale che avvenne per mezzo di un cambiamento di centro, sono, penso, peculiari di realizzazioni¹⁴ profondamente importanti negli esseri umani, nell'umana società. Si possono talvolta osservare cambiamenti meravigliosi negli individui, come quando una persona fortemente prevenuta diventa membro di una giuria, oppure arbitro, oppure giudice, le sue azioni dimostrano un chiaro passaggio dal pregiudizio ad uno sforzo onesto di trattare i problemi in discussione in modo giusto e obiettivo. Questo caso riguarda lo stesso sviluppo dell'idea e dell'istituzione delle corti di giustizia.

Cogliere il centro, il modo in cui uno concepisce le parti, gli elementi di una situazione, il loro significato e ruolo in quanto determinati rispetto ad un centro, ad un cuore, a una radice, è un fattore di grandissima importanza nel pensiero. I problemi di centramento sono stati trascurati nella logica e nella psicologia tradizionali. Forze potenti lavorano per centrare, per scoprire (o cercar di scoprire) il centro vero in accordo con la natura della situazione; ma esse sono egualmente forti in casi di centramento cieco, imposto e volontario che sia, usato in modo così efficiente in alcuni tipi di propaganda politica. Sebbene vi siano forze poderose che lavorano contro un centramento vero, tuttavia vi è negli esseri umani un chiaro desiderio di non essere strutturalmente ciechi, un desiderio

¹³ LEVY, E., « Some aspects of the schizophrenic formal disturbance of thought », *Psychiatry*, 1943, vol. 6, pagg. 55-60.

¹⁴ WERTHEIMER, M., « A story of three days ». Si trova in ANSHEN, R. N. (Ed.), *Freedom, its meaning* (New York, Harcourt, Brace, 1940) pagg. 555-569.

di trovare un centro appropriato, di rendere giustizia alla situazione, di mettere a fuoco l'oggetto in accordo con la sua natura e con le esigenze oggettive della sua struttura.

Per quanto riguarda questo concetto, sembra venir riconosciuto tacitamente che un centramento *adeguato*, con le sue conseguenze per l'oggettività e la giustizia, è d'importanza estrema. Altrimenti perché un discentramento reale dovrebbe venir presentato tanto più energicamente come un centramento vero e giusto, quanto meno lo è in realtà?

II

Davvero moltissime cose entrano nel processo di ricentramento nel modo in cui si presentò nell'esempio del volano. Alcuni punti basilari si chiariranno se ora prendiamo in considerazione una storia più semplice.

Ero in visita presso una famiglia; la figlia tornò a casa e mi venne presentata. Suo padre le chiese come aveva trascorsa la giornata, e lei rispose che aveva avuto molto lavoro, ma che stava bene. Le chiesi: « Lei lavora? » « Sì », rispose, « Lavoro in una ditta ». « È grande? » « Be' » disse « vi sono un certo numero di persone nell'ufficio. Ho a che fare direttamente con un signor A, con un signor B e con un signor C, che spesso vengono alla mia scrivania, mi fanno domande, mi portano lettere, ecc. Vi sono altre persone nell'ufficio con cui non ho rapporti diretti. Il signor A tratta con un signor D, il signor B con un signor E, e il signor C con un signor F. D ed E a loro volta hanno rapporti fra loro, e così E ed F. Vediamo: vi sono dunque nell'ufficio, oltre a me, sei persone ».

Io chiesi: « È lei la capo-ufficio? » « Oh, no » rispose. « Dà ordini a qualcuno? » « Oh, sì. Qualche volta do ordini al signor A e al signor C. Io li ricevo dal signor B; il signor D dal signor E, il signor E dal signor B, e il signor F dal signor E ». (Evidentemente era dotata di una mente logica e si sforzava di raccontare tutta la storia).

Ero un po' perplesso (penso che lo sia anche il lettore) e dissi: « Sono ancora all'oscuro riguardo alle persone del suo ufficio ». « Oh, ma io le ho detto tutto », rispose. Ciò nonostante non riuscivo a vederci chiaro. Improvvisamente dissi (si trattava di una supposizione): « Allora il signor B è il suo principale, e lei si trova direttamente alle sue dipendenze, e lo stesso vale per il signor E? » « Sì », rispose.

Nel modo in cui lei vedeva il suo ufficio, aveva esposto correttamente e completamente le relazioni, eppure non aveva reso chiaro il quadro reale. Quasi tutti, se a loro venisse posta una domanda del genere, comincerebbero con una affermazione come questa: « Io lavoro direttamente alle dipendenze del principale B, e lo stesso fa il signor E ». Poi potrebbero aggiungere: « Io e il signor E abbiamo due persone che lavorano sotto di noi ed a cui diamo ordini », e proseguire: « Due di questi qualche volta hanno rapporti tra loro ». Questa sarebbe stata una descrizione sensata ed avrebbe dato un quadro chiaro della struttura dell'ufficio. Ma la ragazza aveva enumerato gli uomini e le relazioni in una successione sconcertante, in effetti in un modo che era cieco alla struttura della situazione; aveva accentrato ogni cosa attorno al suo ego, ad eccezione dell'ultima affermazione strabiliante nella seconda descrizione, che non si riferiva a lei.

Questo è un esempio innocente di un atteggiamento abbastanza sciocco nella vita comune e nel pensiero, che spesso ha conseguenze considerevoli per la formazione del punto di vista e delle azioni di qualcuno.

Naturalmente potrebbe essersi trattato di una goffaggine nel modo di descrivere, ma dalle osservazioni e dal comportamento successivo della ragazza divenne chiaro che ciò era caratteristico dei suoi atteggiamenti reali. Qualche tempo dopo, quando incontrai uno dei suoi colleghi di ufficio, gli chiesi come se la cavava quella ragazza: « Benissimo », disse, « è una brava ragazza. Ma non siamo sicuri che il suo impiego duri a lungo. Ha uno strano modo di comportarsi con gli altri e anche nei confronti del lavoro. Sembra mettere ogni cosa in relazione con se stessa, come se lei fosse sempre il centro della situazione, perfino in questioni di affari quando nessuno pensa a lei come persona. Questo non va bene nel campo degli affari ».

Quando l'accentramento individuale è estremo, diviene un ben noto sintomo di uno stato psicopatologico che porta spesso ad una situazione precaria sia nelle questioni sociali che in quelle personali.¹⁵ L'accentramento individuale non è per nulla, come vorrebbero farci

¹⁵ Cfr. WERTHEIMER, M., « Über Gestalttheorie » (Erlangen, Philosophische Akademie, 1925). (Nota dell'editore: questo articolo è stato tradotto in inglese con il titolo « Gestalt Theory », *Social Research*, 1944, vol. 11, pagg. 78-99); anche ELLIS, W. D., *op. cit.*, selezione 1; LEVY, E., *op. cit.*, pagg. 59-69; SCHULTE, H., « Versuch einer Theorie der paranoischen Eigenbeziehung und Wahnbildung », *Psychologische Forschung*, 1924, vol. 5, pagg. 1-23.

credere alcune concezioni autorevoli del nostro tempo, l'atteggiamento generale, naturale.

Osserviamo più attentamente quello che fece questa ragazza realizzando la sua descrizione. In uno schema potrebbe venir rappresentato nel modo seguente.

Prima descrizione

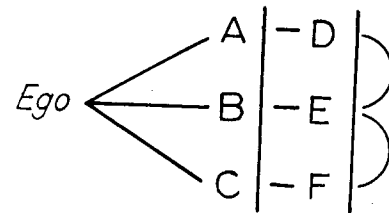


FIG. 109

Questo schema è affatto simile al modo in cui un cultore di logica matematica scriverebbe una lista di relazioni in una rete relazionale. Egli esporrebbe le relazioni $Ego \ r \ X$, e così via, nel modo seguente:

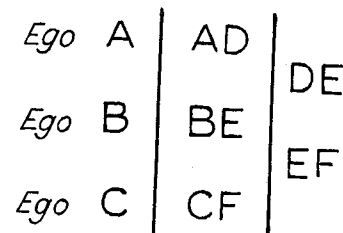


FIG. 110

Se si chiede ad una persona di tracciare un diagramma che si adatti alla descrizione della ragazza, di solito viene dato un quadro come questo:

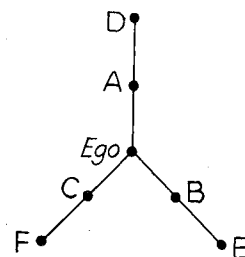


FIG. 111

che mostra chiaramente l'Ego al centro. Generalmente questa caratteristica non cambia quando vengono aggiunte le linee da D ad E e da E a F , sebbene alcuni chiederanno: « Non vi è anche una linea di unione da F a D ? »

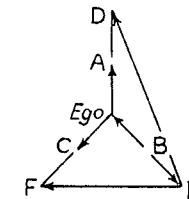


FIG. 112

Seconda descrizione

In questa descrizione la ragazza qualificò le relazioni dando loro delle direzioni. Ma la lista costituisce ora un autentico garbuglio di tali direzioni:

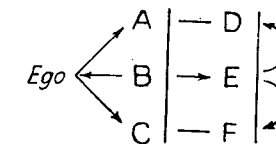


FIG. 113A

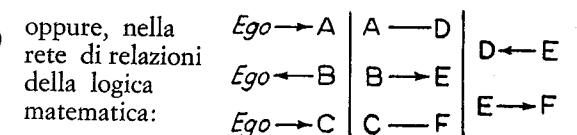


FIG. 113B

Se noi rappresentiamo ciò sotto forma di diagramma otteniamo:

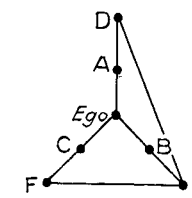
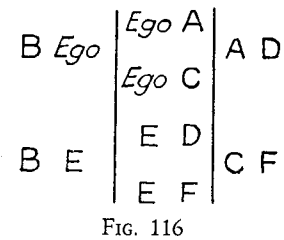
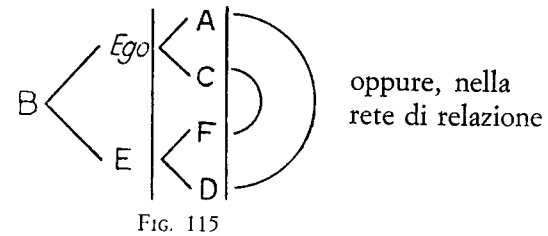


FIG. 114

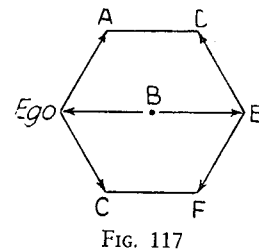
A questo punto di solito accade qualcosa a coloro che guardano il diagramma: esso comincia a sembrare « disegnato sbagliato », « distorto ». Può allora venir mutato in una forma che spiegheremo fra poco.

Terza descrizione

Tanto lo schema che il diagramma della descrizione adeguata hanno un aspetto fondamentale diverso:



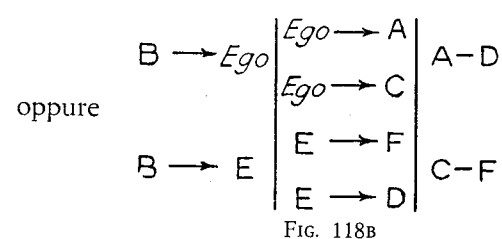
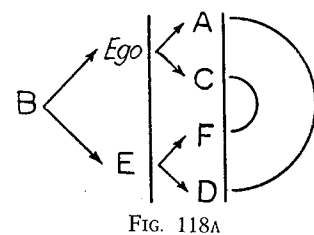
Come diagramma si ottiene qui:



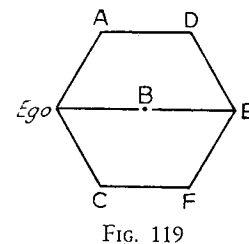
il che offre un quadro totalmente diverso, con un chiaro centramento intorno a B.

Quarta descrizione

Con le qualificazioni per quanto riguarda la direzione, lo schema diventa



e il diagramma:



Ora tutto è chiaro per quanto riguarda la struttura; non vi è confusione, come nelle descrizioni, negli schemi, nei diagrammi precedenti. La ragazza aveva in effetti esposto tutte le relazioni implicate, ma in un aggregato incomprensibile discentrato. La prima e la seconda descrizione e le figure corrispondenti vanno contro la struttura oggettiva della situazione: sono chiuse ad essa, la violano, pongono un centro sbagliato. Non c'è nulla da dire contro il fatto di cominciare la descrizione con l'Ego; ma in una descrizione ragionevole non lo si farebbe centro di tutto ciò che segue. Al contrario si vedrebbe l'Ego nella sua posizione (secondaria) nella struttura e così lo si descriverebbe.

Se il lettore confronta il primo e il secondo diagramma con il terzo e il quarto, vedrà cosa intendo quando affermo che nel primo e nel secondo la successione, il raggruppamento, il centramento, vengono fatti in un modo che risulta cieco ad un quadro strutturalmente adeguato. Ma osserviamo più attentamente: se vogliamo caratterizzare la posizione, il ruolo e la funzione delle varie parti del quadro, possiamo, in una prima approssimazione, procedere nel modo in cui i logici caratterizzano gli elementi e le linee di relazione in una rete relazionale. La definizione implicita dei punti attraverso le loro posizioni relazionali nella rete, in termini di numero di relazioni (r) ai punti immediatamente adiacenti (P_1), a punti secondari (P_2), ecc., nel nostro esempio dà il seguente schema:

	B		Ego, E		A, D, C, F	
	r .	P_1	r .	P_1	r .	P_1
I	2	2	3	3	2	2
II	4	4	3	3	3	3
III	2	—	2	—	1	—

In ciascuna di queste tre classi gli individui sono « omotipi ».

Fig. 120

Nella terza descrizione, ed al livello I, abbiamo:

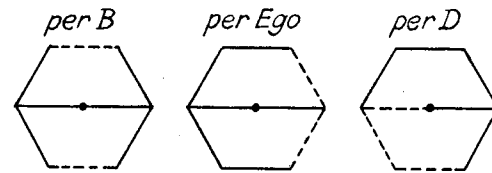


FIG. 121

mentre la prima descrizione dà:

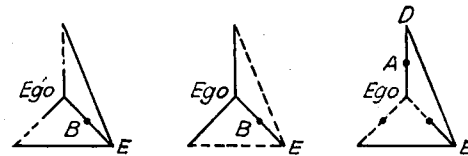


FIG. 122

Se caratterizziamo gli individui delle tre classi con le lettere α β γ otteniamo:

nella prima descrizione:

1	2	3
β	γ	γ
	α	β
	γ	γ

FIG. 123

e nella terza:

1	2	3
α	β	γ
	β	γ
	β	γ

FIG. 124

Per quanto riguarda le relazioni otteniamo:

nella prima descrizione:

1	2	3
$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\beta$
$\beta\alpha$	$\alpha\beta$	
$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\beta$

FIG. 125

e nella terza:

1	2	3
$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$
	$\beta\gamma$	
$\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$

FIG. 126

Il risultato è simile se teniamo conto del carattere di direzione assegnato alle relazioni nella seconda e nella quarta descrizione.

Troviamo che in questo esempio vi sono tre tipi di persone: li possiamo chiamare principale, segretari, impiegati. Essendo accentrati attorno all'Ego, nei raggruppamenti della prima e della seconda descrizione sono considerevolmente confusi insieme. Negli schemi corrispondenti troviamo, come membri di un unico gruppo, due impiegati ed un principale, e come membri di un altro gruppo, due impiegati ed un segretario; una segretaria, la ragazza, è un elemento singolo dal lato sinistro, mentre l'altro segretario è membro di un terzetto dalla parte destra. Con le relazioni avviene lo stesso: dalla parte sinistra dello schema relazionale (pagg. 198-199) abbiamo due relazioni tra la segretaria e gli impiegati, ed una tra la segretaria e il principale; più in là a destra due relazioni tra impiegati e una tra principale e segretario; all'estrema destra due relazioni tra segretario e impiegati.

Al contrario tutto è in un ordine chiaro, controllabile, impeccabile, quando passiamo alla terza e quarta descrizione e agli schemi corrispondenti (pag. 200). Il punto di partenza è il capo-ufficio, poi vengono i due segretari, e finalmente i quattro impiegati. Le prime due relazioni sono quelle tra principale e segretari, poi vengono quelle tra segretari e impiegati, e in fondo le relazioni tra impiegati.

Riassumendo: la prima e la seconda descrizione, viste nelle loro parti, sono in un certo senso esatte e complete in tutti i particolari, ma introducono un centro inadeguato, un raggruppamento che è chiuso e viola la gerarchia logica della situazione. Queste descrizioni mettono insieme cose che sono di natura diversa e fanno apparire diverse per struttura cose che non lo sono. La descrizione, presa dal punto di vista soggettivo della ragazza, cioè senza tener conto della sua posizione secondaria, distorce la struttura, non riesce a dare il giusto peso al significato strutturale delle parti.

Quello che abbiamo appena detto sulla differenza tra una descrizione con un centro sbagliato, ed una descrizione strutturalmente appropriata, vale anche se la situazione è caratterizzata in termini di definizioni implicite, numeri di relazione e così via. (Nonostante ciò, la questione della chiarezza delle classi espressa in tali termini, non è il vero cuore del problema. Il lettore si renderà ben conto del fatto che dobbiamo usare qualche precauzione nell'usare questo metodo logistico).

Supponete che dovesse essere compreso nel quadro anche il proprietario dell'impresa. La rete di relazione sarebbe:

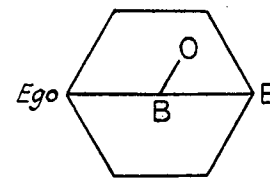


FIG. 127

In termini di numeri di relazione, *B* potrebbe quindi apparire con tutta facilità come l'omotipo di *Ego* e di *E*, poiché tutti tre hanno la stessa caratterizzazione implicita.

	B	Ego, E
	r P	r P
I	3, 3	3, 3
II	4, 4	4, 4
III	2, -	2, -

FIG. 128

Questi numeri non dicono tutto. Ad esempio, al II vi è una differenza nel significato che il numero 4 assume nei vari casi: per *B* significa 2+2, per *Ego* ed *E*, 1+2+1.

In casi come questo, è decisivo il modo in cui sono distribuite le direzioni delle relazioni. E nel caso che vi fossero un principale, due segretari e un impiegato?

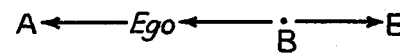


FIG. 129

Senza tener conto del verso delle relazioni, *Ego* e *B* sarebbero dei veri omotipi:

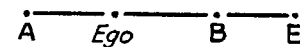


FIG. 130

Qui vediamo il punto decisivo: le frecce partono da *B*, vanno a sinistra, oltrepassano *Ego* e hanno fine in *A*. *B* è la sorgente delle frecce, il centro in questo senso; *Ego* non lo è. Bisogna considerare l'*Ego* nella sua posizione in seno al modello con le frecce. Non è sufficiente nessuna caratterizzazione fatta in termini del numero di relazioni non specificate con i punti immediatamente vicini (P_1), con i punti secondari (P_{11}) e con tutti i punti, in termini di numeri, di relazioni, ecc.

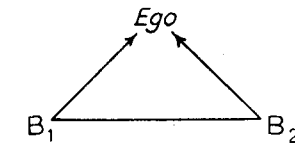


FIG. 131

L'« essere al centro » non basa la sua importanza sul fatto che ciò che è a se stante è di rilievo; è più importante il fatto che il centro è la sorgente delle frecce, che rappresenta il cuore del problema. Potrebbero esserci, ad esempio, due principali, alcuni soci, ed una segretaria; e tuttavia la segretaria, *Ego*, dal punto di vista strutturale degli affari, non sarebbe il centro. (Lo potrebbe essere, naturalmente, in certe condizioni, come, ad esempio, se il comportamento di entrambi i capi-ufficio fosse determinato dal desiderio di sposarla).

Il centramento, allora, non è semplicemente una questione di distribuzione di numeri di relazioni; è una questione in cui è interessata la struttura interna di tutto il quadro, che emerge solo se viene data la direzione delle relazioni all'interno del modello nel suo insieme, e in questo modo il significato funzionale di ciascun termine.

Come reagisce la gente di fronte a descrizioni inadeguate? La prima descrizione della ragazza dava l'impressione che lei fosse il centro. « È lei il principale? » avevo chiesto. Questa domanda supponeva che le frecce seguissero la sua descrizione.

La seconda descrizione era dapprima sconcertante, in quanto la distribuzione delle frecce non concordava con la struttura che avevo immaginato (pag. 200). Secondo la distribuzione delle frecce l'*Ego* non appare più come centro imperturbato. Allo stesso tempo *B* di viene preminente come origine dei vettori.

Se un soggetto osserva il diagramma, spesso ha luogo un processo di questo genere: « Sembra strano. Com'è complicato nel cen-

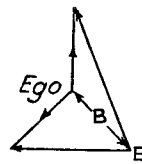


FIG. 132

tro (*Ego*), con quelle frecce! Che posizioni strane hanno le linee, senza frecce! » Poi qualche soggetto improvvisamente pone il centro in *B* dicendo: « L'immagine è distorta. Rispetto alla linea che passa per *B*, il diagramma ha l'aspetto di due ali che abbiano bisogno di essere messe a posto in qualche modo... » e viene disegnato un nuovo diagramma. Altri dapprima scoprono che « la strana e

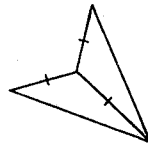


FIG. 133

complicata costellazione di frecce in *Ego*: "due in fuori, una in dentro", si ripete strutturalmente in *E* », e a questo punto arrivano a concepire il nostro ultimo diagramma.

Il diagramma precedente appare senz'altro come qualcosa di strano, qualcosa che non è in ordine, qualcosa che deve essere migliorato. Poi segue un forte processo dinamico che muta quel diagramma nella concezione strutturalmente chiara dell'ultimo diagramma.

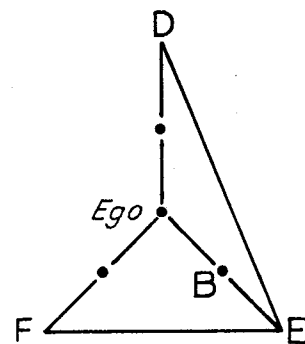


FIG. 134

Alcuni soggetti, in numero minore, già mostrano reazioni simili quando vengono posti di fronte al diagramma della prima descrizione, e quando ricevono una risposta negativa alla loro domanda circa l'esistenza di una linea *FD*. Ricordando che la lunghezza delle linee nelle reti di relazione è indeterminata, qualche volta raggiungono la visione delle « due ali », per cui riorganizzano il quadro come nella fig. 133.

In esperimenti senza i diagrammi, in cui vengono usate soltanto la seconda descrizione della ragazza o la lista simbolica delle relazioni con il loro verso, le reazioni non sono così forti e chiare, ma tuttavia qualche volta risultano positive. Cercando la persona che dà ordini e non ne riceve, il soggetto si fissa su *B*, e in questo modo riconosce la posizione intermedia della ragazza.

Spesso anche in questi casi il passaggio ha l'aspetto di un processo di ristrutturazione, sebbene questo non appaia chiaramente come nel caso dei diagrammi: dapprima *Ego* viene concepito come centro, con la maggior parte degli altri elementi posti in un'ombra periferica; poi viene messo a fuoco *B*, ed *Ego* acquista la sua posizione secondaria, mentre gli altri elementi non occupano ancora posizioni molto chiare nella struttura.

Specialmente nei casi citati per ultimi, « l'idea nuova » ha l'apparenza di una « supposizione », a causa della mancanza di chiarezza iniziale, dovuta in gran parte all'eccesso di particolari. Le ragioni della supposizione non sono esplicite, ma hanno semplicemente la forma di una direzione di centrimento. Anche negli esperimenti con i diagrammi vi è dapprima uno stato di cose non chiaro, poi emerge « qualche vaga idea » che comporta direzioni di ricentrimento, finché improvvisamente il quadro cristallizza nella nuova struttura completa.

Trovare la somma degli angoli di un poligono

1. Durante un pranzo, mentre parlavamo di ornamenti, la discussione si spostò sulle figure geometriche chiuse, come i triangoli, i rettangoli, gli esagoni ed altri poligoni. Ad un certo punto un

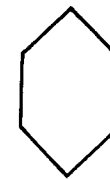


FIG. 135

amico artista osservò: « La somma degli angoli di tutte queste figure deve essere la stessa in ciascun caso ». Tutti risero. Io mi trovai in una situazione sorprendente; dissi: « È chiaro che la somma degli angoli *non* è la stessa: per il triangolo è 180° , per il rettangolo 360° , per l'esagono 720° . Ho l'impressione però che l'affermazione deve essere in qualche modo giusta: sento che tocca un punto essenziale ». Questa sensazione rimase acuta in me. Da un lato era chiaro che la somma degli angoli non era uguale nei vari poligoni; dall'altro avevo la sensazione che non potevo lasciar stare la questione: doveva venire chiarita, ci doveva essere un modo di vedere fino in fondo. Essa conteneva un punto interessante, ma non sapevo come arrivarci. Non riuscivo ad afferrare e nemmeno a esprimere il punto esatto in cui era situato il problema. Rimaneva però la tensione: « Una soluzione ci deve essere. Ma dove è la difficoltà? »

Per gli altri che prendevano parte alla conversazione, non vi era alcun problema: la questione si era chiusa quando avevano visto che l'asserzione era ovviamente falsa.

Nelle ore che seguirono, durante le quali avevo altre cose da fare, il problema continuò ad essere attivo dentro di me. Dopo parecchie ore si era sviluppato fino a questo punto: « Vi è, da un lato, la somma degli angoli (*A*) di una figura; dall'altro, il fatto che la figura sia chiusa e in sé completa (*B*). Tra *A* e *B* vi è soltanto una "e", una semplice congiunzione. Qui c'è la prima condizione e qui la seconda.

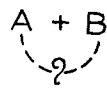


FIG. 136

Questa relazione di congiunzione tra di esse non è del tutto chiara. Che cosa c'è realmente dietro tutto questo? Qual è la difficoltà? Le due condizioni devono avere qualcosa a che fare l'una con l'altra». Non era la sensazione di avere di fronte due proposizioni contraddittorie. Ero nella direzione del problema positivo: « Che cosa potrei fare per comprenderlo? »

2. Il giorno dopo, mentre ero impegnato in un lavoro d'altro genere, mi venne improvvisamente questa idea, vaga, indefinita ed

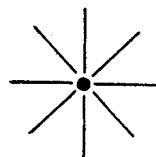


FIG. 137

incerta, qualcosa di questo genere: « Ecco un *punto*. Intorno ad un *punto* vi è uno "spazio angolare" di 360° (un angolo giro). Non ci deve essere qualcosa del genere nel caso della figura chiusa? » Ma al



FIG. 138

momento questa nozione assai confusa non poté essere chiarita ulteriormente.

Passarono tre giorni. Qualsiasi cosa io facessi, era sempre pre-

sente in me questa stessa forte sensazione, la sensazione di qualcosa di incompiuto, di essere in direzione di qualcosa che non potevo afferrare. Sentii più di una volta che potevo quasi dire dove giaceva la difficoltà, da cosa dipendeva, in che direzione si sarebbe sviluppata la soluzione; ma tutto era in uno stato colloidale, indefinito, di modo che non potevo formularlo concretamente. Molte volte sembrava così chiaro che mi dicevo: « Mi basta scriverlo », ma quando tentavo di farlo non riuscivo, le idee non si potevano realmente formulare.

(Ho trovato una linea di sviluppo analoga in molti risultati intellettuali veramente importanti: questa stessa sensazione di tensione in una determinata direzione, mentre la situazione effettiva è confusa, colloidale. In qualche modo, la forma che prenderà la soluzione è, nei suoi tratti essenziali, sulla punta della lingua, ma non può venir afferrata concretamente. Si tratta di una condizione che può durare spesso per mesi, con molti giorni di depressione durante i quali si registra uno scarso successo, e tuttavia non è possibile lasciar cadere il problema).

3. Dopo due giorni, di nuovo sorse la seguente questione: « Se ho un punto, attorno ad esso vi è un angolo giro. Se io ho una *linea retta*, anche attorno ad essa vi è uno spazio angolare. Ora, se ho que-

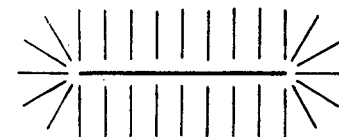


FIG. 139

sta linea retta (fig. 139), *come devo procedere per ottenere una figura chiusa?* Continuando semplicemente la linea retta? No certo. Devo spezzare la linea in qualche punto, se voglio formare una figura

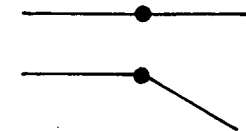


FIG. 140

chiusa ». Questo portò in breve all'idea: « Voglio dare prima di tutto un'occhiata alla somma degli angoli esterni ». E che cosa accade? Nello spezzare la linea, l'angolo piatto si divide in due « angoli laterali », entrambi angoli retti e fra loro sorse un delta (δ), un « an-

golo di rotazione ». Sono i δ , la rotazione, che costituiscono l'elemento importante. E nella figura intera, nel momento in cui si chiude, la somma dei δ deve essere... una rivoluzione completa, un angolo di 360° , non importa quale sia il numero degli angoli laterali che la figura possiede!

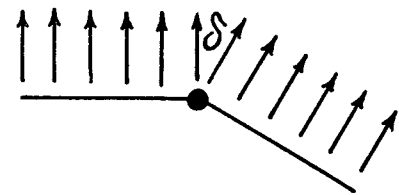


Fig. 141

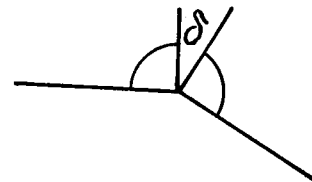


Fig. 142

Ogni lato ha due angoli retti esterni, uno a ciascuna estremità. Ci possono essere tanti lati, e di conseguenza tanti angoli di questo tipo, quanti si desiderano; ma in ogni figura i δ , gli angoli di rotazione, devono compiere una rivoluzione completa. Questa era una « intuizione ». A questo punto ero molto felice. Avevo questa sensazione: « Ora vedo chiaro il problema ».

Che cos'era accaduto in realtà? Ero partito dalla nozione consueta degli angoli e del completamento o chiusura. Nel tentativo di vedere come avviene la chiusura, l'angolo esterno totale di un dato angolo si era trasformato in due angoli retti più δ ; i due angoli retti erano di importanza periferica rispetto al problema; il δ , insieme con gli altri δ , compiva una rotazione completa. Con questa concezione degli angoli si era stabilito immediatamente un legame fra i δ , gli angoli significativi e la chiusura della figura. La relazione di congiunzione tra A (la somma degli angoli) e B (la chiusura completa) si era tramutata in un tutt'uno coerente, comprensivo, lucido. A e B non erano semplicemente pezzi posti l'uno accanto all'altro; erano ora parti di un'intima unità organica. Per chiudere la figura era necessario che i δ compissero un angolo completo di 360° . Questo processo di integrazione servì da soluzione: ciò che era stato una somma oscura e insoddisfacente ora assumeva una forma ben definita.

L'idea che la somma dei δ è di 360° venne alla luce non come un postulato, come un'asserzione di carattere generale, o un'opinione, ma come una « intuizione »: cogliere, in una visione strutturata della figura, la relazione interna tra la chiusura e l'insieme dei δ .

Tutto questo cristallizzò rapidamente nel seguente procedimento:

1) Ci fu la comprensione di quello che accade, di quello che deve accadere ragionevolmente, se faccio il giro della figura passo per passo partendo dal primo lato di un primo δ : per chiudere la figura devo raggiungere nuovamente la linea di partenza, fare un giro completo. Questo era stato capito dapprima in un unico colpo d'occhio;¹

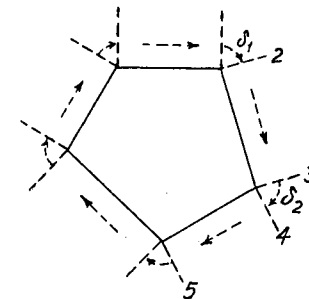


Fig. 143

poi, procedendo, venne portato a fondo; nel primo δ il lato dell'angolo ruota di un certo valore fino a raggiungere la posizione dell'altro lato 2; poi si sposta fino a 3, *senza* ruotare, perché 2 e 3 sono paralleli; ruota da 3 a 4, e così via. Nel procedere intorno, nel chiudere la figura, tornando alla posizione 1, il lato deve aver compiuto in tutto la rotazione completa di 360° .

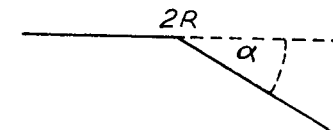


Fig. 144

¹ Molto tempo dopo ho trovato in un libro un'osservazione del fisico Ernst Mach, che indicava un passaggio analogo nello spezzare la linea. Anche in questo modo si raggiunge l'angolo completo di 360° attraverso la somma dei δ . La con-

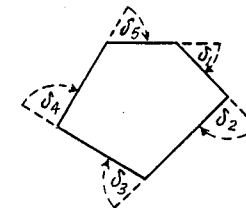


Fig. 145

cezione non è identica: qui l'angolo non è diviso in R , δ , R , ma in $2R$, δ : ciò rende un po' diverse, dal punto di vista psicologico, le condizioni per vedere la completezza del giro.

2) Dopo di ciò venne il passaggio: facciamo che le linee dei lati si accorcino, fino a raggiungere la lunghezza zero. Che cosa succede? La distanza tra i lati paralleli degli angoli esterni diminuisce, queste linee si identificano, lo stesso avviene con i vertici degli angoli — ed ottengo la figura qui sotto: il punto con attorno lo spazio angolare di 360° ottenuto dall'unione dei δ !

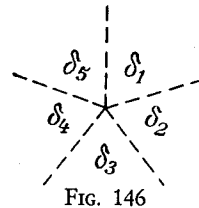


FIG. 146

3) A questo punto sorse la seguente domanda: « E per quanto riguarda le figure in cui un angolo sia rientrante, di modo che l'angolo non mostri chiaramente la struttura degli angoli laterali con in mezzo il δ ? » Nel fare la domanda la risposta (fig. 147) era chiara: non ha nessuna importanza; se il lato dell'angolo è rivolto in dentro, questo fatto deve venire compensato, e i δ insieme devono completare l'angolo di 360° .

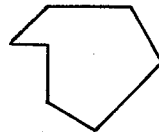


FIG. 147

4) Il metodo consueto per trovare la formula della somma degli angoli esterni di un poligono sembrava ora davvero strano: « La somma di tutti gli angoli interni ed esterni è $n \cdot 4R$... $\Sigma i + \Sigma e = n \cdot 4R$ ». Perciò la somma degli angoli esterni è $n \cdot 4R$ meno la somma degli angoli interni. Sapendo che la somma degli angoli interni è di $n \cdot 2R - 4R$, in base alla solita prova con i triangoli,² otte-

² La somma degli angoli di un triangolo, 180° o $2R$ (due angoli retti), di solito si ricava senza riferirsi al fatto che il triangolo è una figura chiusa.

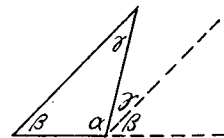


FIG. 148

niamo la formula $\Sigma e = n \cdot 4R - (n \cdot 2R - 4R)$. Eseguendo la sottrazione, otteniamo: $n \cdot 4R - n \cdot 2R + 4R = n \cdot 2R + 4R$.

In questa formula $n \cdot 2R$ è il risultato della sottrazione del $n \cdot 2R$ dei triangoli da $n \cdot 4R$; $4R$ è il risultato di un secondo segno meno davanti al $4R$ negativo nella formula degli angoli interni. I termini sono compresi in un modo involuto senza alcuna relazione diretta con il modo in cui la figura viene chiusa dagli angoli del poligono.³ Ma nello stesso tempo ho visto ciò che rappresenta veramente $n \cdot 2R + 4R$, cioè la somma degli angoli laterali: i due angoli retti a fianco di ogni lato, $n \cdot 2R$, più la rivoluzione completa, $4R$, la chiusura raggiunta dai δ .

5) A questo punto sorse in me un pensiero curioso: Perché chiamiamo un triangolo proprio triangolo? Perché non lo chiamiamo,

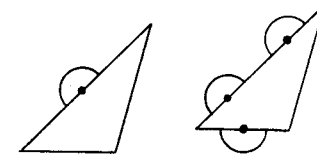


FIG. 150

ad esempio, quadrangolo o esagono? Potremmo certamente farlo perché in effetti c'è un angolo in ogni punto dei lati. Questi angoli non vengono calcolati. Perché? Si tratta di una faccenda arbitraria? No. Ora è chiaro: a questi punti dei lati non ci sono δ . Queste posizioni non contribuiscono per nulla alla rottura della linea che racchiude la

La prova consueta della somma degli angoli interni di un poligono è la seguente: internamente al poligono costruire n triangoli, ciascuno avente per base un lato del poligono. La somma degli angoli di tutti i triangoli è $n \cdot 2R$. Per ottenere la somma degli angoli interni di un poligono si sottraggono da $n \cdot 2R$ gli angoli adiacenti dei

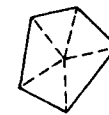


FIG. 149

triangoli, che giacciono attorno al punto centrale. La somma di questi angoli sarà $4R$. Quindi $\Sigma i = n \cdot 2R - 4R$.

³ È vero che il $4R$ nella formula degli angoli interni è direttamente in relazione con la chiusura nel senso di far combaciare i vertici dei triangoli; ma la relazione interna tra la somma degli angoli del triangolo stesso e la sua chiusura, non risulta altrettanto chiara.

figura e al ritorno al suo punto di inizio, alla chiusura del poligono attraverso la rotazione dei δ .

6) Ma, e gli angoli interni? Quando affrontai tale questione, di nuovo non avevo alcuna nozione di come si potesse rispondere ad essa direttamente. Di nuovo per prima cosa si sviluppò una vaga idea. Attorno a un punto vi è un angolo completo di 360° e lo stesso avviene per una figura. All'interno la figura è... un « buco »! In breve questo divenne chiaro: ci deve essere un angolo *negativo* completo, di 360° : all'interno *gli angoli laterali si sovrappongono*. Il

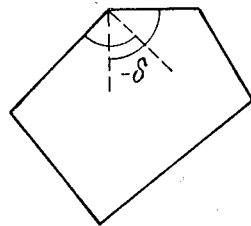


FIG. 151

valore di questo angolo di sovrapposizione rappresenta un angolo di rotazione negativo, $-\delta$. La somma di questi angoli, quando la figura si chiude, deve essere uguale a un angolo negativo completo di 360° .

Qui il lettore si potrebbe ben chiedere che cosa venne fuori da tutto questo. Ne venne fuori esattamente la stessa formula che si conosceva prima, ma in una nuova luce: i termini della formula acquisirono un significato funzionale diretto.

E questa comprensione portò immediatamente ad una gioiosa penetrazione del problema: se gli angoli laterali ed il loro numero particolare sono fattori periferici, se è di rilievo soltanto la rotazione dei δ , allora si può applicare lo stesso principio ad ogni *curva* chiusa di un piano, alla chiusura di un cerchio, di un'ellisse, ecc. (tralascio la dimostrazione).

7) Il problema però era ancora aperto. Nel momento in cui la soluzione divenne chiara, si presentò urgente un'esigenza: se questa linea di pensiero giunge veramente al cuore del problema, allora dovrebbe valere anche per *qualsiasi* figura chiusa: anche per solidi a tre dimensioni, a quattro dimensioni, a n dimensioni, proprio per tutte le figure chiuse... con i cambiamenti necessari per lo spazio non euclideo.

In sei settimane di duro lavoro riuscii a comprendere veramente le figure a tre dimensioni. (Un anno più tardi scoprii che un mate-

matico aveva già trovato anni prima la formula per i solidi, e tuttavia mi sarebbe dispiaciuto perdere queste esperienze che portarono a una vera penetrazione). Durante quelle settimane il problema era costantemente attivo, continuava a lavorare. Studiai solidi particolari come il cubo, parti del cubo, certe piramidi, ecc.; la natura degli angoli solidi per quanto riguarda il modo in cui, messi insieme, costituiscono le parti di un angolo solido completo. Durante questo periodo si sviluppò in me una considerevole capacità di figurarmi angoli solidi e farli combaciare nella mia immaginazione. Per quanto riguarda le formule, non ci furono tentativi ed errori, né ipotesi arbitrarie; piuttosto vi fu la comprensione di quello che accade se gli angoli solidi di una determinata figura immaginata vengono riuniti in un punto; ad esempio in che modo gli angoli di un cubo, visti nel centro di una sfera, formano un angolo solido completo; ⁴ quale somma danno gli angoli di altri solidi: parti del cubo, piramidi, parallelepipedi, ecc.

Ci furono momenti molto drammatici come quando, ad esempio, un amico mi disse: « Smettila di preoccuparti tanto. Il problema è insolubile, in quanto la somma degli angoli di una piramide varia se l'altezza cambia. A dire il vero cambia in continuazione ».

8) Ma il processo proseguì senza interruzioni. Dopo molti sforzi, venne la soluzione, per solidi a tre dimensioni, in un momento di dormiveglia durante la notte. Sebbene non mi ricordassi di aver scritto nulla, al mattino trovai la formula seguente, scritta su di un pezzo di carta:

$\Sigma e = \Sigma \text{ angoli piani} + \Sigma \text{ angoli di spigolo} + \Sigma \delta (=1)$, in cui e indica un angolo solido esterno. Prendete un piano (a); piegatelo lungo una linea retta (b); portate i piani normali a ciascuno dei due semipiani (c). Tra gli « angoli piani normali » (che corrispondono agli

⁴ Proprio come nelle due dimensioni un angolo retto costituisce un quarto dell'intero spazio angolare, mentre quattro lo completano, oppure l'angolo di un esagono regolare è un terzo dello spazio angolare e tre lo completano. In generale,

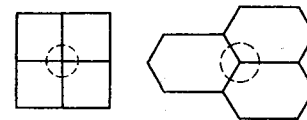


FIG. 152

insegnando ciò che è un angolo bisognerebbe portare alla visione dell'angolo come parte dell'angolo intero, o della rotazione completa assieme alla parte rimanente (vedere Capitolo IV, pagg. 140-141).

angoli laterali, R , delle figure a due dimensioni), avete un « angolo di spigolo » (c); rompetelo in un punto (d) e otterrete il δ . Per chiudere il solido la somma dei δ deve essere un angolo solido completo! Subito vidi che quello che vale in questo caso speciale di « rotura del piano » vale in generale per gli angoli solidi. Se tutti gli angoli vengono visti come centro di una sfera, i δ , gli « angoli polari »,

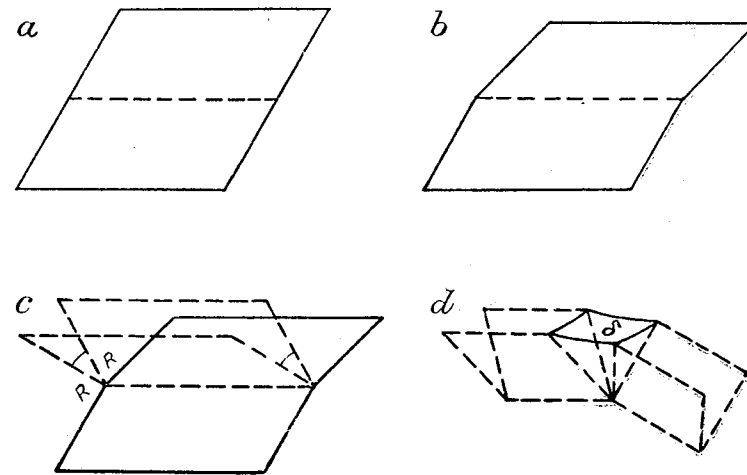


FIG. 153

devono riempire la sfera. Questa idea venne portata a compimento. Si raggiunse poi la soluzione corrispondente per la somma degli angoli interni, che comportava il « buco » solido, il -1 della somma dei δ .

I giorni successivi vennero dedicati alle dimostrazioni esatte, che includevano sfere, ecc.

Non seguirò oltre la linea del mio pensiero successivo, mi fermerò qui nell'esposizione, con questo momento di gioia in cui la relazione interna tra chiusura e somma degli angoli divenne trasparente nei solidi come nelle figure piane.

Riassumendo:

1. La sensazione di una interrelazione significativa tra la struttura di figure chiuse e la somma dei loro angoli, e il bisogno di afferrarla in modo chiaro.
2. Un'idea d'insieme primitiva di chiusura e di « spazio angolare ». A questo punto vi fu un mutamento nella mèta: invece di cercare gli angoli interni, fu affrontata la questione della somma

degli angoli esterni, nel sentimento confuso che si trattasse della questione più semplice dal punto di vista strutturale. (In seguito questa sensazione trovò la sua chiara giustificazione nel procedimento scoperto).

3. L'importanza data ad un passaggio necessario nel procedimento di chiusura di una figura portò un cambiamento radicale nel significato di un angolo: la creazione dell'« angolo di rotazione », il δ , ottenuto separando ciò che vi è di rilevante per raggiungere la chiusura, da ciò che non lo è.

4. Considerando i δ nel loro insieme, si raggiunse l'intuizione della relazione interna tra angoli e figura chiusa. A differenza del criterio addittivo degli angoli consueti, l'insieme dei δ dà la forma completa, la chiusura, nella unicità dell'angolo di 360° . Qui è stato usato un riordinamento.

$$\underbrace{R \delta_1 R \parallel R \delta_2 R \parallel R \delta_3 R \parallel R \delta_4 R}_{\text{Fig. 154}}$$

FIG. 154

Le parti δ , separate dagli angoli laterali, erano viste come un insieme. Ma anche se si mostrassero a qualcuno gli angoli con già tracciate le linee di divisione, di modo che ogni angolo consistesse di tre parti, questo qualcuno potrebbe rimanere cieco alla struttura, e raggruppare nel solito modo (mettendo insieme i tre angoli nel solito posto in modo che la somma risulti ancora composta dagli angoli consueti). Qui il raggruppamento effettivo (la separazione dei δ dagli angoli laterali strutturalmente periferici che non contribuiscono per nulla alla chiusura) era guidato dall'esigenza di comprendere la chiusura della figura. Il concentrarsi sui δ e il considerarli come un insieme sottolineò la trasponibilità strutturale di questo fattore (vedi pag. 212) rispetto al numero, strutturalmente periferico, degli angoli laterali, degli angoli consueti, delle linee e degli angoli interni.

5. Per rafforzare il risultato raggiunto, il problema venne approfondito nei suoi particolari e ne venne data una dimostrazione dettagliata. Riducendo la misura dei lati fino a zero, la connessione diretta degli angoli esterni con la prima concezione di « spazio angolare » venne afferrata concretamente.

6. Sorse una difficoltà e venne chiarita: si trovò che il principio valeva anche nel caso speciale in cui un angolo del poligono è rientrante (cfr. pag. 214).

7. L'approfondimento raggiunto diede ora la ragione effettiva del procedimento abituale, che in sé non si riesce a capire bene. La formula consueta si presentò in un senso nuovo e più profondo: i termini trovarono un significato diretto, chiaro, funzionale.

8. A questo punto venne affrontata la questione degli angoli interni. Di nuovo sorse dapprima un'idea globale d'insieme: l'idea del « buco » completo, i 360° dati dalla somma dei δ negativi.

9. L'applicabilità di questa concezione si ampliò; si trovò che poteva abbracciare qualsiasi curva chiusa in un piano. Come conseguenza della comprensione raggiunta, scomparve una limitazione della concezione consueta.

10. Si sentì il bisogno di approfondire il problema: se la penetrazione raggiunta era fondamentale, la relazione avrebbe dovuto essere vera anche per le figure a tre dimensioni, ecc. Dapprima si cercò l'orientamento nella somma di angoli solidi. Il materiale venne studiato in casi di solidi relativamente semplici. Nonostante alcune complicazioni, gli angoli vennero fatti combaciare e si trovò la loro somma con l'immaginazione. Dapprima non si vide alcuna possibilità di una soluzione radicale, generale.

11. Una notte, balenò la soluzione, strutturalmente chiara, come nel caso molto più semplice delle figure a due dimensioni.

La cosa essenziale nel processo fu chiaramente lo sforzo di giungere alla struttura interna del compito. Di nuovo vediamo l'importanza della visione di insieme, della riorganizzazione, del riordinamento, del giungere al significato funzionale delle parti nel tutto, ecc.: tutto alla luce delle esigenze strutturali.

Ciascun passaggio era un passo avanti lungo una coerente linea di pensiero; non vi furono salti arbitrari, procedimenti per tentativi ed errori.

La causa del fatto che vi fossero parecchi passaggi nel procedimento, che il processo non avanzasse facilmente, è manifesta: il processo doveva superare i fattori strutturali consueti, chiari in sé, forti; e inoltre più tardi, lavorando con figure a tre dimensioni, si dovette raggiungere la padronanza di una situazione altamente complessa per quanto riguarda la struttura.

Una scoperta di Galileo

Come arrivò Galileo alla scoperta che condusse alla legge d'inerzia, dando così inizio alla fisica moderna?

Vi sono state numerose discussioni circa il modo di procedere effettivo di Galileo: nemmeno ora il problema è stato completamente chiarito. Storicamente, nei suoi dettagli, è una questione complicata. La situazione in cui si trovò Galileo era carica di concezioni speculative assai complesse circa la natura dei movimenti.¹ Le interpretazioni storiche discordano su diversi punti, compresa l'importanza che rivestirono i concetti più antichi nel processo di pensiero di Galileo.²

Le discussioni si sono polarizzate su punti come questi: il pensiero di Galileo fu guidato dall'induzione? Oppure dall'astrazione? Dall'osservazione empirica e da esperimenti oppure da presupposizioni *a priori*? Il suo merito principale fu quello di aver reso quantitative osservazioni di carattere qualitativo?

Se studiamo i testi (gli antichi trattati di fisica e quelli del tempo di Galileo) troviamo che una delle grandi caratteristiche del pensiero di Galileo era la sua capacità di ottenere una visione strutturale profonda dei problemi così chiara e nitida, che si stacca net-

¹ Movimenti « naturali » e impressi venivano distinti in modo specifico. Vi era il concetto della « vis impressa » (forza impressa), che necessariamente doveva diminuire, e congetture intorno al ruolo del mezzo nel ritardare l'arresto del corpo. C'erano idee circa i movimenti circolari « naturali » a velocità costante, ecc.

² I lettori che sono interessati allo svolgimento storico possono leggere: WOHLWILL, VON E., « Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes », *Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft*, 1883, vol. XIV, pagg. 365-410; 1884, vol. XV, pagg. 70-135; MACH, E., *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (Leipzig, F. A. Brockhaus, 1908); i meravigliosi studi di KOIRÉ, A., *Etudes Galiléennes* (I, II, III) Paris, Hermann, 1939; e, naturalmente, prima di tutto, gli scritti di Galileo stesso.

tamente dallo sfondo confuso e sofisticato delle concezioni del suo tempo.

Non tenterò qui una ricostruzione storica: per far questo bisognerebbe discutere in modo accurato molte fonti, ed io non sono uno storico. Inoltre, il materiale storico stampato non sarebbe sufficiente per lo psicologo, a cui interessano le caratteristiche del processo di pensiero nel suo sviluppo, il che di solito non viene registrato negli scritti. Sfortunatamente non possiamo interpellare di persona Galileo circa l'effettivo sviluppo del processo. Mi sarebbe davvero piaciuto interrogarlo su certi punti in particolare.

Cercherò di raccontare brevemente la storia in modo che mostri alcuni fattori che mi sembrano essenziali, alcune linee del suo bellissimo itinerario. La storia che segue è, sotto certi aspetti, semplicemente una ipotesi psicologica senza nessuna pretesa di esattezza storica, ma da cui, penso, è possibile imparare qualcosa che riguarda i nostri problemi.

Propongo al lettore di non leggere soltanto quello che sto per narrare, ma anche di cercare di pensare assieme a me.

I

Eccovi la situazione:

1. Se avete una pietra in mano e la lasciate andare, essa cadrà a terra. Questo avviene per i corpi pesanti. I fisici dell'antichità dicevano: « I corpi pesanti tendono verso il loro luogo di provenienza, la terra ».

2. Se do una spinta a un corpo, ad esempio a un carretto, oppure se faccio rotolare in avanti una palla su di un piano orizzontale, questa continuerà a muoversi per un po', poi si fermerà: presto, se la spinta è leggera, un po' più in là se le do una forte spinta.

Questo è il significato più semplice dell'antica *vis impressa*: « Il corpo in movimento giunge prima o poi a un punto fermo se viene a mancare la forza che lo muove ».

Non è forse vero questo? È ovvio.

3. E vi sono, naturalmente, parecchi fattori addizionali che devono essere presi in considerazione insieme ai problemi di movimento: ad esempio la grandezza dell'oggetto, la sua forma, la superficie su cui viene mosso il corpo, la presenza o la mancanza di ostacoli, ecc.

Così conosciamo un gran numero di fatti riguardo al movimento. Questi ci sono familiari. Li comprendiamo? Sembra di sì. Sappia-

mo davvero come avviene il movimento? Riusciamo a vedere in opera questi principi?

Galileo non era soddisfatto di questa conoscenza. Si chiese: « Sappiamo *come* procedono in realtà tali movimenti? » Spinto dal desiderio di giungere ad una comprensione delle caratteristiche fondamentali, delle leggi interne implicite nella situazione, Galileo si disse: « Sappiamo che un corpo pesante cade, ma *come* cade? Nel cadere acquista una velocità, che è tanto più forte, quanto maggiore è l'altezza da cui cade. Che cosa avviene alla velocità mentre il corpo cade? ».

L'esperienza comune offre solo un quadro vago. Galileo cominciò a fare osservazioni ed esperimenti nella speranza di scoprire che cosa accade alla velocità, e se è governata da principi che possiamo comprendere. I suoi apparati sperimentali erano molto rozzi se paragonati a quelli perfezionati in seguito dai fisici; ma nel fare tali osservazioni ed esperimenti cercò di formulare e di provare un'ipotesi. Dapprima fece una supposizione errata, poi trovò la formula dell'accelerazione della caduta di un grave. Poiché la velocità di caduta è così grande che i valori esatti sono difficili da calcolare, Galileo, desideroso di studiare la questione a fondo, aveva pensato fra sé: « Non posso studiare tutto ciò in modo più conveniente? Le sfere rotolano su di una superficie inclinata. Le studierò. La caduta libera non è forse solo un caso speciale, il caso di una caduta ad una inclinazione di 90° invece che di un angolo minore? ».

Studiando l'accelerazione nei vari casi vide che questa diminuisce regolarmente assieme all'angolo d'inclinazione: l'ordine dell'angolo corrisponde all'ordine del diminuire dell'accelerazione.

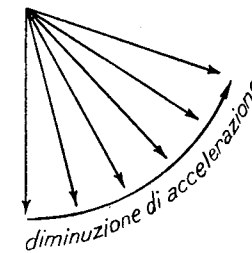


Fig. 155

L'accelerazione divenne il fatto più importante e centrale, una volta compreso il principio che associava il diminuire dell'accelerazione con l'ampiezza dell'angolo.

II

Poi improvvisamente egli si chiese: « Questo non è forse soltanto metà del quadro? Quello che accade quando si lancia un corpo verso l'alto, quando si spinge una sfera su di un piano inclinato verso l'alto, non costituisce forse simmetricamente l'altra parte del quadro, che ripete, come un'immagine su di uno specchio, quella che già abbiamo, e completa il quadro? »

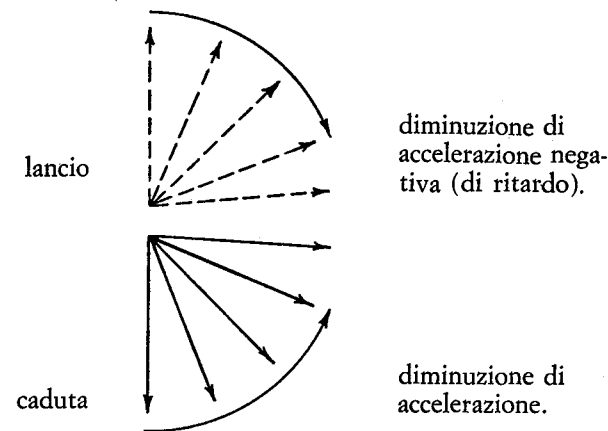


FIG. 156

Quando un corpo è lanciato verso l'alto, si ha una accelerazione non positiva ma negativa. Il corpo rallenta nel corso del suo movimento verso l'alto. Ma di nuovo, in modo simmetrico con l'accelerazione positiva della caduta di un corpo, l'accelerazione negativa diminuisce man mano l'angolo d'inclinazione diventa più piccolo di 90° , dando a questo modo un quadro completo e coerente.³

³ Galileo aveva considerato ed usato concretamente l'idea della simmetria strutturale dinamica in eventi opposti, cioè, per esempio, che un corpo che rotoli lungo



FIG. 157



FIG. 158

III

Ma questo completa veramente il quadro? No. Vi è una lacuna. Che cosa accade quando il piano è orizzontale, quando l'angolo è zero e il corpo è in movimento? In tutti i casi potremmo cominciare con una data velocità. Che cosa *deve* ragionevolmente accadere in accordo con la struttura complessiva di quelle situazioni?

L'accelerazione positiva sotto e l'accelerazione negativa sopra, diminuiscono dai casi verticali fino a... nessuna accelerazione positiva o negativa, il che significa... movimento costante?! Se un corpo si muove orizzontalmente in una data direzione, continuerà a muoversi a velocità costante... per tutta l'eternità, se nessuna forza esterna muta il suo stato di moto.

Questo è in diretta contraddizione con l'antica affermazione del punto 2 qui sopra esposto (pag. 224). Un corpo che si muove a velocità costante non si fermerà mai se non vi sono ostacoli esterni, a prescindere dal fatto che le forze che hanno determinato il movimento siano deboli o forti. Che conclusione sorprendente! È chiaro che essa contraddice ogni esperienza consueta, e tuttavia è resa necessaria dalla coerenza della struttura.

Naturalmente non possiamo eseguire l'esperimento. Anche se potessimo eliminare tutti gli ostacoli esterni, cosa che non possiamo fare, l'osservazione per l'eternità è fuori discussione. D'altra parte la diminuzione nel cambiamento di accelerazione indica chiaramente in questo caso una quantità nulla di cambiamento.

Le concezioni di Galileo vennero confermate e fornirono la base per lo sviluppo della fisica moderna.

Il lettore moderno è naturalmente a conoscenza di queste concezioni; porterò come illustrazione un semplice esempio familiare. Nel mettere in moto un treno, lo sforzo più grande è richiesto all'inizio, per farlo passare dalla quiete al moto. Una volta in movimento, ammesso che le rotaie e le ruote siano lisce, alla macchina è necessaria minor potenza per mantenere la velocità; il treno procede quasi da solo. Se noi ora rendiamo sempre più lisce le ruote e i binari, e studiamo la quantità decrescente di potenza necessaria per far muovere il treno, le nostre curve indicheranno, con

un piano inclinato dovrà risalire fino all'altezza da cui è partito in un piano inclinato opposto, in quanto la sua velocità diminuisce allo stesso modo in cui era aumentata mentre rotolava verso il basso.

Egli aveva avuto per la prima volta la visione una tale simmetria dinamica nel movimento della lampada in oscillazione, osservata in una chiesa di Pisa.

nostra sorpresa, che con le ruote e le rotaie lisce in modo ideale e prive di attriti, sarebbero necessarie ingenti forze contrarie per fermare il treno, per portarlo di nuovo alla quiete.⁴

* *

Quali sono le caratteristiche essenziali di questo processo?

Primo, il desiderio di chiarire, di scoprire che cosa succede quando un corpo cade o rotola; il desiderio di vedere se vi è un principio interno in questi eventi; un desiderio di abbracciarli in un'unica visione, nei vari angoli d'inclinazione.

Tutto ciò contribuì a fissare il pensiero sul problema dell'accelerazione. L'ipotesi che il concentrarsi su questo problema avrebbe potuto condurre ad una chiarificazione strutturale, portò alla creazione di apparati sperimentali.

I vari casi appaiono come parti di una struttura ben ordinata, che mostra la relazione tra gli angoli d'inclinazione e il valore dell'accelerazione. Ciascun caso ha il suo posto nel gruppo, e ciò che accade in ciascun caso viene compreso come richiesto da questa sua posizione particolare.

In secondo luogo, questa struttura viene vista ora come parte di un contesto più ampio: vi è un'altra parte complementare, che viene intesa come simmetrica alla prima, con la quale forma un insieme in cui le due metà sono i due grandi sotto-gruppi corrispondenti, con accelerazione positiva nell'uno, negativa nell'altro. Le qualità d'insieme delle due metà si completano a vicenda. Vengono viste in un unico colpo d'occhio nella loro simmetria strutturale, nella loro coerente struttura d'insieme.

Terzo, si nota che nella struttura vi è una posizione critica: la posizione di movimento orizzontale. Il principio della struttura dell'insieme stabilisce chiari requisiti proprio per questa posizione. In vista di queste esigenze essa appare come il caso in cui non si presentano né accelerazione né rallentamento: la velocità è costante.

La posizione di stasi quindi diventa un caso speciale di velocità costante, un caso di assenza di accelerazione positiva o negativa. La quiete e il movimento rettilineo costante nella direzione orizzontale appaiono strutturalmente equivalenti.

* Naturalmente sono presenti le operazioni della logica tradizio-

⁴ Confrontate la descrizione molto più semplificata del processo di pensiero di Galileo data da EINSTEIN e INFELD in *The evolution of physics* (New York, Simon and Schuster, 1938) pagg. 5 segg.

nale, come l'induzione, l'inferenza, la formulazione di teoremi, la deduzione; inoltre l'osservazione e gli esperimenti ingegnosi. (Una delle grandi caratteristiche del pensiero di Galileo fu il modo in cui egli combinava insieme il ragionamento rigoroso, il procedimento matematico, con l'uso di esperimenti per provare l'idea teoretica o per dare risposta ad un problema teoretico). Ma tutte queste operazioni funzionano nella loro posizione particolare all'interno del processo complessivo. Il processo stesso è guidato dal nuovo centramento che ha origine nel desiderio di ottenere un approfondimento comprensivo. Questo comporta alcune trasformazioni, il vedere le cose come parti di una nuova, chiara struttura.

La transizione dalla concezione vecchia alla nuova portò con sé cambiamenti fondamentali nei concetti. Il significato delle concezioni circa il movimento veniva radicalmente mutato di posizione, di ruolo e di funzione. Le connessioni interne si vedevano in una struttura completamente diversa; ebbero luogo un nuovo raggruppamento e una divisione nuova.⁵

Prima, ad esempio, la quiete e certi movimenti circolari « naturali » erano fondamentalmente separati o posti in opposizione agli altri movimenti. Ora invece la quiete e il movimento rettilineo uniforme vengono visti assieme, come strutturalmente equivalenti, e vengono separati o posti in opposizione a movimenti accelerati positivamente o negativamente.

Il salire e il cadere dei corpi vengono visti insieme come casi di accelerazione nella divisione simmetrica dell'intero quadro. Caduta e ascesa libere sono concepite come casi speciali dell'intero gruppo di movimenti in qualsiasi direzione rettilinea.

L'estinguersi del movimento non viene più considerato come il risultato necessario dell'effetto, diminuito o in via di estinzione, della *vis impressa* (forza impressa), ma si concepisce ora in modo fondamentalmente diverso: il movimento viene fermato esternamente dall'attrito.

⁵ Per abbreviare userò alcune formulazioni che vennero stabilite soltanto più tardi nella loro forma pienamente generalizzata, ma che erano in qualche modo presenti o già previste nelle concezioni di Galileo. Galileo era estremamente cauto nelle sue formulazioni.

La formulazione di Galileo concerne il movimento orizzontale; egli applicò lo stesso principio anche a movimenti in altre direzioni. Egli non generalizzò questo principio nella forma che ora noi conosciamo sotto il nome di legge d'inerzia, ma altri lo fecero immediatamente; non siamo sicuri se egli si sia reso conto della universalità del principio.

L'attrito non è più semplicemente uno dei diversi fattori che si devono prendere in considerazione nel movimento: ora occupa il ruolo opposto a quello dell'inerzia. Mentre prima si supposeva che il movimento rettilineo avesse termine con o senza attrito, a causa dell'estinzione naturale della *vis impressa*, la nuova concezione vede nell'attrito la causa fondamentale del venir meno del movimento.

La forza appare essenzialmente come qualcosa che determina l'accelerazione.

Ogni cosa acquista il suo nuovo significato in virtù del suo ruolo e della sua funzione nella nuova struttura.

I nuovi concetti aprirono una magnifica prospettiva per comprendere un numero immenso di fenomeni: resero possibile una comprensione completamente nuova dei movimenti celesti. Newton in seguito poté concepire questi movimenti come generati dall'inerzia da un lato, che li fa tendere a un movimento rettilineo, e dalla gravitazione dall'altro.

* *

I processi produttivi hanno spesso questa natura: un nuovo esame e un'indagine cominciano col desiderio di giungere ad una vera comprensione. Una determinata regione del campo diviene cruciale, viene messa a fuoco; ma non resta isolata. Si sviluppa una nuova visione della situazione, più profonda, che comporta cambiamenti nel significato funzionale degli elementi, nel loro raggruppamento, ecc. Guidati da ciò che richiede la struttura di una situazione in una regione cruciale, si giunge a una predizione ragionevole, la quale, come le altre parti della struttura, domanda poi una verifica, diretta o indiretta.

Sono presenti due direzioni: cercare di ottenere un quadro d'insieme coerente, e vedere che cosa richiede per le parti la struttura del tutto.

* *

Nel raccontare la storia in questo modo ho avuto spesso esperienze deliziose, constatando che nasceva un vivace, genuino interesse, osservando la partecipazione con cui la classe mi seguiva, vedendo, al punto critico, alcuni studenti esclamare: « Ora mi rendo conto! » Per loro si trattava di un cambiamento dalla semplice conoscenza di un dato numero di cose, ad avere gli occhi veramente aperti a una penetrazione più profonda in un panorama di ampia prospettiva.

CAPITOLO DECIMO

Einstein: il pensiero che portò alla teoria della relatività

Quali furono i passaggi decisivi nello sviluppo della teoria della relatività di Einstein? Sebbene sia un compito alquanto difficile, cercherò di chiarirli al lettore. Verranno esclusi dalla discussione un buon numero di problemi, quali la questione dell'etere e le relazioni con il principio della « relatività » di Galileo. Il campo che Einstein affrontò in questo gigantesco processo di pensiero era molto vasto, in quanto comprendeva la maggior parte degli argomenti fondamentali della fisica moderna: problemi difficili, poco noti a coloro che non sono al corrente della complessità di questa scienza. Benché il seguente schizzo debba essere necessariamente condensato, spero che il lettore potrà farsi un'idea giusta della natura dei passaggi decisivi.

Furono giorni meravigliosi quelli, cominciati nel 1916, in cui ebbi la fortuna di sedere assieme a Einstein per ore e ore, soli nel suo studio, e di udire da lui la storia del drammatico svolgimento di pensiero che culminò nella teoria della relatività. Nel corso di quelle lunghe discussioni feci ad Einstein domande dettagliate riguardo agli eventi concreti del suo pensiero. Egli me li descrisse non in modo indeterminato, ma discutendo con me la genesi di ciascun problema.

Gli scritti originali di Einstein riferiscono i suoi risultati, ma non raccontano la storia del suo pensiero. In uno dei suoi libri egli ha esposto alcuni passaggi del processo; io l'ho citato in questo capitolo, nei punti opportuni.

Il dramma si sviluppò in diversi atti.

Atto I. L'inizio del problema

Il problema ebbe inizio quando Einstein aveva sedici anni ed era allievo del ginnasio (Aarau, Kantonschule). Non era uno studente particolarmente bravo a meno che non facesse del lavoro produttivo per conto suo: lo faceva in matematica e in fisica, e di conseguenza conosceva queste materie più dei suoi compagni. Fu allora che il grande problema cominciò davvero a preoccuparlo. Se ne interessò attivamente per sette anni; tuttavia, dal momento in cui giunse a mettere in dubbio il consueto concetto di tempo (vedi Atto VII) gli ci vollero soltanto cinque settimane per scrivere il suo saggio sulla relatività, sebbene in quel periodo lavorasse tutto il giorno all'Ufficio Brevetti.

Il processo cominciò in un modo non molto chiaro, e quindi difficile da descrivere: in un particolare stato di perplessità in cui egli si trovava. Dapprima vennero problemi di questo tipo: che cosa succederebbe se qualcuno corresse dietro ad un raggio di luce? E se qualcuno viaggiasse sul raggio? Se qualcuno corresse dietro ad un raggio di luce che procede, sarebbe di conseguenza diminuita la velocità di questo? Se qualcuno corresse a velocità sufficiente, il raggio non si muoverebbe più del tutto?... Al giovane Einstein questo sembrava strano.

Lo stesso raggio di luce, per un altro uomo, avrebbe un'altra velocità. Che cos'è la « velocità della luce »? Se la considero in relazione a qualcosa, questo valore non è più il medesimo in relazione a qualche altra cosa che sia essa stessa in movimento. (Sconcertante pensare che la luce sotto certe condizioni proceda più velocemente in una direzione che in un'altra!) Se questo è esatto bisognerebbe allora trarre delle conseguenze per quanto riguarda la terra, che è in movimento. Ci sarebbe allora un modo di scoprire, attraverso esperimenti con la luce, se ci si trova in un sistema in movimento! L'interesse di Einstein fu attratto da questo ed egli cercò di trovare metodi con cui fosse possibile stabilire o misurare il movimento della terra. Seppe soltanto più tardi che i fisici avevano già fatto esperimenti di tal genere. Il suo desiderio di progettare tali esperimenti era sempre accompagnato dal dubbio che le cose non stessero veramente così; in ogni caso, egli sentiva che doveva cercare di decidere.

Egli si disse: « So qual è la velocità della luce in relazione ad un sistema. Sembra chiaro quale sia la situazione se si prende in

considerazione un altro sistema, ma le conseguenze sono molto sconcertanti ».

Atto II. La luce determina uno stato di quiete assoluta?

Le operazioni con la luce porterebbero a conclusioni sotto questo aspetto differenti da quelle che è possibile ottenere attraverso operazioni di meccanica? ¹ Dal punto di vista della meccanica non sembra che esista la quiete assoluta, da quello della luce sembra invece di sì. E per quanto riguarda la velocità della luce? Bisogna porla in relazione a qualcosa, ed è qui che cominciano le difficoltà. La luce determina uno stato di quiete assoluta? In ogni caso non sappiamo se siamo o no in un sistema in movimento. Il giovane Einstein si era in certo qual modo convinto che non fosse possibile stabilire se ci si trova o no in un sistema in movimento. L'impossibilità di un « movimento assoluto » gli sembrava una legge fondamentale della natura. Il conflitto tra l'idea che la velocità della luce sembra presupporre uno stato di « quiete assoluta », e la mancanza di questa possibilità in altri processi fisici, divenne il punto centrale della questione.

Dietro a tutto questo ci doveva essere qualcosa che non veniva ancora afferrato, compreso. Un'insoddisfazione a questo riguardo caratterizzava lo stato d'animo di Einstein durante questo periodo.

Quando gli chiesi se a quel tempo avesse già avuto qualche idea circa la costanza della velocità della luce, indipendente dal movimento del sistema di riferimento rispetto al quale è calcolata, Einstein rispose risolutamente: « No, si trattava di una semplice curiosità: il fatto che la velocità della luce potesse variare a seconda del movimento dell'osservatore era caratterizzato piuttosto dal dubbio, e gli sviluppi successivi aumentarono quel dubbio ». La luce non sembrava rispondere quando tali domande venivano poste. Anch'essa, proprio come i processi meccanici, sembrava non sapere niente circa uno stato di movimento o di quiete assoluti. Era interessante, eccitante.

Per Einstein la luce era qualcosa di veramente fondamentale.

¹ Cfr. Atto IX.

Un profano, privo di nozioni di fisica moderna, non sarà in grado di seguire gli argomenti esposti negli atti II e III nelle mie succinte formulazioni. Questi argomenti nel processo furono importanti; però non sembra assolutamente necessario comprenderli a pieno per seguire i passaggi successivi verso la soluzione effettiva. Il lettore profano può quindi passare all'Atto IV.

Al tempo dei suoi studi al ginnasio, l'etere non era più concepito come qualcosa di meccanico, ma come « il semplice conduttore dei fenomeni elettrici ».

Atto III. Lavoro sull'unica alternativa

Ebbe inizio un lavoro serio. Nelle equazioni del campo elettromagnetico trovate da Maxwell, la velocità della luce ha un ruolo importante ed è costante. Se le equazioni di Maxwell sono valide rispetto a un sistema, non sono valide in un altro: dovrebbero essere cambiate. Quando si cerca di farlo senza presupporre la costanza della velocità della luce, il problema diventa molto complicato. Per anni Einstein cercò di chiarire il problema studiando e cercando di cambiare le equazioni di Maxwell. Non riuscì a formulare queste equazioni in modo tale da superare soddisfacentemente le difficoltà. Egli si sforzò di vedere chiara la relazione tra la velocità della luce ed i fatti del movimento nella meccanica. Ma in qualsiasi modo cercasse di accordare il problema del movimento meccanico con i fenomeni elettromagnetici, s'imbatteva in qualche difficoltà. Uno dei suoi problemi era: che cosa accadrebbe alle equazioni di Maxwell ed alla loro conformità ai fatti, se si dovesse supporre che la velocità della luce dipende dal movimento della sorgente luminosa?

Sorse in lui la convinzione che a questo riguardo la situazione rispetto alla luce non poteva essere diversa dalla situazione rispetto ai processi meccanici (nessun movimento assoluto, nessuna quiete assoluta). Quello che gli portò via tanto tempo fu questo: non poteva dubitare del fatto che la velocità della luce è costante ed allo stesso tempo ottenere una soddisfacente teoria dei fenomeni elettromagnetici.

Atto IV. Einstein e il risultato di Michelson

Il famoso esperimento di Michelson pose i fisici di fronte a un risultato sconcertante. Se vi allontanate correndo da un corpo che vi precipita addosso, riterrete che vi colpirà un po' più tardi che se rimaneste fermi; se invece gli correte incontro, vi colpirà prima. Michelson fece proprio questo misurando la velocità della luce. Egli confrontò il tempo che la luce impiega a percorrere due tubi se questi due tubi sono posti ad angolo retto l'uno rispetto all'altro, e se uno giace in direzione del movimento della terra, men-

tre l'altro è normale ad esso. Poiché il primo tubo, in direzione della sua lunghezza, si muove con il movimento della terra, la luce che lo percorre dovrebbe raggiungere l'estremità sfuggente di questo tubo dopo che la luce nell'altro tubo ha raggiunto l'estremità di questo.

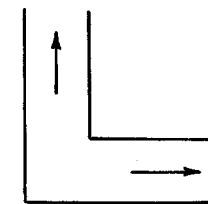


FIG. 159

Le frecce qui sopra indicano le direzioni in cui la luce procede. Il movimento della terra, e quindi di tutto l'apparato, è verso destra.

In realtà l'apparecchiatura era più complicata. All'angolo d'incontro dei due tubi c'era uno specchio comune, e vi erano specchi alle estremità. In entrambi i tubi si muovevano avanti e indietro raggi provenienti da una sorgente comune, riflessi dagli specchi. La differenza di tempo doveva venire misurata per mezzo di un effetto di interferenza nello specchio comune. (Il lettore potrebbe essere portato a credere che, poiché i raggi di luce si muovono avanti e indietro, la differenza causata dal movimento della terra venga annullata. Non è così, come dimostreranno alcuni calcoli matematici). La differenza non poteva sfuggire all'osservazione perché la misurazione per interferenza era sufficientemente delicata per rivelare il valore stabilito dall'analisi matematica.

Non si riscontrò nessuna differenza. L'esperimento venne ripetuto ed il risultato negativo venne chiaramente confermato.

Il risultato dell'esperimento di Michelson non si adattava in nessun modo alle idee fondamentali dei fisici: contraddiceva tutte le loro ragionevoli aspettative.

Per Einstein il risultato di Michelson non rappresentò un fatto a sé: aveva la sua posizione nel corso dei suoi pensieri, nel modo in cui si erano sviluppati fino a quel punto. Perciò quando Einstein lesse di questi esperimenti cruciali che i fisici avevano eseguito e degli altri più belli fatti da Michelson, i risultati raggiunti non lo sorpresero affatto, sebbene fossero molto importanti e decisivi. Essi sembravano confermare piuttosto che distruggere le sue idee. Ma

il problema non era ancora chiarito completamente. Qual era precisamente la causa di questo risultato? Il problema ossessionava Einstein benché egli non vedesse una via verso la soluzione positiva.

Atto V. La soluzione di Lorentz

Non solo Einstein era preoccupato, ma lo erano anche molti altri fisici. Lorentz, il famoso fisico olandese, aveva elaborato una teoria che formulava in termini matematici quello che era accaduto nell'esperimento di Michelson. Per spiegare questo fatto gli era sembrato necessario, come era sembrato anche a Fitzgerald, di introdurre un'ipotesi ausiliaria: ammettere che l'intero apparato usato per la misurazione subisse una lieve contrazione in direzione del movimento della terra. Secondo questa teoria il tubo posto in direzione del movimento della terra subiva un cambiamento in lunghezza, mentre l'altro tubo si allargava soltanto, senza mutare in lunghezza. L'entità della contrazione doveva essere supposta proprio di quel tanto necessario per compensare l'effetto del movimento della terra sullo spostarsi della luce. Si trattava di un'ipotesi ingegnosa.

In questo modo si poteva disporre di una bella formula positiva che determinava matematicamente i risultati di Michelson, oltre a un'ipotesi ausiliaria, quella della contrazione. La difficoltà era « eliminata ». Ma per Einstein la situazione rimaneva tormentosa quanto prima: egli aveva la sensazione che l'ipotesi ausiliaria fosse un'ipotesi *ad hoc*, che non andava in fondo al problema.

Atto VI. Riesame della situazione teoretica

Einstein si disse: « Ad eccezione del risultato, l'intera situazione nell'esperimento di Michelson mi sembra assolutamente limpida; tutti i fattori presenti e la loro azione reciproca sembrano chiari. Ma lo sono davvero? Capisco veramente la struttura dell'intera situazione, specialmente in relazione al risultato cruciale? » Durante questo periodo egli era spesso depresso, qualche volta disperato, ma spinto da vettori fortissimi.

Nel suo appassionato desiderio di capire o meglio di vedere se la situazione gli era veramente chiara, egli affrontò più volte gli elementi essenziali della situazione di Michelson, specialmente il punto centrale: la misurazione della velocità della luce nella condizione in cui tutto l'apparato si muove nella direzione cruciale.

Era questo che non riusciva proprio a chiarirsi. Egli avvertiva

una lacuna da qualche parte senza essere in grado di chiarirla, e nemmeno di formularla. Sentiva che la difficoltà era più profonda della contraddizione tra il risultato effettivo di Michelson e quello che ci si aspettava.

Aveva la sensazione che una certa regione nella struttura dell'intera situazione non gli era in realtà chiara come avrebbe dovuto essere, sebbene fino allora tutti, compreso lui, l'avessero accettata senza discussioni. Il suo modo di procedere fu all'incirca questo. Mentre si svolge il movimento cruciale vi è una misurazione del tempo. « Riesco a vedere chiaramente », si chiese, « la relazione, l'intima connessione tra la misurazione del tempo e quella del movimento? Mi è proprio chiaro come funziona la misurazione del tempo in questa situazione? » E questo per lui non fu un problema che riguardava soltanto l'esperimento di Michelson, ma un problema in cui erano messi in discussione principi più profondi.

Atto VII. Passaggi positivi verso la chiarificazione

Venne in mente ad Einstein che la misurazione del tempo comporta la simultaneità. Cosa dobbiamo pensare della simultaneità a proposito di un movimento di questo tipo? Tanto per cominciare, cosa si può dire della simultaneità in riferimento ad avvenimenti che si verificano in due luoghi diversi?

Egli si disse: « Se due eventi hanno luogo in uno stesso posto, comprendo chiaramente che cosa vuol dire simultaneità. Per esempio vedo queste due palle mentre colpiscono nello stesso tempo un identico bersaglio. Ma... ho davvero chiaro il significato della simultaneità quando essa è riferita ad avvenimenti che accadono in due luoghi diversi? Che cosa significa dire che un evento ha avuto luogo nella mia stanza nello stesso momento di un altro evento accaduto in un luogo lontano? Certo posso usare il concetto di simultaneità per luoghi diversi, allo stesso modo che lo uso per uno stesso luogo... ma posso davvero farlo? Mi è chiaro nel primo caso come lo è nel secondo?... Non lo è! »

Riguardo a quello che d'ora innanzi seguì nel pensiero di Einstein, possiamo fortunatamente citare alcuni paragrafi dai suoi stessi scritti.² Egli li stese sotto forma di discussione con il lettore. Quello

² EINSTEIN, A., *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (Braunschweig, 1916) pag. 14 segg. (Nota dell'Editore. I brani di Einstein citati in questo capitolo sono stati tradotti da Max Wertheimer).

che Einstein dice qui al lettore è simile al modo in cui procedette il suo pensiero: « Un fulmine che si ramifichi colpisce in due luoghi distanti: affermo che entrambe le scariche colpiscono simultaneamente. Se ora ti chiedo, caro lettore, se l'affermazione è sensata, risponderai: " Sì, certamente ". Ma se ti invito a spiegarmi con maggiore chiarezza il significato di questa affermazione, troverai, pensandoci un po', che rispondere a questa domanda non è così semplice come può parere a prima vista.

« Dopo un po' forse penserai a questa risposta: " Il significato dell'asserzione è chiaro in sé e non ha bisogno di alcun chiarimento ulteriore. Ci sarebbe bisogno di un certo calcolo, a dire la verità, se mi doveste affidare il compito di decidere attraverso l'osservazione se in un caso concreto i due effetti sono realmente simultanei o no " ».

Inserisco ora un esempio che Einstein fece in una discussione. Supponete che qualcuno usi la parola « gobbo ». Se questo concetto deve avere un significato chiaro, ci deve essere un modo di scoprire se un uomo ha la gobba o meno: se io potessi stabilire che non vi è nessuna possibilità di arrivare ad una decisione di questo genere, la parola non avrebbe alcun significato concreto per me.

« La stessa cosa », continuò Einstein, « vale per il concetto di simultaneità. Il concetto esiste in realtà per il fisico soltanto quando in un caso concreto c'è la possibilità di decidere se il concetto è o non è applicabile. È necessaria dunque una definizione di simultaneità tale da offrire un metodo per decidere. Fino a quando questo requisito non viene soddisfatto, inganno me stesso come fisico (a dire la verità, anche come non fisico!) se credo che l'affermazione della simultaneità abbia un significato reale. (Finché non sei veramente d'accordo con questo, caro lettore, non procedere con la lettura).

« Dopo aver pensato un po', potreste fare la seguente proposta per provare se due scariche di un fulmine ramificato colpiscono simultaneamente due posti diversi. Ponete un apparato formato da due specchi a 90° fra di loro (), alla metà esatta tra i due effetti di luce; ponetevi poi di fronte ad essi e osservate se gli effetti di luce colpiscono gli specchi simultaneamente o no ».

La simultaneità in luoghi distanti qui riceve il suo significato dall'essere basata su una chiara simultaneità in un identico luogo.³

³ Questo comporta altri problemi che qui ignoreremo. Si rimanda il lettore al libro di EINSTEIN, *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, pagg. 15-16.

Tutti questi passaggi furono determinati non tanto dal chiarimento isolato di questo problema speciale, ma come parte del tentativo di capire la connessione interna che abbiamo citata sopra, il problema della misurazione della velocità della luce durante il movimento cruciale. Nella situazione dello specchio questo significa semplicemente: che cosa accade se, nel tempo in cui i raggi di luce si avvicinano agli specchi, io mi sposto con essi e mi allontano da una sorgente di luce avvicinandomi all'altra? Ovviamente, se i due eventi appaiono simultanei a un uomo fermo, allora non appaiono tali a me, che mi sposto con gli specchi. Il suo giudizio e il mio devono essere diversi. Vediamo quindi che nelle nostre affermazioni circa la simultaneità è essenziale il riferimento al movimento dell'osservatore. Se la simultaneità in luoghi diversi deve avere un significato effettivo, devo tener conto esplicitamente del problema del movimento, e paragonando i miei giudizi con quelli di un altro osservatore, devo tener conto del movimento relativo tra lui e me. Nel trattare la « simultaneità in luoghi differenti » devo riferirmi al movimento relativo dell'osservatore.

Ripeto: supponete che io viaggi con i miei specchi in un treno che procede in linea retta a velocità costante. Due scariche di un fulmine si abbattono in lontananza, una vicino alla locomotiva ed una verso la fine del treno, mentre io con il mio doppio specchio mi trovo giusto nel mezzo tra le due posizioni. Essendo un passeggero, uso il treno come schema di riferimento, pongo questi avvenimenti in relazione con il treno. Supponiamo che proprio nel momento critico in cui il fulmine cade, un uomo si trovi presso le rotaie, anche lui con un doppio specchio e che la sua posizione in quel momento coincida con la mia. Quali sarebbero le mie osservazioni e quali le sue?

« Se diciamo che i due fulmini sono simultanei rispetto alle rotaie, *questo ora significa*: i raggi di luce provenienti da due punti equidistanti si incontrano simultaneamente negli specchi dell'uomo sulle rotaie. Ma se la posizione dei miei specchi coincide con quella dei suoi nel momento in cui cade il fulmine, i raggi non si incontreranno con assoluta simultaneità nei miei specchi, a causa del mio movimento.

« Avvenimenti che sono simultanei rispetto alle rotaie, non lo sono rispetto al treno, e viceversa. Ciascuno schema di riferimento, ciascun sistema di coordinate quindi ha il suo tempo speciale; un'affermazione circa un tempo ha significato reale solo quando si cita

lo schema di riferimento a cui si collega il giudizio temporale».⁴

È sempre sembrato semplice e chiaro che un'affermazione circa la « differenza di tempo » tra due eventi è un « fatto », indipendente da altri fattori, quali il movimento del sistema. Ma, stando alla realtà dei fatti, la tesi che « la differenza di tempo tra due eventi è indipendente dal movimento del sistema » non è forse un assunto arbitrario? Non reggeva, come abbiamo visto, per la simultaneità in luoghi differenti, e quindi non può più essere sostenuta neanche per lo spazio di un secondo. Per misurare un intervallo di tempo dobbiamo usare un orologio o qualcosa di equivalente, ed osservare certe coincidenze all'inizio e alla fine dell'intervallo. Questo ripropone ancora, dunque, il problema della simultaneità: non possiamo ritenere dogmaticamente che il tempo impiegato da un determinato evento in relazione al movimento del treno è lo stesso di quello impiegato rispetto alle rotaie.

Questo vale anche per la misurazione delle distanze nello spazio. Se cerchiamo di misurare esattamente la lunghezza di un'automobile segnando sulla strada i suoi punti estremi, dobbiamo aver cura, dopo aver fatto il segno di un'estremità, che la macchina non si muova prima che si giunga dall'altra parte! Finché non prestiamo attenzione a questa possibilità, le nostre misurazioni saranno fallaci.

Devo dunque concludere che in tutte le misurazioni di questo tipo bisogna riferirsi al movimento del sistema, in quanto l'osservatore posto entro il sistema in movimento otterrà risultati diversi da quelli di un osservatore posto entro uno schema di riferimento diverso. « Ogni sistema ha i suoi valori particolari di spazio e di tempo. Un giudizio di spazio o di tempo ha senso soltanto se conosciamo il sistema in riferimento al quale il giudizio è stato fatto ». Dobbiamo cambiare la vecchia concezione: le misurazioni di intervalli di tempo e di distanze nello spazio *non* sono indipendenti dalle condizioni di movimento del sistema rispetto all'osservatore.

L'antica concezione era stata una « verità » tradizionalmente rispettata: Einstein, vedendo che era discutibile, giunse alla conclusione che le misurazioni di spazio e tempo dipendono dal movimento del sistema.

⁴ EINSTEIN, A., *op. cit.*, pagg. 31-32.

Atto VIII. Le invarianti e la trasformazione

Ciò che seguì fu determinato da due vettori che tendevano simultaneamente verso lo stesso problema.

1. Il sistema di riferimento può variare, può venir scelto arbitrariamente, ma per giungere a realtà fisiche, devo sbarazzarmi di tale arbitrarietà. Le leggi fondamentali devono essere indipendenti da coordinate scelte arbitrariamente. Se si vuole avere una descrizione degli eventi fisici, le leggi fondamentali della fisica devono rimanere invarianti rispetto a tali cambiamenti.

Qui diviene chiaro che si potrebbe ben chiamare la teoria della relatività di Einstein proprio con il nome opposto, chiamarla cioè una teoria assoluta.

2. Una visione approfondita dell'interdipendenza della misurazione del tempo e del movimento, in sé non è certo sufficiente; quello che occorre ora è una formula di trasformazione che risponda a questa domanda: « Come si trovano i valori di spazio e di tempo di un evento in relazione a un sistema in movimento, se si conoscono le posizioni e i tempi misurati in un altro sistema? O meglio, come si trova la trasformazione da un sistema all'altro quando i due sistemi si muovono uno rispetto all'altro? »

Quale sarebbe il metodo diretto? Per procedere in modo adeguato ai fatti, dovrei basare la trasformazione su una supposizione circa alcune realtà fisiche che potrebbero venir usate come invarianti.

Il lettore può ripensare ad un'antica situazione storica. I fisici nelle epoche passate cercarono di costruire un *perpetuum mobile*. Dopo molti tentativi non riusciti, sorse improvvisamente la domanda: quale sarebbe l'aspetto della fisica se la natura fosse fondamentalmente tale da rendere impossibile un *perpetuum mobile*? Questo comportò un cambiamento importante, che operò un ricentramento di tutto il campo.

In maniera analoga, in Einstein sorse il seguente problema, che fu ispirato dalle sue prime idee citate negli atti II e III: quale sarebbe l'aspetto della fisica se, per natura, la misurazione della velocità della luce dovesse sotto tutte le condizioni condurre all'identico valore? Ecco la invariante richiesta! (Tesi del fondamentale valore costante della velocità della luce).

Nei termini della trasformazione desiderata questo significa: « Una relazione tra lo spazio e il tempo di eventi in sistemi che si muovono in linea retta l'uno rispetto all'altro, può o non può venir

concepita in modo tale che la velocità della luce diventi una costante? »

Infine Einstein raggiunse la risposta: « Sì! » La risposta consisteva in formule di trasformazione concrete e definite per distanze nello spazio e nel tempo, che differivano in modo caratteristico dalle antiche formule di trasformazione di Galileo.

3. Nella discussione che ebbi con Einstein nel 1916 gli posi questa domanda: « Come arrivaste a scegliere come costante proprio la velocità della luce? Non si è trattato di un atto arbitrario? »

Naturalmente era chiaro che una considerazione importante era stata dettata, sul piano empirico, dagli esperimenti che mostravano l'assenza di variazioni nella velocità della luce. « Ma l'avete scelta arbitrariamente », chiesi, « solo per concordare con questi esperimenti e con la trasformazione di Lorentz? » La prima replica di Einstein fu che noi siamo assolutamente liberi nella scelta degli assiomi. « Non esiste la differenza che un momento fa avete considerato implicita, tra assiomi ragionevoli e assiomi arbitrari. L'unico valore degli assiomi è quello di fornire proposizioni fondamentali da cui si possono derivare conclusioni che si adattino ai fatti ». Questa è una formulazione che riveste un ruolo importante nell'attuale discussione teorica: riguardo ad essa sembrano d'accordo quasi tutti i teorici. Ma poi Einstein stesso sorridendo mi diede un esempio molto bello di un assioma irragionevole: « Si potrebbe naturalmente scegliere, ad esempio, la velocità del suono invece di quella della luce; tuttavia è ragionevole scegliere non la velocità di un processo "qualsiasi", ma quella di un processo "di rilievo"... ». Ad Einstein si erano presentati problemi come questi: La velocità della luce è forse la massima velocità possibile? È forse impossibile accelerare qualsiasi movimento oltre la velocità della luce? Di mano in mano che aumenta una velocità, sono necessarie forze progressivamente sempre più alte per farla salire ancora. La forza necessaria ad aumentare una velocità al di sopra di quella della luce è forse infinita?

Era meraviglioso sentire nelle descrizioni di Einstein il modo in cui questi audaci problemi e queste prospettive avessero preso forma in lui. Il fatto che la velocità della luce potesse essere la più alta velocità possibile, che il tentativo di oltrepassare tale limite richiedesse forze infinitamente grandi, era una novità, un concetto mai preso in considerazione prima.

Se queste supposizioni chiarivano il problema, e se avevano anche una conferma sperimentale, allora sarebbe stato sensato prendere la velocità della luce come la costante fondamentale. (Cfr. lo

zero assoluto della temperatura che viene raggiunto quando i movimenti molecolari in un gas ideale tendono a zero).

4. Le deduzioni che trasse Einstein partendo dalle sue formule di trasformazione mostrarono una coincidenza matematica con la trasformazione di Lorentz. L'ipotesi della contrazione era stata fatta dunque nella direzione giusta, solo che ora non si trattava più di un'ipotesi ausiliaria arbitraria, ma del risultato di un approfondimento migliore, di una derivazione logicamente necessaria da una visione perfezionata di entità fisiche fondamentali. La contrazione non era più un evento assoluto, ma il risultato della relatività delle misurazioni: non era determinata da un « movimento in sé » che per noi non possiede un senso vero, ma soltanto da un movimento in riferimento al sistema di osservazione scelto ».

Atto IX. Il movimento, lo spazio, un esperimento ideale

L'ultima affermazione getta una nuova luce sui cambiamenti nel modo di pensare che erano già presenti nei primi passaggi. « Per movimento di un corpo intendiamo sempre un suo cambiamento di posizione in relazione ad un secondo corpo », ad uno schema di riferimento, ad un sistema. Se vi è un corpo solo, non ha alcun senso chiedere o cercare di stabilire se sia in movimento o no. Se ve ne sono due, possiamo soltanto affermare che stanno avvicinandosi o allontanandosi uno dall'altro; ma, fino a che ce ne sono soltanto due, non ha alcun senso chiedere o cercare di stabilire se uno gira intorno all'altro; la cosa essenziale del movimento è il cambiamento di posizione rispetto ad un altro oggetto, schema o sistema.

Ma non esiste forse un unico sistema privilegiato, rispetto al quale vi è movimento *assoluto* di un corpo, lo spazio in sé (spazio di Newton, lo spazio dell'etere), la « scatola » in cui hanno luogo tutti i movimenti?

Qui potrei citare qualcosa che non accadde proprio a questo punto di sviluppo del processo, ma che può servire ad illustrare quello che succedeva veramente; qualcosa che trascende i problemi della teoria speciale della relatività: vi è qualche prova della realtà di un tale sistema privilegiato? Era stato usato come prova un famoso esperimento di Newton: quando una sfera d'olio ruota, si appiattisce. Questo è un fatto reale, fisico, osservabile, causato evidentemente da un movimento « assoluto ».

Ma questa è veramente una dimostrazione di un tale movimen-

to assoluto? Certamente sembra di sì; ma lo è effettivamente, se ci pensiamo su con attenzione? In realtà non abbiamo un corpo che si muove da solo nello spazio assoluto, ma un corpo che si muove in seno al nostro firmamento di stelle fisse. L'appiattimento della sfera è forse un risultato del suo movimento relativo alle stelle che la circondano? Che cosa accadrebbe se prendessimo un'immensa ruota d'acciaio, con un buchetto al centro, se in questo buco sospendessimo una piccola sfera d'olio e quindi mettessimo in rotazione la ruota? Forse la sfera si appiattirebbe di nuovo. In questo caso l'appiattimento non avrebbe nulla a che fare con la rotazione nella « scatola » dello spazio assoluto; sarebbe piuttosto determinata dai sistemi in movimento l'uno rispetto all'altro; la grande ruota o il firmamento da un lato e la sferetta d'olio dall'altro.

Naturalmente la rotazione già oltrepassa la regione della cosiddetta relatività speciale di Einstein; diviene fondamentale nel problema della teoria generale della relatività.

Atto X. Problemi sperimentali e di osservazione

Einstein era fondamentalmente un fisico, perciò tutte queste elaborazioni teoretiche tendevano a problemi reali, concreti, sperimentali. Non appena ebbe raggiunto una visione chiara, si concentrò su questo punto: « È possibile trovare problemi fisici fondamentali la cui risposta sia data da esperimenti capaci di decidere se queste nuove tesi sono " vere ", se si adattano meglio ai fatti, se danno migliori predizioni di eventi fisici rispetto a quelle vecchie? »

Egli trovò un buon numero di esperimenti cruciali di questo genere; alcuni di essi, più tardi, poterono essere eseguiti dai fisici.

II

In effetti il problema conduce più avanti: portò, nella mente di Einstein, ai problemi della teoria generale della relatività. Ma interrompiamo a questo punto la storia e chiediamoci: quali furono le caratteristiche decisive di questo pensiero?

Il fisico si interessa del rapporto tra la teoria di Einstein e i fatti provati, della verifica sperimentale, delle conseguenze in vista di ulteriori sviluppi, delle formule matematiche che derivano dalla teoria della relatività nelle varie parti della fisica.

Al teorico della conoscenza interessano le idee di spazio, tempo e materia, il carattere « relativistico » della teoria (con tutte le

conseguenze sbagliate tratte da altri in direzione del relativismo filosofico, sociologico o etico); il problema della « dimostrabilità » che occupava un ruolo così importante nella trattazione della simultaneità eseguito da Einstein (e più tardi negli sviluppi dell'operazionalismo).

Lo psicologo, al quale interessano i problemi del pensiero, vuole rendersi conto del processo psicologico nelle sue tappe successive.

Se dovessimo descrivere il processo nel modo della logica tradizionale, dovremmo formulare numerose operazioni, come il compiere astrazioni, fissare sillogismi, formulare assiomi e formule generali, stabilire se vi sono contraddizioni, trarre conclusioni dall'unione di assiomi, confrontare i fatti con queste conseguenze, e così via.

Un tale procedimento è certamente buono se si vuol provare la correttezza logica di ciascun passaggio; Einstein stesso provava un vivo interesse per la correttezza logica, per la validità logica.

Ma che cosa otteniamo se seguiamo un tale procedimento? Otteniamo un aggregato, una concatenazione di un gran numero di operazioni, di sillogismi, ecc. Questo aggregato rappresenta un quadro adeguato di quello che è successo? Quello che fanno molti logici, il modo in cui pensano, è un po' simile a questo: un uomo si trova di fronte ad un'opera architettonica, ad un bell'edificio, e per capirlo ferma la sua attenzione ai singoli mattoni e al modo in cui sono cementati dalla malta. Alla fine quello che gli resta non è l'edificio, ma il panorama dei mattoni e del modo in cui sono uniti.⁵

Per giungere al quadro reale, dobbiamo chiedere: come sorsero le operazioni, come entrarono nella situazione, quale fu la loro funzione in seno al processo effettivo? Vi caddero dentro per caso? Il processo fu una catena di accidenti fortunati? La soluzione fu la conseguenza di un procedimento per tentativi ed errori, o di supposizioni matematiche? Perché proprio queste operazioni? Senza dubbio in alcuni punti vi erano delle altre possibilità. Perché Einstein proseguiva proprio in quella direzione? Come avveniva che dopo aver compiuto un passaggio, egli continuava proprio con quell'altro passaggio?

Citerò un punto specifico: come sorsero i nuovi assiomi? Ein-

⁵ « Non sono sicuro », disse una volta Einstein a questo proposito, « che ci possa essere un modo di capire veramente il miracolo del pensiero. Certo voi avete ragione a cercare di ottenere una comprensione più profonda di ciò che avviene realmente in un processo di pensiero.... ».

stein cercò assiomi qualsiasi, alcuni dei quali risultarono poi per caso effettivamente validi? Formulò alcune proposizioni, le riunì, e osservò quello che accadeva, finché finalmente ebbe la fortuna di trovarne una serie appropriata? Tali proposizioni balzarono accidentalmente nel quadro, e i cambiamenti di ruolo, posizione e funzione degli elementi, la loro nuova interrelazione, apparirono semplicemente come conseguenze derivate?

La tecnica degli assiomi è uno strumento molto utile, è una delle tecniche più efficienti inventate fino ad ora nella logica e nella matematica: poche proposizioni generali forniscono tutto il necessario per derivare i dettagli. Si può trattare con una gigantesca massa di fatti, con un numero enorme di proposizioni, sostituendo ad esse poche espressioni che dal punto di vista formale sono corrispondenti a tutta quella conoscenza di fatti. Alcune grandi scoperte nel campo della matematica moderna sono state possibili soltanto per il fatto che era disponibile questa tecnica che permette una semplificazione estrema. Anche Einstein usò questo strumento nelle spiegazioni che egli diede della sua teoria della relatività.

Ma, per ripetere, il problema per lo psicologo è: questi assiomi vennero introdotti prima che si scorgessero le esigenze di struttura,⁶ che i cambiamenti strutturali della situazione fossero stati scorti? Non fu proprio il contrario? Certamente il pensiero di Einstein non mise insieme assiomi già fatti o formule matematiche: gli assiomi non furono l'inizio, ma il risultato di quello che stava accadendo. Prima che comparissero nel quadro come proposizioni formulate, la situazione riguardo alla velocità della luce e agli argomenti relativi era rimasta a lungo incerta dal punto di vista strutturale per lui, e per certi aspetti era divenuta inadeguata: si trovava in uno stato di transizione. Per quanto riguarda gli assiomi, si trattò soltanto di una formulazione successiva, dopo che aveva avuto luogo la cosa essenziale, la scoperta principale.⁷

⁶ Nella nostra discussione Einstein si preoccupò del contenuto materiale dei passaggi. Non usò i termini contenuti nelle frasi precedenti del testo: essi derivano dalla concezione strutturale esposta in questo libro.

⁷ A questo riguardo desidero riferire alcune osservazioni caratteristiche di Einstein stesso. Prima di scoprire che il punto cruciale, la soluzione, si trovava nel concetto di tempo (più particolarmente in quello di simultaneità), gli assiomi non ebbero nessun ruolo nel processo di pensiero: di questo Einstein è certo. (Proprio nel momento in cui vide la lacuna e si rese conto della pertinenza della simultaneità, riconobbe in ciò il punto cruciale per la soluzione). Ma anche in seguito, durante le cinque settimane finali, non furono gli assiomi a venire per primi. «Nessun uomo veramente produttivo pensa in un modo così libresco», disse Einstein.

Quando procediamo in un'analisi nel senso della logica tradizionale, dimentichiamo facilmente che, in effetti, tutte le operazioni erano parti di un quadro unitario e meravigliosamente coerente, che si erano sviluppate come parti secondo un'unica linea di pensiero; che erano sorte, funzionavano e avevano il loro significato in seno all'intero processo, nel momento in cui si affrontava la situazione, con la sua struttura, le sue necessità interne, le sue esigenze. Nel tentativo di afferrare la struttura di questa grande linea di pensiero, il lettore si può sentire smarrito di fronte al gran numero di eventi, all'ampiezza della situazione. Quali furono dunque i passaggi decisivi?

Facciamo una breve ricapitolazione.

Anzitutto vi fu quello che il lettore potrebbe chiamare il periodo di preparazione: prima, Einstein fu attratto dal problema della velocità della luce quando l'osservatore è in movimento. In secondo luogo, egli prese in considerazione le conseguenze da ciò derivate rispetto al problema della « quiete assoluta ». Terzo, egli cercò allora di rendere realizzabile una delle due alternative (la velocità della luce nelle equazioni di Maxwell è una variabile?) e ottenne un risultato negativo. Vi era, quarto, l'esperimento di Michelson che confermava l'altra alternativa e, quinto, l'ipotesi di Lorentz-Fitzgerald che non sembrava andare al fondo della difficoltà.

Fino a questo punto tutto, compreso il significato e il ruolo strutturale di tempo, spazio, misurazione, luce, ecc., veniva inteso nei termini della fisica tradizionale (struttura I).

« Il modo in cui i due triplici gruppi di assiomi sono posti in contrasto nel libro di Einstein-Infeld non è per nulla il modo in cui accadde le cose nel processo di pensiero effettivo: si tratta semplicemente di una formulazione successiva della materia, di una questione circa il modo migliore di scrivere le cose dopo che avevano avuto luogo. Gli assiomi esprimono le cose essenziali in forma condensata. Una volta scoperte tali cose si ha piacere a formularle a quel modo; ma in questo processo non sorsero di certo per una manipolazione di assiomi ».

Egli aggiunse: « Questi pensieri non venivano in una qualche formulazione verbale. Io penso assai di raro con parole: prima ho un pensiero, e solo in seguito posso cercare di esprimerlo a parole ». Quando osservai che molti affermano che il loro pensiero avviene sempre tramite parole, si limitò a mettersi a ridere. (Una volta dissi ad Einstein la mia impressione che la « direzione » è un fattore importante nei processi di pensiero). A questo proposito egli disse: « Questi fattori erano presenti in maniera molto decisa: durante tutti quegli anni ci fu la sensazione di una direzione, dell'andare direttamente verso qualcosa di concreto. Naturalmente è molto difficile esprimere a parole quella sensazione, ma decisamente le cose stavano così, ed erano tali da venir distinte chiaramente da considerazioni successive circa la forma razionale della soluzione. Naturalmente dietro a una tale direzione c'è sempre qualcosa di logico; ma in me è sempre presente sotto forma di una specie di sguardo generale; in un certo senso, in modo visivo ».

In questa situazione confusa sorse il problema: questa struttura, in cui il risultato di Michelson sembra contraddittorio, mi risulta in sé veramente chiara? Questo fu il momento rivoluzionario. Einstein sentì che la contraddizione doveva essere considerata senza pregiudizi, che la struttura teoretica tradizionalmente rispettata doveva venire posta nuovamente in questione. Questa struttura I era adeguata? Risultava chiara proprio per quanto riguardava il punto critico: il problema della luce in relazione alla questione del movimento? Era chiara nella situazione dell'esperimento di Michelson? Tutte queste domande erano poste in uno sforzo appassionato di comprendere. E quindi il procedimento divenne più specifico, un passaggio dopo l'altro.

Come si doveva misurare la velocità della luce in un sistema in movimento?

Come si doveva misurare il tempo in queste circostanze?

Che cosa significa simultaneità in un tale sistema?

Ma, poi, che cosa significa simultaneità se il termine viene riferito a luoghi diversi?

Il significato di simultaneità era chiaro se due eventi si presentavano nello stesso luogo, ma Einstein venne improvvisamente colpito dal fatto che esso *non* risultava altrettanto chiaro per avvenimenti in luoghi distanti. Qui vi era una lacuna per ogni vera comprensione. Egli vide che è un procedimento cieco applicare a questi altri casi il significato consueto di simultaneità. Se la « simultaneità » deve avere un vero significato, occorre sollevare la questione del suo riconoscimento di fatto, in modo da poter dire nei casi concreti se il termine è applicabile o meno. (Chiaramente, questo era un problema logico fondamentale).

Il significato di « simultaneità » in generale dovette essere basato sulla chiara simultaneità che c'è nel caso delle coincidenze spaziali, ma questo richiese che in ogni caso di localizzazione diversa di due avvenimenti dovesse venir tenuto presente il movimento relativo. Così il significato, il ruolo strutturale della simultaneità nella sua relazione con il movimento, subirono un cambiamento radicale.

Immediatamente sorse l'esigenza di corrispondenti modificazioni per la misurazione del tempo in generale, per il significato, ad esempio, di un secondo, e per la misurazione dello spazio, in quanto questi concetti ora si dovevano considerare dipendenti dal movimento relativo. Come risultato, i concetti del trascorrere del tempo,

dello spazio e della misurazione dello spazio e del tempo cambiarono radicalmente il loro significato.

A questo punto l'introduzione dell'osservatore e del suo sistema di coordinate sembrò immettere un fattore fondamentale arbitrario o soggettivo. « Ma la realtà », pensò Einstein, « non può essere così arbitraria e soggettiva ». Nel suo desiderio di eliminare questo elemento arbitrario e, nello stesso tempo, di ottenere una concreta formula di trasformazione tra i vari sistemi, si rese conto che era necessaria una costante di base, qualche fattore che rimanesse inalterato nella transizione da un sistema all'altro. Ovviamente, entrambe le esigenze procedevano nella stessa direzione.

Questo portò al passaggio decisivo: l'introduzione della velocità della luce come costante. Quale aspetto avrebbe la fisica se venisse centrata nuovamente su questa assunzione, considerata come punto di partenza? Conseguenze audaci si susseguirono una dopo l'altra e il risultato fu una nuova struttura della fisica.

Quando Einstein raggiunse la formula di trasformazione concreta in base a questa costante, la trasformazione di Lorentz apparve come una derivazione; ma ora veniva intesa in un modo più profondo, interamente nuovo, come una formulazione necessaria in seno alla nuova struttura della fisica. Anche il risultato di Michelson veniva ora visto sotto una luce completamente nuova, come cioè risultato necessario quando si prende in considerazione l'azione reciproca di tutte le misurazioni relative in seno al sistema in movimento. Non era problematico il risultato (ne aveva avuta la sensazione fin dall'inizio), ma il comportamento dei vari elementi della situazione prima di trovare la soluzione. Con la più profonda comprensione di questi elementi il risultato era necessario.

Il quadro era ora migliorato: Einstein poteva procedere al problema della verifica sperimentale.

Formulando tutto questo nel modo più breve, in un appassionato desiderio di chiarezza, Einstein affrontò direttamente la relazione tra la velocità della luce e il movimento di un sistema e mise a confronto la struttura teoretica della fisica classica con il risultato di Michelson.

Una regione parziale di questo campo divenne cruciale e fu sottoposta ad un esame radicale.

Nel corso della disamina si scoprì una grave lacuna (nella trattazione classica del tempo).

Si compresero i passaggi necessari per affrontare questa difficoltà.

Come risultato, il significato di tutti gli elementi presenti subì un cambiamento.

Con l'eliminazione di quest'ultima arbitrarietà della situazione, si formò una nuova struttura della fisica.

Si fecero progetti per sottoporre il nuovo sistema alla verifica sperimentale.

Nel processo erano presenti cambiamenti di struttura radicali, cambiamenti per quanto riguarda la separazione e le relazioni interne, i raggruppamenti, i centramenti, ecc.: da ciò un approfondimento, un cambiamento di significato degli elementi presenti, del loro ruolo strutturale, della loro posizione e funzione nella transizione dalla struttura I alla struttura II. Sarà opportuno spiegare ancora una volta in che senso l'impresa di Einstein significò un cambiamento di struttura.

1) Nella situazione di Michelson, e in generale nella fisica classica, il tempo veniva considerato come una variabile indipendente, e quindi come uno strumento indipendente nell'operazione della misurazione, per nulla dipendente dal punto di vista funzionale dai movimenti presenti nella situazione in osservazione, ma anzi interamente isolato da essi. Di conseguenza, la natura del tempo non era stata di nessun interesse in relazione al risultato apparentemente paradossale.

Nel pensiero di Einstein si formò un'intima relazione tra i valori del tempo e gli eventi fisici stessi. Così il ruolo del tempo in seno alla struttura della fisica venne fondamentalmente alterato.

Questo cambiamento radicale fu individuato chiaramente per la prima volta nella considerazione della simultaneità. In un certo senso, la simultaneità si divise in due: la simultaneità evidente di eventi in un dato luogo, e, in relazione ad essa (ma posta in relazione per mezzo di eventi fisici specifici), la simultaneità di eventi in luoghi diversi, specialmente nei casi in cui il sistema è in movimento.

2) Come conseguenza anche i valori spaziali mutarono il loro significato e ruolo nella struttura della fisica. Nella concezione tradizionale, anch'essi erano indipendenti dal tempo e dagli eventi fisici, completamente separati da essi. Ora venne stabilita fra essi un'intima relazione. Lo spazio non fu più recipiente di fatti fisici, vuoto e completamente indifferente. La geometria spaziale venne integrata con la dimensione del tempo in un sistema a quattro dimensioni,

che a sua volta formò una nuova struttura unitaria con gli eventi fisici reali.

3) La velocità della luce fino a questo momento era rimasta una velocità fra tante altre, e sebbene fosse la velocità più elevata conosciuta dai fisici, aveva lo stesso ruolo di altre velocità. Non era stata posta in una fondamentale relazione con il modo in cui vengono misurati tempo e spazio. Ora venne invece considerata in stretto legame con i valori di spazio e tempo: un fatto fondamentale per la fisica nel suo insieme. Il suo ruolo mutò da quello di un fatto particolare in mezzo a molti altri, a quello di punto centrale del sistema.

Si potrebbero citare molti altri elementi che nel processo cambiarono di significato, come la massa e l'energia, che ora risultarono strettamente legate. Ma non sarà necessario discutere ulteriori particolari.

Nel valutare queste trasformazioni non dobbiamo dimenticare che tutte ebbero luogo in vista di un gigantesco sistema dato. Ciascun passaggio dovette essere fatto contro una « gestalt » molto forte: la struttura tradizionale della fisica, che si adattava a un numero enorme di fatti, apparentemente così impeccabile, così chiara, che ogni cambiamento locale era destinato ad imbattersi nella resistenza della struttura complessiva forte e ben articolata. Questa fu probabilmente la ragione per cui ci volle tanto tempo, sette anni, perché egli compisse il passo decisivo.

Qualcuno potrebbe immaginare che alcuni dei cambiamenti necessari si presentassero per caso a Einstein, nel corso di un procedimento per tentativi ed errori.⁸ L'esame del pensiero di Einstein mostrò sempre che quando veniva compiuto un passaggio, questo accadeva in quanto era richiesto. In generale, chi conosce il pensiero di Einstein sa che ogni procedimento cieco e fortuito fu estraneo alla sua mente.

L'unico punto in cui avrebbe potuto esserci qualche dubbio a questo proposito fu l'introduzione della velocità della luce come costante nelle formule generali di trasformazione di Einstein. In un pensatore di statura minore questo avrebbe potuto avvenire attra-

⁸ Nell'Atto III, quando Einstein esaminò se una particolare alternativa avrebbe funzionato, tentò in effetti diversi procedimenti. Ma sebbene questi tentativi non portassero ad una soluzione, non furono assolutamente ciechi. In un tale stadio era del tutto ragionevole sperimentare queste possibilità.

verso una semplice generalizzazione per tentativi della formula di Lorentz. Ma in effetti il passaggio essenziale non venne raggiunto a questo modo; in esso non vi fu alcuna supposizione matematica.

In questi ultimi anni Einstein spesso mi parlò dei problemi a cui stava lavorando allora. Non ci fu mai un passaggio cieco: quando gli accadeva di abbandonare una direzione, lo faceva soltanto perché si rendeva conto che avrebbe introdotto fattori incomprensibili, arbitrari. Talvolta accadeva che Einstein si trovasse di fronte alla difficoltà che gli strumenti matematici non erano sufficientemente sviluppati da permettere una vera chiarificazione; ciò nonostante egli non perdeva di vista il suo problema e spesso riusciva finalmente a trovare un modo in cui le difficoltà apparentemente insuperabili potevano essere vinte.

CONCLUSIONE

Dinamica e logica del pensiero produttivo

Mi piacerebbe molto proseguire nel racconto di questo viaggio d'esplorazione, esponendo ulteriori esempi con le discussioni a cui essi diedero origine. Ma a questo punto devo fermarmi: penso che i pochi esempi già presentati possano essere sufficienti come prima introduzione. Nel modo concreto di trattarli il lettore avrà visto alcuni passi verso la chiarificazione, alcuni metodi per approfondire il problema, e le linee principali di una nuova concezione. Certi punti possono venire riassunti brevemente.

Primo: abbiamo trovato quali processi, a differenza di altri, si possono chiamare genuini, belli, nitidi, immediati, produttivi: migliori di quanto uno potrebbe aspettarsi. Sembra che non sia vero che l'uomo rifugge dal pensare in tal modo, o che non è in grado, generalmente, di farlo. Questo è un risultato che può venire profondamente apprezzato. Naturalmente vi sono spesso forti fattori esterni che si oppongono a quei processi: ad esempio le abitudini cieche, certi tipi di esercitazioni scolastiche, pregiudizi o particolari interessi.

Secondo: in questi processi abbiamo trovato in azione fattori e operazioni essenziali al pensiero di cui le concezioni tradizionali non si erano rese conto, o che avevano trascurato. La natura stessa di queste operazioni, per esempio del raggruppamento, della centrazione, della riorganizzazione, ecc., adeguate alla struttura della situazione (vedi Tavola III, pagg. 252-253), è estranea al vero centro d'interesse delle interpretazioni tradizionali, ed è lontana da quel tipo di operazioni che venivano prese in considerazione.

Terzo: le caratteristiche e le operazioni descritte hanno una natura particolare: non sono frammentarie, ma sempre in relazione ai caratteri d'insieme, funzionano in rapporto ad essi, e sono determinate dalle esigenze strutturali richieste da una situazione sensata.

Nel contesto gli elementi, i dati, le relazioni, eccetera, sorgono e funzionano come parti nella loro posizione e nel loro ruolo in seno al tutto, determinate dalle stesse esigenze dinamiche.

Quarto: mentre è vero che nel processo sono presenti operazioni prese in considerazione dalle interpretazioni tradizionali (vedi Tavole I, Ia, II, Introduzione, pagg. 12, 14-15), anch'esse funzionano in rapporto alle caratteristiche del tutto. Questo è essenziale per il modo in cui si inseriscono nel quadro.

Quinto: tali processi non hanno, nel loro insieme, l'aspetto di un aggregato sommativo, di una successione di eventi staccati, casuali, in cui gli elementi, le associazioni, le operazioni si limitano a presentarsi. La loro natura non è arbitraria. Nonostante le difficoltà, nonostante alcune deviazioni e sviluppi spesso drammatici, i processi di pensiero mostrano una coerenza di sviluppo.

Sesto: nel loro svilupparsi spesso portano a prospettive, a supposizioni sensate. Queste, come gli altri passaggi del procedimento, richiedono un atteggiamento onesto, una verifica: quando manca un atteggiamento sincero nei confronti della verità, vi è il pericolo del diletterismo, della plausibilità a buon mercato. Ma la situazione non richiede semplicemente un complesso di verità di fatto staccate, richiede una « verità strutturale ».¹

Sono le caratteristiche dei punti dal 2 al 6 ad offrire la concreta possibilità di processi produttivi, genuini, sensibili. (Per altri tipi di processi vedi pagg. 259 segg.).

Tavola III

Il pensiero consiste:

nel vedere, nel rendersi conto delle caratteristiche strutturali e delle esigenze della struttura; nel procedere in accordo con queste esigenze e nel farsi guidare da esse; nel cambiare quindi la situazione nella direzione di miglioramenti strutturali. Questo comporta

- che delle lacune, delle zone di difficoltà, perturbazioni, superficialità, ecc., vengano viste e trattate strutturalmente;
- che le relazioni strutturali interne, adattate o meno, vengano cercate in mezzo a tali disordini e nella situazione nel suo insieme e tra le sue varie parti;
- che vi siano operazioni strutturali di raggruppamento e segregazione, di centramento, ecc.;

¹ WERTHEIMER, M., « On truth », *Social Research*, 1934, vol. 1, pagg. 135-146.

- che le operazioni vengano viste e trattate nella loro posizione strutturale, nel loro ruolo, nel loro significato dinamico, compresa l'accettazione dei cambiamenti che questo comporta;

nel comprendere la trasponibilità strutturale, la gerarchia di struttura, e nel separare le caratteristiche strutturalmente periferiche da quelle fondamentali (questo è un caso speciale di raggruppamento);

nel cercare una verità di struttura piuttosto che una frammentaria.

In termini umani, diremo che vi è, al fondo, il desiderio, la brama di affrontare il problema vero, il centro della struttura, la radice della situazione; di progredire da una relazione non chiara, inadeguata, a un confronto chiaro, trasparente, immediato: direttamente dal cuore di chi pensa al centro del suo oggetto, del suo problema. Tutti questi elementi valgono anche per le situazioni reali e per l'azione, così come per i processi di pensiero. E i processi di pensiero di questo tipo comprendono essi stessi situazioni reali.

Qui di nuovo ho usato termini come « vedere », « cercare », « localizzare », ecc., e penso che siano appropriati ed in effetti necessari; ma molte caratteristiche della tavola possono venire espresse, se lo si desidera, in termini oggettivi o di comportamento, come è stato indicato nei capitoli precedenti; ad esempio, sostituendo termini come: « risposte », « azioni determinate da caratteristiche di struttura della situazione », ecc.

In effetti questi termini sono difficili: sono carichi, penso, di problemi produttivi di ricerca. In essi sono presenti tre gruppi di problemi che devono essere localizzati e studiati:

1) Le caratteristiche, le leggi, le regole che dirigono le operazioni (finora tralasciate o appena toccate) di segregazione, di raggruppamento, di centramento e di trasponibilità strutturale.

2) I problemi circa le relazioni tra le parti e il tutto, ecc., che comportano operazioni sulla posizione, il ruolo, la funzione di una parte in seno al tutto.²

3) I problemi concernenti gli « insiemi notevoli », le buone forme, le relazioni ρ .

La teoria della forma ha iniziato lo studio scientifico di questi problemi per scoprire una chiarificazione teoretica e una formula-

² Gli studiosi di logica matematica hanno contribuito a questi problemi in un modo neutro al 3.

zione delle leggi presenti nelle situazioni, ed ha cercato di sviluppare strumenti scientifici appropriati per trattarle in molte ricerche sperimentali. Senza una vera conoscenza di questo materiale, i termini della tavola non si comprendono facilmente, anzi è facile che vengano fraintesi. Qui sarà sufficiente che il lettore consideri gli elementi come frecce che puntano verso i problemi concreti discussi nei vari capitoli.

* *

Esaminiamo ora direttamente la situazione teoretica. La teoria dell'associazione (Concezione II), e sotto molti aspetti la logica tradizionale (Concezione I), nelle loro operazioni concrete, nel modo in cui affrontano e centrano il quadro, mostrano le seguenti caratteristiche.

Per giungere allo scopo di ottenere gli elementi del pensiero, fanno a pezzi i vivi processi di pensiero, li trattano rimanendo ciechi alla struttura, presupponendo che il processo sia un aggregato, una somma di elementi. Nel trattare processi di questo tipo non possono far altro che sezionarli, e così ci danno un quadro morto, spogliato di tutto quello che in essi c'è di vivo. Passaggi e operazioni entrano nel quadro dall'esterno, attraverso a ricordi, a qualche esperienza precedente di carattere generale o analogico, ad associazioni unite a qualche elemento della situazione (o anche alla somma di tutti), o anche al puro caso. Gli elementi, i rapporti usati sono ciechi o indifferenti alla domande circa la loro funzione strutturale specifica nel processo. Di tale genere sono le associazioni classiche tra un a e un qualche b , le connessioni cieche tra mezzi e scopo; tale è il modo in cui la logica tradizionale tratta proposizioni della forma « tutti gli S sono P », oppure « dato A , avremo B ». Le connessioni, gli elementi, i dati, le operazioni sono ciechi o indifferenti rispetto alla struttura, chiusi rispetto alla loro funzione dinamica strutturale nell'insieme e ciechi alle esigenze della struttura in cui sono inseriti.

Tutto questo rende impossibile afferrare direttamente processi produttivi del tipo descritto.

Dinamicamente, quindi: per la comprensione teoretica è dato poco più che la spinta, il desiderio di raggiungere la soluzione di un problema, oltre a qualche avvenimento casuale, al ricordo inteso in termini di associazione, alla supposizione che ciò che è accaduto, o ciò che è vero in molti o in « tutti » i casi, accadrà anche nel caso

in esame. Naturalmente vi è, in più, nella logica tradizionale, la volontà di giungere alla verità e alla conoscenza sistematica.

La situazione negli esempi A, dati nei primi capitoli di questo libro (vedi cap. I), chiaramente richiedeva una teoria del pensiero che andasse direttamente alla natura strutturale di quei processi. Richiedeva un accostamento teorico tale da far entrare nel quadro ciò che accade in tale processo, in base a vettori determinati dalla dinamica strutturale della situazione.

Generalmente parlando, vi è dapprima una situazione

S_1 , la situazione in cui il processo di pensiero effettivo ha inizio, e quindi, dopo un certo numero di passaggi,

S_2 , in cui il processo finisce ed il problema è risolto.

Consideriamo la natura delle situazioni 1 e 2 mettendole a confronto, e prendiamo quindi in esame cosa avviene tra di loro, come e perché. È chiaro che il processo è una transizione, un cambiamento da S_1 a S_2 . S_1 paragonato a S_2 è strutturalmente incompleto, presenta una lacuna o una difficoltà di struttura, mentre S_2 sotto questo aspetto è strutturalmente migliore, la lacuna è stata riempita adeguatamente, la difficoltà strutturale è scomparsa: è ragionevolmente completo, a differenza di S_1 .

Quando il problema è compreso, S_1 contiene tensioni strutturali che vengono eliminate in S_2 . La tesi è che il carattere stesso dei passaggi, delle operazioni, dei cambiamenti tra S_1 e S_2 deriva dalla natura dei vettori prodotti in queste difficoltà di struttura per aiutare la situazione, appianarla strutturalmente. Questo è in netto contrasto con i processi in cui alcuni passaggi, alcune operazioni che vengono da fonti diverse e vanno in diverse direzioni, possono condurre alla soluzione in un modo fortuito, a zig-zag.

È interessante il confronto con la situazione psicologica nei casi in cui, dopo che il problema viene dato e visto ed il soggetto non sa come procedere, qualcuno arriva con la soluzione bella e pronta. Può darsi che il soggetto la capisca o no, che si renda conto o no che quella è la soluzione; in ogni caso non era stata raggiunta da lui, non era scaturita dalla comprensione dei passaggi che sono richiesti dalla struttura. Spesso gli provoca uno shock, che talvolta è sgradevole. Per comprendere veramente bisogna ricreare i passaggi, la relazione strutturale interna, il carattere di necessità dei passaggi stessi.

Ripeto: la tesi è che proprio le caratteristiche di struttura in

S_1 , con la loro natura particolare, concreta, creano i vettori, con la loro direzione, qualità, intensità; vettori che a loro volta portano ai passaggi e alle operazioni dinamicamente corrispondenti alle esigenze. Questo sviluppo è determinato dal cosiddetto principio della pregnanza,³ dalle tendenze alla buona forma e dalle varie leggi della forma.

Quei casi particolari appaiono qui come l'archetipo più semplice, in cui S_1 è una situazione strutturalmente elementare, senza alcun segreto nella sua struttura, ma con una lacuna o una perturbazione di struttura e in cui il cambiamento in S_2 viene fatto semplicemente mettendo a posto le cose. In tali casi le esigenze strutturali e i mezzi per soddisfarle vengono compresi facilmente, e spesso si ottiene da quasi tutti i soggetti una risposta naturale, facile e decisa. È caratteristico il fatto che spesso questi processi abbiano luogo anche quando non si pone alcuna domanda, non si dà alcun compito: il problema stesso sorge nella struttura del materiale dato.

In altri casi in cui la situazione iniziale non viene afferrata per il fatto che risulta troppo complessa, troppo sconcertante, o perché compare in una struttura semplice ma rozza, superficiale, è anzi tutto necessaria una transizione. La situazione deve venire compresa nel suo insieme di modo che il problema venga afferrato nel ruolo strutturale che ha, come parte della situazione data: spesso questa trasformazione addirittura esplode, rivoluziona la primitiva visione di S_1 .

Eccovi, formulato brevemente, il nocciolo della tesi: ragioni strutturali divengono cause del processo. Nella storia del pensiero, vi è stata una lunga discussione sulle relazioni tra « ragioni » e « cause », sulla base del principio di ragion sufficiente. Vi erano motivi per sostenere che le due cose sono fondamentalmente diverse per natura. Senza dubbio lo sono se vengono intese nei termini della Concezione I. Ma qui la tesi è che, rispetto alle ragioni strutturali, nei processi intelligenti le due cose coincidono.

In altri termini: quando qualcuno afferra un problema, le caratteristiche di struttura e le necessità interne di questo determinano nel pensatore particolari squilibri, tensioni, attriti. Nel pensare vero e produttivo queste tensioni vengono portate a fondo, danno luogo a vettori nella direzione di un miglioramento della situazione, e la

³ Nota dei curatori. Il principio della pregnanza, formulato per la prima volta da Wertheimer in riferimento alla percezione, afferma che l'organizzazione del campo tende ad essere semplice e chiara quanto lo permettono le condizioni date.

cambiano in conformità. S_2 è uno stato di cose tenuto assieme da forze interne, come una buona struttura in cui vi è armonia tra le mutue esigenze e in cui le parti sono determinate dalla struttura del tutto, mentre l'insieme è determinato da quella delle parti.

Il processo non comporta soltanto le parti date e le loro trasformazioni. Opera in unione con il materiale strutturalmente di rilievo, ma selezionato dall'esperienza precedente, da conoscenze e orientamenti anteriori.

In tutto questo vengono nettamente preferiti quei movimenti, quei passaggi che cambiano lo stato di cose in S_1 lungo una linea strutturalmente coerente, in S_2 .

Se la natura del processo è fondamentalmente questa (cioè se i passaggi vengono determinati strutturalmente) allora sorgono vari problemi, ad esempio quello del perché tante volte il processo non avanzi più direttamente, perché vi siano degli stati in cui non si compie alcun progresso, perché lo sviluppo possa arrivare ad un punto fermo e spesso rimanga bloccato per qualche tempo e come abbiano origine deviazioni ed errori. Ho citato alcune delle ragioni. Potrei ripetere che una prima visione inadeguata della situazione spesso impedirà al soggetto di afferrare la vera struttura della lacuna, e la natura delle condizioni necessarie che lo metterebbero in grado di colmarla adeguatamente. Spesso al soggetto manca un'ampiezza di vedute, ed anche se la possiede all'inizio, la può perdere durante il processo se si preoccupa dei dettagli o cade in un atteggiamento di osservazione frammentaria. In queste circostanze la chiusura può avere la tendenza ad avvenire in regioni che sono troppo limitate. D'altro lato, naturalmente, può darsi che la visione del soggetto sia troppo estesa.

Spesso la possibilità di una rapida conclusione è seducente. Quando in una situazione si comprendono diversi problemi parziali, per l'intrusione di queste visioni parziali può andar perduta la visione dell'insieme. Spesso il desiderio impaziente di trovare la soluzione fa sì che l'occhio si fissi troppo esclusivamente, troppo fortemente, come un animale affamato separato dal suo cibo dalle sbarre, sul risultato vicino perdendo la possibilità di osservare liberamente la situazione, e diviene incapace di vedere che una semplice deviazione lo porterebbe alla mèta.

E non dobbiamo dimenticare che, sebbene il processo $S_1 \dots S_2$ sia spesso un insieme relativamente chiuso, è chiaro soltanto relativamente. Rappresenta un campo parziale, proprio come S_1 e S_2 sono

ciascuno soltanto parti del campo, e così è dell'intero processo. Si tratta di un campo parziale in seno al processo generale della conoscenza e dell'approfondimento, in seno al contesto di un ampio sviluppo storico, in seno alla situazione sociale, ed anche in seno alla vita personale del soggetto. È un campo parziale non completamente separato per quanto riguarda il materiale presente nel campo, o per quanto riguarda la quantità o le fonti di energia: condizioni, forze, fattori del campo più vasto, favorevoli od ostili, hanno la loro importanza. Così dobbiamo tenere conto fino a che punto il campo parziale è separato, e fino a che punto è in relazione dinamica con le altre parti del campo più vasto. Ma rispetto a questo campo più vasto, la dinamica strutturale descritta sopra per il campo parziale sembra sempre il problema vero. Come conseguenza si spalanca una vasta regione nuova per le ricerche e per la comprensione di fatti del pensiero in termini di dinamica strutturale interna.

A questo punto potrei citare un punto particolare. Le forze della situazione possono essere di due tipi. In molti casi è la natura strutturale della situazione oggettiva a determinare essenzialmente i vettori e i passaggi, mentre l'io, l'ego, con i suoi interessi e le sue tendenze personali, ha soltanto un ruolo minore o del tutto nullo. Se nel quadro entrano tendenze concrete dell'ego, spesso sono di disturbo (cfr. Capitolo VII, sez. II). Vi sono altri casi in cui la fonte del problema è costituita da necessità personali e in essi l'io ha un ruolo importante; ma, ancora (cfr. Capitolo VII, sez. I), per risolvere veramente il problema, spesso occorre all'inizio una trasformazione; può darsi che il problema rimanga insoluto fino a che uno rimane fissato sul proprio desiderio o necessità; potrà divenire risolvibile soltanto se, vedendo il proprio desiderio come parte della situazione, verranno comprese le esigenze oggettive della struttura. In tali casi si può raggiungere per via logica la soluzione, la propria mèta, oppure ci si può rendere conto che la mèta dell'io era essa stessa cieca e doveva venire cambiata in modo produttivo, o altrimenti abbandonata del tutto. Così, anche per la relazione tra il problema e l'ego, le caratteristiche di struttura rimangono d'importanza decisiva.⁴

Fin qui ho limitato la discussione al caso di $S_1 \dots S_2$ come viene caratterizzato sopra: la situazione del problema ed i passaggi che

⁴ Vedere LEVY, E., « Some aspects of the schizophrenic formal disturbance of thought », *Psychiatry*, 1943, vol. VI, pagg. 59-69.

portano alla sua soluzione. Ho tuttavia avvertito che spesso il processo non ha inizio con S_1 e non termina con S_2 , ma in

$$\dots S_1 \dots S_2 \dots,$$

S_1 fa già parte di uno sviluppo; e inoltre, S_2 , la soluzione stessa, non rappresenta un termine, ma per sua natura porta a ulteriori conseguenze dinamiche. (Vedi Capitolo IV, sez. V; Capitolo VIII.)

Vi sono altri tipi. Vi è il tipo

$$S_1 \dots$$

in cui la situazione in S_1 non presenta principalmente un problema per quanto riguarda un S_2 , una mèta concreta. Piuttosto, il vero risultato consiste nel rendersi conto che la situazione non è in buon ordine come pareva, ma deve venir migliorata. In queste circostanze il processo è spesso una transizione da una somma di parti o da una visione di struttura superficiale, a una visione più adeguata. Come conseguenza, il primo risultato consisterebbe nel comprendere che c'è un problema: riuscire a vedere, a porre il problema giusto è spesso un risultato di gran lunga più importante che risolvere il compito affidato.

D'altra parte, vi sono processi in cui S_1 ha un ruolo modesto o nullo. Il processo ha inizio, come avviene in alcuni processi creativi di artisti e musicisti, dalla visione di alcune caratteristiche di un S_2 che deve venir creato. L'artista è portato verso la sua cristallizzazione, concretizzazione o piena comprensione. È caratteristico che le qualità d'insieme della cosa che deve venir creata, concepite più o meno chiaramente, sono determinati nel processo. Un compositore di solito non mette assieme delle note per ottenere una melodia qualsiasi: egli individua il carattere di una melodia in *statu nascendi* e procede dall'alto nel tentativo di concretizzarla in tutte le sue parti.⁵ Per alcuni compositori non si tratta di un processo facile: spesso impegna molto tempo. Quando le idee circa la mèta sono un po' vaghe, colloidali, vi possono essere due direzioni che operano simultaneamente: una che lavora a chiarire maggiormente l'idea centrale, l'altra a giungere alle parti. Di solito in tali casi è immediatamente chiaro quello che va bene e quello che non va bene. Mentre ciò che avviene in casi del tipo $S_1 \dots S_2$ è determinato strutturalmente dalla natura di S_1 , oppure di S_1 in relazione con S_2 , in

⁵ Lo stesso avviene per un matematico che consideri l'idea di una formula o di un'equazione.

questo caso è determinato dalle caratteristiche strutturali dell' S_2 considerato, sebbene S_2 sia ancora incompleto e vago. Questa cambia un po' la natura dinamica dello schema fornito sopra, ma nei procedimenti ragionevoli, i vettori vengono ancora una volta determinati dalla natura delle condizioni strutturali interne.

Spesso nel processo sono presenti due direzioni l'una in relazione all'altra, una che procede da alcune parti al tutto, e l'altra che va dalle qualità d'insieme alle parti. Questo è generalmente il caso in cui in un processo logico si raggiunge una buona forma: essa non viene imposta alle parti trascurando intenzionalmente la loro natura, ma risponde anche alle loro esigenze.

La teoria dinamica tracciata in queste pagine non è semplice, non intende offrire cose indeterminate soltanto per il desiderio di sussumere, di catalogare, essa comporta molti problemi di ricerca: problemi meravigliosi, penso. Ma io non credo che la sua base sia estranea a ciò che suggerisce il buon senso naturale.

Spero che il lettore non fraintenderà il significato filosofico di questa concezione. Quando qui viene dato un quadro della dinamica strutturale interna che determina i processi, non vuol dire che in questo sviluppo l'uomo sia semplicemente passivo. Da parte sua occorrono un atteggiamento, una volontà di affrontare direttamente i problemi, una risoluzione ad approfondirli con coraggio e sincerità, un desiderio di migliorare la propria comprensione, in contrasto con atteggiamenti arbitrari, ostinati o servili. Questo, penso, è uno dei grandi attributi che costituiscono la dignità dell'uomo.

Di importanza centrale nella teoria è il passaggio da un aggregato frammentario, da una struttura superficiale, a una struttura oggettivamente migliore o adeguata. I criteri per la verità di una concezione dal punto di vista strutturale sono più difficili da stabilire rispetto a quelli della verità particolare. In questo libro mi sono limitato a mostrare, in casi relativamente elementari, che si possono prendere decisioni esatte circa la struttura appropriata, vera; e questo contro il negativismo scettico, relativistico.

Talvolta la situazione è strutturalmente ambigua, come nelle figure ambigue della percezione, nel caso in cui le linee possono appartenere a una superficie o ad un'altra, così che esiste più di una possibilità di strutturazione. Lo stesso avviene in molti casi in cui nessuna struttura particolare è fino ad ora quella giusta, perché la nostra conoscenza dei fatti è troppo incompleta o perché dati e fatti

importanti per la decisione non sono disponibili oppure non sono stati stabiliti con sufficiente chiarezza. Diverse condizioni, forze, fattori, possono determinare una struttura per il soggetto: fattori che spesso comprendono inerzia di abitudini, atteggiamenti particolaristici o l'azione dello stesso principio della gravidanza in direzione di una chiusura prematura: in tali casi il soggetto cade vittima di una seducente semplificazione.

Tutto questo non esaurisce il problema della strutturazione appropriata. Il desiderio di non essere ciechi alla struttura, di ottenere un vero orientamento strutturale, sembra forte e spesso si rivela perfino nello svolgimento e nella direzione che hanno gli errori. Per molte persone il vivere senza riuscire a vederci chiaro, in una molteplicità indefinita di fattori e di forze che impediscono una chiara decisione per l'azione, per i tratti essenziali della situazione, rappresenta uno stato di cose insopportabile. Vi è una tendenza verso la chiarezza della struttura, verso la definitezza, verso la verità, in opposizione a concezioni banali: vi è il desiderio di non ingannare se stessi. Se questo desiderio di raggiungere sinceramente la vera struttura è debole, allora prevale la semplificazione della struttura in una direzione desiderata. Il caso estremo è quello di un sistema paranoide, in cui i dati vengono travisati e i fatti reali violati. Strutture mal centrate, con superficialità, sono spesso dinamicamente precarie: sebbene il progresso possa essere lento in quanto le forze della struttura fanno sì che il soggetto trascuri o eviti di proposito problemi cruciali, e razionalizzi il suo errore, vi sono casi evidenti in cui un elemento o un argomento mettono in pericolo una concezione strutturale superficiale e la demoliscono in nuovi procedimenti drammaticamente fecondi.

Tali problemi rivestono un ruolo enorme nel campo personale, sociale e politico. Spesso nella discussione politica, nelle concezioni politiche ci si rende conto della forza d'urto del principio della gravidanza nella tendenza quasi irresistibile, nel vivo desiderio di giungere a una semplice, decisiva strutturazione del campo; di ottenere un orientamento ben definito, di agire ragionevolmente, di non essere chiusi, di non agire a casaccio. Si aspira ardentemente a un orientamento vero.

Nella discussione politica spesso accade che i problemi su cui non si è d'accordo sono non tanto i fatti stessi, quanto piuttosto il ruolo strutturale che ricoprono, la funzione che hanno nel contesto, con tutte le loro caratteristiche di « poiché », « ma », « tuttavia »,

« sebbene », e così via. Gli uomini sono scontenti se la complicazione di tali caratteristiche confonde il problema: essi desiderano una visione strutturalmente chiara in cui gli elementi trovino il loro posto preciso, la funzione e il ruolo adatti, senza turbare le linee principali e la direzione che ne risulta verso la concezione e l'azione. Questo li può portare fuori strada. Ma spesso si vede, anche, come questa tendenza alla semplicità di struttura sia unita profondamente al desiderio di raggiungere la struttura vera. Esperienze ed esperimenti dimostrano questo con efficacia e chiarezza, a dispetto delle forze che cercano di mantenere in piedi una concezione strutturale che già esiste.

In diversi esperimenti che io ho condotto su questi problemi vi sono stati risultati sorprendenti in questo senso. Il dott. S. E. Asch è anch'egli ora al lavoro su di un ampio studio di questi problemi, che erano stati tanto trascurati degli psicologi sociali, in quanto essi si fissavano quasi esclusivamente sullo studio di forze arbitrarie. Spero che il dottor Asch pubblichi presto i suoi risultati.^{5a}

Qui vi sono compiti importanti per la democrazia. Non sono sufficienti gli atteggiamenti critici, lo scetticismo: vi è bisogno di chiarezza strutturale. Si spera che i metodi produttivi verranno migliorati, non semplicemente per raccogliere informazioni su fatti staccati, ma anche per ottenere una limpida visione in profondità delle grandi linee, delle strutture fondamentali di situazioni cruciali.

Ora, oltre a processi del tipo discusso nei capitoli di questo libro (tipo α), ve ne sono molti altri che contengono, in grado maggiore o minore, caratteristiche di un'altra natura (tipo β). Anche in processi del tipo descritto possono entrare dall'esterno, per caso, per analogia esteriore, per semplice richiamo alla mente, oppure come risultato di tentativi ciechi, alcuni degli elementi oppure alcune operazioni necessarie per il progresso. Inoltre, al limite di ciò che si conosce, nella scienza in via di sviluppo, vi sono troppe situazioni la cui natura richiede prima di tutto un accurato esame dei fatti, una comprensione delle relazioni di fatto, ecc., poiché troppo poco è tuttora conosciuto, troppo poco viene compreso. Ma sono momenti meravigliosi quelli in cui, dopo un lungo periodo di studi o di sperimentazione diligente, accurata, si apre una via verso la comprensione della struttura; oppure quelli in cui un esperimento

^{5a} Alcuni di questi risultati sono ora disponibili nelle pubblicazioni di psicologia. — M. W.

porta a risultati che non si adattano o perfino contraddicono una data concezione della struttura, e il processo quindi avanza sotto questa sfida.

Gli estremi dall'altra parte (γ) sono i casi in cui il risultato, la soluzione, vengono determinati da una semplice scoperta a caso o soltanto da una successione di tentativi alla cieca, da un puro richiamo alla mente, da una fiducia assoluta nella ripetizione meccanica, dall'esercizio o da spinte esterne. Vi sono molte situazioni la cui natura non permette altro che procedimenti ciechi e scoperte chiuse, come ad esempio negli esperimenti, di cui si fa ampio uso, con labirinti, o compiti di discriminazione. Qui tutti i fattori che potrebbero fornire qualche traccia per un comportamento guidato dalla ragione vengono accuratamente esclusi da chi effettua l'esperimento. In queste condizioni nessun genio, per quanto grande, potrebbe dapprima far altro che dedicarsi a tentativi ciechi; il successo potrebbe aver luogo solo per caso, ed essere in seguito ripetuto; a meno che nel frattempo l'apparato arbitrario non venga mutato arbitrariamente dallo sperimentatore.

Ripetendo: le differenze tra gli estremi α e γ non riguardano soltanto i procedimenti intellettuali, ma comportano anche profonde differenze nell'atteggiamento umano.

* *

Molti teorici cercano di centrare l'intero quadro del pensiero attorno alla caratterizzazione di tipo β , e così tralasciano le caratteristiche strutturali che anche i processi β contengono.

Nella psicologia moderna c'è una forte tendenza a considerare il pensiero fondamentalmente in termini di fattori, di operazioni e di atteggiamenti del tipo γ , a non vedere le possibilità di tipo α , e a cercare con tutti i mezzi d'interpretare i tipi α e β come null'altro che complicazioni di fattori caratteristici di tipo γ . Lo studio di tali fattori è senza dubbio necessario, ma non si dovrebbe generalizzare con troppa facilità e superficialità. Anche nei casi in cui è possibile costruire un meccanismo cieco, frazionante, per la « spiegazione » di un processo, è necessario che lo scienziato sia cauto, per non ottenere, al posto di un quadro vero, un quadro povero e solo superficialmente adeguato. Sotto questo aspetto bisognerebbe anche essere particolarmente attenti a causa delle gravi implicazioni che questo atteggiamento comporta per i problemi dell'insegnamento e dell'educazione, della vita.

La situazione è simile a quella della psicologia dell'apprendimento.⁶ Il tipo γ corrisponde all'apprendimento attraverso la ripetizione meccanica, attraverso associazioni esterne, il condizionamento dall'esterno, o attraverso la memoria, attraverso processi ciechi per tentativi ed errori.⁷ Il tipo α si fissa sullo sviluppo dell'approfondimento strutturale, della padronanza della struttura e dell'apprendimento sensato nel vero significato della parola. È diffusa l'opinione preconcepita che l'apprendimento sensato, l'apprendimento di materiale sensato, in fondo non è altro che una complicazione di ciò che si trova nell'apprendimento meccanico di sillabe disposte in serie, ecc., come se quest'ultimo desse le leggi dell'apprendimento. Non sembra possibile che le caratteristiche dei processi α siano riducibili a fattori e operazioni di questo genere. Anche se qualcuno dovesse concepire una tale speranza, essa non si basa su di un vero studio scientifico, ma, spesso, ha semplicemente il ruolo di un dogma.

Esponendo questo nel modo più breve: se chiamiamo i processi di pensiero e di apprendimento di tipo α « sensibili alla struttura », e chiamiamo le caratteristiche di tipo γ « cieche alla struttura », la situazione in questa concezione tradizionale è:



FIG. 160

In altre parole, γ viene considerato fondamentale, α « certamente risulterà null'altro che una complicazione di fattori γ ».

Il procedimento scientificamente più accurato è quello di studiare dapprima il carattere distintivo di ciascun tipo di processo. Solo in



FIG. 161

base a tali studi sarà possibile decidere se i due tipi sono per natura completamente diversi o se si deve considerare α come una com-

⁶ Vedere la mia introduzione al libro di KATONA, G., *Organizing and memorizing* (New York, Columbia University Press, 1940).

⁷ Nota dei curatori. Per associazione « esterna » il professor Wertheimer intendeva connessioni di memoria che si ritiene si siano formate indipendentemente dal contenuto degli elementi presenti. Al termine condizionamento « esterno » si deve dare lo stesso significato.

plicazione dei fattori essenziali in γ , oppure se α è il centro teorico appropriato e γ un caso speciale.

Attualmente sembra che quest'ultima sia l'alternativa teoricamente più appropriata: γ appare semplicemente un caso speciale in cui l'interdipendenza di struttura caratteristica del tipo α tende a zero, un limite che nei casi di apprendimento vero, di vero pensiero, non si raggiunge mai.

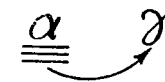


FIG. 162

Poniamo tutto questo in relazione con la distinzione tra le diverse concezioni, di cui ci siamo occupati prima. Se diamo un'occhiata alla Tavola III (la teoria della forma) e la paragoniamo alle concezioni della logica tradizionale (sia induttiva che deduttiva), e della teoria dell'associazione (vedi Tavole I, Ia e II, Cap. I, pagg. 12, 14-15), vediamo che abbiamo davanti due vie aperte. O consideriamo la caratterizzazione strutturale della III come un'aggiunta che complica la I e la II, oppure decidiamo quale possa essere un atteggiamento teorico appropriato soltanto dopo aver effettivamente studiato i principi funzionali di queste concezioni, con le loro mutue relazioni. Senza dubbio, ciascun elemento in I e II è importante, ma forse queste stesse operazioni rappresentano semplicemente casi speciali. Gli elementi in II, e fino a un certo punto anche in I, erano intesi e usati tradizionalmente come indifferenti o ciechi alle caratteristiche e alle esigenze delle strutture. Esaminandoli troviamo che ciascun elemento in I e II è in sé ambiguo, che ciascuno può venire inteso in un modo sensibile alla struttura o cieco. La loro forma e la loro capacità operativa cieca alla struttura sembrano essere un caso limite della III, che è adeguato soltanto quando la coerenza e l'interdipendenza della struttura si avvicinano a zero.

Questo non significa che le regioni che possiedono l'aspetto I e II e che quindi mancano delle caratteristiche di struttura per quanto riguarda il contenuto e le connessioni, siano *del tutto* prive di fattori strutturali. Anche se le connessioni sono puramente fattuali, costanti dal punto di vista dei fatti solamente e non comprensibili, la *gerarchia* di tali connessioni offre ancora la possibilità di procedere in modo sensibile o cieco alla struttura.

Tentiamo ora di puntualizzare brevemente l'ambiguità dei termini e delle operazioni delle Tavole I, Ia e II.

I TERMINI DELLA LOGICA DEDUTTIVA TRADIZIONALE: Tavola I (*Introduzione*, pag. 12).

Confronto e distinzione possono voler dire (ed è questo il significato comunemente loro attribuito) che due o più oggetti vengono confrontati rispetto a qualsiasi caratteristica da essi posseduta, senza tener presente la struttura data. Da questo punto di vista importa soltanto stabilire se vi sono o non vi sono eguaglianze o differenze e quali esse siano. Ma eguaglianza può voler dire identità nelle parti, il che può portare fuori strada anche quando essa è costante e generale, oppure, in contrasto con questo, vi può essere un'uguaglianza di struttura che si può ottenere anche quando i dati parziali non mostrano assolutamente nessuna eguaglianza.

Analisi può voler dire che un campo o un oggetto viene diviso in una somma di parti staccate, chiuse alla struttura; oppure può stare a indicare una divisione strutturalmente adeguata, e una visione delle parti nella loro natura parziale.

Astrazione e generalizzazione possono rappresentare un modo di agire che si fissa sui pezzi, che sia cieco alla struttura e che porti alla forma analitica

$$m + x$$

Qui m rappresenta i fatti comuni a diverse situazioni, e x le altre caratteristiche per cui queste situazioni si diversificano (cfr. pag. 269). Ora l'esistenza del fattore comune può indicare niente di più che la coincidenza di determinati pezzi e qualità, espressa senza alcun riguardo al loro ruolo nella struttura data. Il procedimento può comportare perfino divisioni e separazioni che violino tale struttura. D'altra parte per astrazione e generalizzazione si possono intendere anche operazioni che seguono le esigenze delle strutture date. Lo stesso avviene con i concetti di *classe*: il raggruppare in classi e sotto-classi può venir fatto in modo tale da mettere assieme oggetti e classi che sono strutturalmente estranei l'uno all'altro, e quindi fondamentalmente diversi, e separare nettamente oggetti che sono strutturalmente simili o perfino strutturalmente identici (vedi pagg. 271-272). Viceversa i concetti di classe potrebbero riferirsi precisamente a quei fattori strutturali comuni che il primo procedimento ignora.

Proposizioni, come al esempio « tutti gli S sono P », possono

esprimere una connessione oggettiva e rigida, ma cieca, una coesistenza effettiva di fatti che strutturalmente non appartengono per nulla l'uno all'altro; oppure, di nuovo possono essere affermazioni strutturalmente ragionevoli. Un insieme di predicati attribuiti a un soggetto può significare una somma di dati senza struttura, oppure si può riferire a dati che concordano, l'uno con l'altro e può così mettere in luce la struttura stessa di S .

Lo stesso avviene per *inferenze, sillogismi*, ecc. Essi possono venire intesi e usati in termini di relazioni puramente formali, dove hanno un ruolo essenziale le quantificazioni vuote come « tutti », « qualcuno », « nessuno », oppure possono balzar fuori da esigenze di struttura.⁸

I TERMINI DELLA LOGICA INDUTTIVA TRADIZIONALE: Tavola Ia (*Introduzione*, pag. 14).

Induzione può indicare una generalizzazione in base a coincidenze frammentarie, esteriori, avvenute in un certo numero di casi; oppure può voler dire un'ipotesi strutturalmente razionale.

Esperienza può significare una raccolta a casaccio di fatti e di semplici connessioni fattuali. Oppure può voler dire afferrare vigorosamente le caratteristiche della struttura, raggiungere un orientamento, intendere dati e connessioni nel loro ruolo e nella funzione che hanno nel contesto.

Sperimentazione può voler dire che s'introducono a caso fattori frazionanti di qualsiasi tipo, e che i risultati vengono compresi uno a uno, senza badare al loro significato strutturale. Questo è spesso necessario come primo passo, ma c'è bisogno di qualcosa di più, altrimenti alla fine non ci sarà altro che una semplice somma di fatti che, strutturalmente, non sono in relazione. All'altro estremo si trova la sperimentazione sensibile alla struttura, che spesso ha la forma di una domanda cruciale posta alla natura, di un tentativo di decidere tra varie ipotesi ragionevolmente possibili nel contesto strutturale della conoscenza.

« Una variabile è funzione di un'altra variabile. » Questo può voler dire, secondo la formulazione, in sé coerente, di alcuni teorici,

⁸ Vedere il saggio sui sillogismi nel pensiero produttivo, in cui sillogismi vuoti ma esatti venivano messi in contrasto con sillogismi sensati. WERTHEIMER, M., « Über Schlussprozesse im produktiven Denken », *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie* (Erlangen, Philosophische Akademie, 1925), pagg. 161-184; anche ELLIS, W. D., *op. cit.*, selezione 23.

che elementi di due serie qualsiasi di fatti sono in correlazione e che viene data una regola in termini di cambiamenti posti in correlazione, senza tener conto del senso strutturale dell'accoppiamento. Con questo concetto di funzione non si tiene in considerazione il modo in cui l'accoppiamento e la regola sono in relazione con la natura degli elementi e con le caratteristiche strutturali dell'intera serie. All'estremo opposto si può studiare quale significato possono avere cambiamenti in una parte rispetto alla struttura del tutto; si possono quindi scoprire le leggi interne che governano la natura degli elementi in seno al tutto, il modo in cui i loro cambiamenti dipendono da questa relazione della parte con il tutto.

I TERMINI DELLA TEORIA DELL'ASSOCIAZIONE: Tavola II (*Introduzione*, pa. 15).

Associazione può voler dire concatenazione di elementi in un aggregato sommativo di connessioni, che per natura non possiede alcuna struttura, come nella consueta teoria dell'apprendimento meccanico di sillabe. Oppure, all'estremo opposto, può significare la comprensione di un'appartenenza strutturale in cui gli elementi sono necessari l'uno all'altro in quanto parti di un contesto — inclusi gli effetti di questa comprensione.

Ripetizione può significare che la stessa connessione cieca, staccata dal contesto, ha luogo più e più volte; oppure può significare il passaggio da un accoppiamento non compreso e puramente addittivo, alla comprensione di una struttura in cui gli elementi assumono il significato di parti di un insieme caratteristico.

Procedimento per prove ed errori può voler indicare una successione casuale di procedimenti ciechi con un ordine irregolare nella direzione; oppure, ancora, può significare che qualche ipotesi sensata viene provata strutturalmente. Nel secondo caso, l'insuccesso stesso può spiegare la situazione e suggerire un'altra ipotesi che si adatti meglio alla struttura data.

Apprendimento in base al successo può indicare che un'azione viene scelta fra le altre solo a causa del successo che segue ad essa, unicamente di fatto, senza che se ne comprenda il perché; oppure può significare che, nell'apprendimento, un soggetto afferra le ragioni strutturali intrinseche del fatto che questo tipo di azione porti proprio a quell'effetto. È la seconda forma di « apprendimento in base al successo » che mette in grado il soggetto di variare la sua

azione in modo strutturalmente ragionevole quando la situazione non risulta più la stessa.

La differenza essenziale tra le due interpretazioni di tutti questi concetti può venire forse illustrata nel modo migliore se ritorniamo ancora una volta alla logica e, in primo luogo, al concetto di classe, che riveste un'importanza così fondamentale nella forma tradizionale di questa disciplina. Se non teniamo conto delle molte complicazioni, se ci concentriamo solo sul significato concreto delle operazioni implicate e su quello che è veramente necessario per la correttezza secondo la logica tradizionale, riscontriamo i seguenti punti.

Vi sono diversi oggetti. (Il modo in cui sono segregati, e perché proprio a quel modo; come un oggetto si costituisca separatamente dagli altri oggetti, è un problema tralasciato dalla logica tradizionale, viene dato per scontato senza un vero esame). Li metto a confronto: nelle loro qualità e nelle loro parti trovo somiglianze e differenze. Astraendo dalle differenze e concentrandomi sulle qualità comuni o sulle parti degli oggetti, ottengo un concetto generale. Il contenuto è dato da queste parti comuni, e questa è l'« *intensio* ». L'« *extensio* » è la molteplicità di oggetti abbracciati dal concetto di classe.

Se chiamiamo l'elemento comune m e gli altri x , un'espressione esatta per la classe (o per qualsiasi oggetto inteso sotto il concetto di classe) è

$$m + x.$$

Tra m e x vi è un « più ». m ⁹ è ciò che vi è di comune nel contenuto degli oggetti; x è quello che vi è oltre a m e può variare nel contenuto dei diversi oggetti. Il dato pensato, m , è indipendente dalla sua posizione a sinistra e a destra, ed evidentemente deve essere così per l'uso esatto del concetto nell'inferenza, nel sillogismo, ecc. Non vi è nessun riferimento al ruolo che vi potrebbe essere ancora nell'oggetto, nessun riferimento al ruolo che ha m in questo oggetto, nessun riferimento al suo significato come parte tra le parti della stessa entità, né alla struttura di questa entità. Questa astrazione è sottrattiva, non fa altro che isolare m . Per m non ha alcuna importanza quale sia x . L' x è arbitrario in via di principio; in altre parole non viene sollevata alcuna questione circa quello che può essere la x e il significato che può avere per m . Il carattere rigidamente costante di m e l'indipendenza della sua natura da quella di x , si suppongono fondamentalmente necessari per l'appropriata

⁹ Lo stesso m può essere un aggregato sommativo di parecchi elementi comuni.

esecuzione delle classificazioni, delle sussunzioni, delle proposizioni universali, delle inferenze, dei sillogismi, ecc., come li concepisce la logica tradizionale.

In molti casi un tale procedimento è adeguato e utile, come negli esempi classici frequentemente usati nella logica tradizionale. Considerate la proposizione « Tutte le cassette per lettere nello stato di... sono verdi »: essa è pienamente adeguata in tutti i casi in cui m e x siano appena accostati, addittivi, semplicemente posti assieme senza nessuna relazione interna che li renda reciprocamente dipendenti: in tutti i casi in cui il significato di m sia invariabile riguardo a cambiamenti di x , o viceversa.

Nel corso dei secoli sono sorte difficoltà circa la proprietà del procedimento in certi casi (cfr. la famosa discussione della sistematica delle piante di Linneo all'Accademia di Francia). Il problema era se un tale procedimento, per quanto esatto, non combinasse con facilità oggetti che sono fondamentalmente diversi per natura e, d'altro canto, non separasse nettamente oggetti che di fatto si appartengono reciprocamente. Il logico cerca aiuto nel termine « essenziale ». È sempre stata data importanza a questo punto, ma benché per il buon senso il significato di « essenziale » spesso risulti sufficientemente chiaro, sfortunatamente nella logica è stato ed è rimasto un termine assai controverso. È servito a designare un problema piuttosto che a risolverlo e di conseguenza è stato di nuovo respinto, escluso, nei più recenti sviluppi della logica. Un modo per chiarire il suo meraviglioso significato si apre quando ci occupiamo delle caratteristiche di struttura. Ve ne darò un esempio estremo tratto dalla musica. Eccovi quattro soggetti:



FIG. 163

Procediamo alla classificazione: ci rendiamo conto che, rispetto all'altezza, gli oggetti A e B cominciano con le stesse due note, e così pure gli oggetti C e D . Un bibliotecario potrebbe formare una prima classe di melodie che cominciano con le prime due note di A e B , e una seconda classe che comincia con le prime due note di C e D . Questo gli potrebbe servire (sebbene io ne dubiti) per portare un qualche ordine esatto nell'indice della sua collezione. In termini di logica tradizionale il suo procedimento è esatto, ma che cosa avrebbe fatto con questo procedimento? Avrebbe unito le prime due melodie, che sono diverse per natura anche rispetto alle prime due note. E lo stesso per la seconda classe. Avrebbe separato nettamente, in classi diverse, melodie che sono identiche e sono soltanto in chiave diversa, in quanto C è una trasposizione di A e di B .

Sul pianoforte le prime due note della sua classificazione sono le stesse in A e B , C e D rispettivamente, ma non sono le stesse per qualcuno che senta le melodie. Per costui le due note che la classificazione, con il suo procedimento atomistico, considera identiche sono in effetti molto diverse rispetto al ruolo che hanno nella melodia, e sono diverse anche come parti di essa. Se qualcuno scrivesse queste note « identiche » con gli stessi simboli, come ho fatto nella figura 163, il musicista sarebbe esasperato, lo chiamerebbe un controsenso, un'illogicità. La seconda nota in A è la tonica, la seconda nota « identica » in B è lungi dall'essere una tonica, è la sensibile: la nota che richiede la tonica, che porta alla tonica che in questo caso è la terza nota. La prima nota, in A , nell'armonia è una terza maggiore, in B una terza minore. Perfino la relazione tra le due prime note, considerate isolatamente come la stessa, è diversa: in A è una terza, in B una quarta diminuita. In connessione con la loro dinamica, la loro stabilità è diversa: ciò si vede perfino nell'intonazione quando vengono cantate: in B la seconda nota viene spesso presa su di un tono più alto, in quanto tende verso il tono seguente. Il loro carattere espressivo è anch'esso diverso. Così, queste prime due note di A e B , che erano considerate uguali in quel concetto quasi di classe, sono diverse per natura; mentre, d'altro canto, le prime due note di A e di C sotto tutti questi aspetti, cioè dal punto di vista strutturale, sono identiche; e così pure B e D . La classificazione AB/CD è cieca alla struttura: è insensata, perché non considera le melodie nel loro insieme, ma taglia le prime due note dal loro contesto, come se si trattasse di pezzettini indipendenti.

Esaminate il contrasto: la formazione di classi che siano chiuse

alla struttura dà il raggruppamento AB/CD , mentre la formazione secondo la struttura dà il raggruppamento AC/BD .

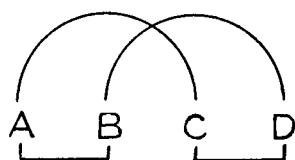


FIG. 164

Qui abbiamo preso in considerazione soltanto una rigida trasposizione; ma in variazioni musicali che non siano prive di senso anche le due note di inizio di una melodia possono venir cambiate, fino ad un certo punto, senza alcun danno reale alla melodia nella sua struttura. D'altra parte una singola nota, una volta cambiata, può risultare fuori posto, può violare la struttura. Quando si percepisce una tale melodia ci si rende conto che vi è qualcosa di sbagliato, di fuori posto, che non si inserisce. Le melodie che vengono violate in tal modo, e in generale gli aggregati di note privi di senso, psicologicamente non si trasportano come avviene per le buone melodie. Quando è violata la struttura, si trovano difficoltà. Se si tenta di ricordare aggregati di toni senza senso, se si tenta di ripeterli dopo qualche tempo, si trova che in effetti sono molto più difficili da ripetere e ad essi possono accadere diverse cose. Sembra che vi sia una forte tendenza a cambiare, a migliorare in qualche modo questo materiale, nella direzione di una struttura sensata. Così, lungi dall'essere una questione di eguaglianze parziali, il vero problema non è nemmeno ristretto a questioni di posizione, di ruolo e di funzione in qualche insieme, ma è in rapporto con il fatto di soddisfare o no certe necessità strutturali date.

Ho scelto l'esempio di melodie, poiché nella comprensione musicale i problemi vengono sentiti con grande vivezza. Naturalmente una formulazione esatta delle qualità d'insieme, delle esigenze strutturali, qui non è facile: si tratta di quello che alcuni grandi musicisti hanno chiamato la logica interna delle melodie, ed è uno dei grandi problemi di estetica. Tuttavia molto di quanto ho cercato di dimostrare in questi esempi ha un'importanza generale; vale spesso per materiali diversi, quando la formulazione esatta sotto questi aspetti non presenta alcuna difficoltà. Gli stessi problemi possono, per esempio, venire studiati in gruppi, di quattro oggetti disposti

in figura, nella struttura di eventi all'interno di sistemi fisici, in reti di relazione astratte, e in gruppi di caratteristiche umane. Si spalanca un campo vasto, molto più vasto del problema della classificazione, quando prendiamo in considerazione i problemi della trasponibilità e cerchiamo i principi dell'invarianza strutturale.

Rispetto al problema della classificazione, il punto principale si riduce all'antico proverbio,

si duo faciunt idem, non est idem,

se due individui fanno la stessa cosa, non è lo stesso. In termini esatti: due elementi o due gruppi di elementi che sono identici da un punto di vista atomistico (cfr. sopra AB/CD), possono avere un significato molto diverso dal punto di vista strutturale; può darsi infatti che siano diversi per natura. Un'aggiunta necessaria è la proposizione opposta: se, da un punto di vista atomistico, due elementi compiono funzioni molto diverse (cfr. sopra AC/BD), le loro azioni possono essere, ciò nonostante, strutturalmente identiche. Per fare la stessa cosa in una situazione cambiata, bisogna farla in modo diverso. In termini esatti: elementi diversi possono essere strutturalmente gli stessi.

Considerazioni analoghe valgono per gli elementi che di solito sono ritenuti fondamentali nella logica: per gli « e », i « non », i « se - allora », il concetto di relazione, d'identità, di verità, ecc. Citerò brevemente alcuni punti. Tradizionalmente essi erano tutti considerati e usati senza che si vedessero bene i problemi strutturali. Tutti, nel loro significato tradizionale, sembrano semplicemente casi limite del problema più vasto. Questo vale anche per i principi tradizionali del pensiero: il principio d'identità, di contraddizione e il principio di ragion sufficiente.

Nell'esatta logica tradizionale « e » può unire due cose o due proposizioni qualsiasi, qualunque sia il significato che possono avere una rispetto all'altra, senza tener conto del fatto che appartengano o non appartengano strutturalmente l'una all'altra. « E » significa quindi che una cosa è, o è vera, come l'altra. Uso un esempio caratteristico tratto dal classico trattato di D. Hilbert e W. Ackermann.¹⁰ Si può illustrare il significato del tradizionale « e » con una frase del tipo « Due è minore di tre e la neve è bianca ». Qui vediamo che il contenuto di entrambe le proposizioni, prese assieme,

¹⁰ *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, J. Springer, 1928), pag. 3.

non è null'altro che la loro semplice somma: il contenuto effettivo di una non ha alcun significato per il contenuto effettivo dell'altra; l'argomento di cui trattano non ha alcuna relazione strutturale interna. Nell'unione ciascuna è tale quale sarebbe se l'altra non ci fosse o se venisse cambiata. Questo esempio potrà colpire il lettore, ma dà l'esatto significato di « e » in una logica cieca nei confronti della struttura. In effetti questo « e » vuoto è semplicemente un caso estremo: nel pensiero concreto « e » per lo più non ha questo carattere. Vi è l'« e » che mette assieme due cose che non dovrebbero essere insieme, che si fanno violenza a vicenda. Esiste poi l'« e » che unisce due cose che appartengono l'una all'altra, che strutturalmente sono necessarie l'una all'altra. Entrambi questi casi sono diversi dall'« e » cieco alla struttura, indifferente. Il vero « e » ha spesso un carattere molto serio per il fatto che comporta conseguenze dinamiche a cui l'uso dell'« e » vuoto è cieco. Anche nella logica formale dovremmo fare una distinzione tra i vari tipi di « e », poiché l'uso generale di un « e » vuoto può ingannare il lettore rispetto a quello che si fa in effetti nel mettere le cose assieme.

Nella moderna logistica l'« e » è stato definito da un complesso di valori di verità rispetto a due proposizioni. Elegante in sé, il procedimento esprime in modo sorprendente una profonda cecità rispetto alla struttura per quanto riguarda l'« e » e il significato delle due proposizioni. È adeguato per i casi in cui le due proposizioni riguardano argomenti che non hanno nulla a che fare l'uno con l'altro, rispetto ai quali « e » in effetti non vuol dire nient'altro all'infuori del fatto che ciascuna è vera indipendentemente dall'altra. Ma vi sono casi in cui la combinazione di due argomenti non ha carattere puramente sommativo. Se allora noi prendiamo in considerazione prima ciascuna proposizione da sola, separatamente, e in seguito comprendiamo che cosa avviene quando sono poste in relazione dall'« e » vero, troveremo che questo provoca spesso seri cambiamenti nel loro significato. Fino ad un certo punto questo si può già mostrare con grande esattezza rispetto a proposizioni appartenenti a semplici reti di relazione, quando i cambiamenti hanno luogo nei termini delle cosiddette definizioni implicite del logico, e di conseguenza rispetto alle stesse tavole dei valori di verità. La forma di queste tavole nel caso puramente sommativo appare semplicemente come un caso limite del quadro molto più ricco e profondo che otteniamo prendendo in considerazione caratteristiche di struttura.

Riassumendo: il vero « e » comporta vere relazioni; comporta l'esistenza d'insiemi specifici e della loro dinamica.

È un problema serio (caratteristico della cecità di fronte alla struttura e alle funzioni della logica tradizionale) il fatto che termini come « ma », « ciò nonostante », « tuttavia » erano del tutto trascurati nel sistema logico.

Considerazioni simili valgono per il significato di una « relazione » come per quello di « e ». Vi sono casi in cui

$$|a| \quad |R| \quad |b|$$

costituiscono una semplice somma in cui nessuno dei tre elementi ha un vero significato per gli altri. Una relazione R con un b viene fissata per un a , senza che ne derivi alcuna conseguenza né per a né per b . Secondariamente, vi sono casi in cui due cose o due elementi vengono posti reciprocamente in una relazione vera e propria, ma tale che per entrambi risulta strutturalmente inadeguata, che viola le esigenze di entrambi, e tuttavia essi la devono subire. Questa è la forma di relazione da cui risulta spesso una violenta dinamica strutturale. In terzo luogo, tuttavia, vi sono casi in cui nella relazione presente gli elementi si completano reciprocamente in una buona struttura, si adattano l'uno all'altro e formano un buon insieme.

Finalmente vi sono i casi in cui gli elementi si determinano scambievolmente per una necessità interna, in modo chiaro e limpido; i casi in cui a e b determinano c , oppure richiedono la loro R , in cui a e R esigono il loro b adeguato, e R e b esigono l' a adeguato.

Proprio come nei casi di « e » e di « relazione », troviamo che anche il concetto di negazione può venir inteso in un senso vuoto, chiuso alla struttura. Ma, di nuovo, si tratta di un caso limitato della negazione, applicabile soltanto in casi speciali. D'altra parte, negare qualcosa può voler dire che le cose non stanno precisamente così e la negazione è proprio quello che viene richiesto dalla natura strutturale della situazione. Ma vi è anche un altro « non » che esprime la mancanza di qualcosa che sarebbe in effetti strutturalmente necessario alla situazione. Entrambi sono in contrasto con il caso della negazione vuota, che non ha assolutamente alcun significato strutturale. Il caso della negazione che esprime una mancanza strutturale è di fatto la *negatio privativa* della logica classica, ma è d'importanza essenziale che si comprenda chiaramente la sua natura strutturale. Tra la negazione vuota e le altre forme di « non » è compresa una molteplicità di altre forme.

Distinzioni analoghe valgono per la forma « *se-allora* » che è altrettanto fondamentale nella logica. Un estremo è rappresentato dall'espressione, indifferente alle esigenze della struttura, puramente formale, « se due è minore di tre, allora la neve è bianca ».¹¹ Per scopi formali è importante studiare anche questo tipo assolutamente vuoto: qualche volta nella vita reale abbiamo a che fare con connessioni arbitrarie di questo tipo, talvolta anche nelle fasi iniziali di processi produttivi. Ma nel pensiero sensibile « *se-allora* » è raramente di questo tipo vuoto, o per lo meno non resta quasi mai tale: il buon senso ha ragione di sentirsi colpito da esempi come quello appena dato. « *Se-allora* » nella maggior parte dei casi comporta qualche giustificazione strutturale, non significa semplicemente una connessione di argomenti che non sono posti strutturalmente in relazione. Il « *se-allora* » sensato richiede una coerenza interna di qualche tipo, una relazione strutturale intrinseca. Così il tipo vuoto appare semplicemente come un caso estremo in cui scompare ogni relazione strutturale e rimane solo una forma esterna, che è indifferente ai problemi implicati in « *se* » e in « *allora* ».

Oppure considerate il principio d'identità. Il caso di un'identità completa è banale e, nel pensiero effettivo, non si realizza quasi mai. Il problema vero si riferisce alla scoperta dell'« *identità* » nonostante alcune differenze apparenti, e qui diviene un compito fondamentale il distinguere tra identità delle parti (che ignora la struttura) e identità di struttura. È stato possibile studiare queste differenze in esperimenti psicologici. La ricerca, che si riferiva ad argomenti concreti, portò alla chiara conseguenza che l'identità delle parti è semplicemente un caso speciale, appropriato soltanto quando lo permettono le condizioni strutturali.¹²

Lo stesso vale per il concetto di *verità*. Lo studio del problema della verità diede origine allo schema di una logica a quattro valori, con i termini: vero o falso, che si possono considerare in senso atomistico oppure in senso strutturale.¹³ Qui nuovamente il procedimento cieco alla struttura porta al caso speciale della logica aristotelica con solo due valori.

¹¹ Questo esempio non è una mia invenzione: è stato usato per la caratterizzazione positiva (HILBERT, D. e ACKERMANN, W., *op. cit.*, pag. 4).

¹² TERNUS, J., « Experimentelle Untersuchungen über phänomenale Identität », *Psychologische Forschung*, 1926, vol. 7, pagg. 81-136.

¹³ WERTHEIMER, M., « On truth », *Social Research*, 1934, vol. 1, pagg. 135-146.

* *

Tutti questi argomenti rivestono un ruolo importante nel pensiero produttivo. Ma in relazione a questo dovrebbero venir presi in considerazione come parti del grande problema della *dinamica* del pensiero. Mentre la logica tradizionale si fissa sui problemi della validità, sulle caratteristiche statiche, la dottrina della logica generale deve trattare con le caratteristiche logiche e le regole degli eventi dinamici, e queste, a loro volta, presentano anch'esse una struttura.

Per esempio, la nostra affermazione che l'identità si deve spesso intendere in senso strutturale non è completamente sufficiente. La logica tradizionale considera come regola d'importanza fondamentale il fatto che gli elementi del discorso (i concetti, le proposizioni e così via) devono rimanere rigidamente identici quando sono ripetuti. Per quanto importante in certe questioni di validità, questa regola non si adatta in generale al pensiero concreto. Nei processi di pensiero veri gli elementi spesso non rimangono rigidamente identici, ed anzi è necessario proprio il loro cambiamento, il loro miglioramento. Se un elemento, un concetto o una proposizione si ripresenta nel processo e, da un punto di vista atomistico, appare identico, molto spesso in realtà non è così: il suo significato funzionale e strutturale in effetti (e fortunatamente) è cambiato. La cecità verso un tale cambiamento di significato spesso impedisce i processi produttivi. Nel vero pensiero il significato *funzionale* di un elemento, di una proposizione, quel significato che muta man mano che il pensiero avanza, è di grandissima importanza: senza di esso il pensiero diventa sterile; senza la comprensione di quel cambiamento non si afferra la linea di sviluppo di un corso di pensiero, in quanto le affermazioni hanno una *direzione* del loro contesto. È a questo punto che viene alla ribalta una delle caratteristiche fondamentali della logica tradizionale: la sua indifferenza verso quel vivo senso di « *direzione* » che è presente nei concreti processi di pensiero quando essi tendono a migliorare una situazione data.

APPENDICE 1

*Sul problema della distinzione tra componente arbitraria e parte necessaria **

La distinzione tra componente arbitraria (Einzelinhalt) e parte necessaria (Teil) è diventata importante sotto molti aspetti; è stata trattata in molti lavori di psicologia negli ultimi decenni, e molto materiale aspetta ancora una formulazione esatta; c'è bisogno di una dimostrazione fatta con semplici esempi antitetici. Qui sono stati scelti alcuni esempi in cui parecchie caratteristiche possono essere dimostrate e studiate facilmente.

1. Tracciate sulla lavagna i gruppi di punti I (*a bcd e*) e fateli vedere simultaneamente.

• • • • •

Dopo un breve periodo cancellate i punti *c* ed *e* (II).

• • •

I punti che rimangono c'erano già prima, ma che aspetto diverso hanno ora! ¹ Esaminiamo alcuni aspetti di questa situazione.

Quello che il punto *d* era a destra, in I, il punto *b* lo era a

* Questa appendice appare per la prima volta in questa edizione: si tratta della traduzione di Michael Wertheimer (su permesso dell'editore del *Zeitschrift für Psychologie*, Kurt Gottschaldt) di « Zu dem Problem der Unterscheidung von Einzelinhalt und Teil », *Zeitschrift für Psychologie*, 1933, vol. 129, pagg. 353-357. Questa traduzione è stata inclusa in questo volume in quanto lo scritto viene spesso citato nel testo, poichè presenta esempi di come quello che in un insieme può essere una componente arbitraria, in un altro può essere una parte strutturale, intrinseca. Anche per gli esempi inclusi è sembrato uno scritto da rendere consultabile anche in inglese. — M. W.

¹ Una tale ristrutturazione è tipica quando si osservano buone condizioni di visione, quando le distanze tra i punti non sono troppo grandi e non viene usato alcun procedimento speciale che porti alla disintegrazione. Lo stesso vale per gli esempi successivi.

sinistra; in II, b è il « centro »; a è ora a sinistra quello che d è a destra.

Nel linguaggio delle reti di relazione, in cui ciascun elemento arbitrario viene definito implicitamente dalla sua posizione sulla rete: b^I e d^I (se non si tiene conto della distinzione destra-sinistra) avevano lo stesso significato implicito, erano « omotipici ». Ma b^{II} è un singolo punto centrale (come c^I prima); d^{II} non è omotipico con b^{II} , ma con a^{II} . Se indico « omotipico » con « $\sim$ », e « non omotipico » con « $\approx$ », in I $b \sim d$; $d \approx a$; in II $b \approx d$; $d \sim a$.

Nell'esaminare le relazioni implicite nel confronto, non si possono scrivere correttamente nemmeno le stesse lettere per i punti in I e II (bisogna fare distinzione tra b^I e b^{II} , ecc.): il contenuto è diverso in II e in I.

(In questo esame delle relazioni implicite, le caratteristiche della forma non sono presentate affatto in modo completo: manca ancora qualcosa; ma ciò che qui si intende può venir facilmente rappresentato allo stesso modo).

Vi sono inoltre differenze nelle relazioni. Notate soltanto questo: in II l'eguaglianza di ab e bd non è soltanto eguaglianza di due distanze, ma comporta anche una simmetria; la simmetria, tuttavia, non soltanto indica uguaglianza di distanze, ma contiene caratteristiche essenziali di relazioni in seno al tutto.

Nell'osservare le figure, l'eguaglianza oggettiva delle distanze ab e bd non è presente in I allo stesso modo in cui lo è in II. Spesso non è nemmeno evidente nella percezione di I (a volte le riproduzioni della figura fatte a memoria mostrano questa caratteristica: tipicamente l'eguaglianza delle distanze ab e de viene intesa, quella delle distanze ab e bd no).

L'eguaglianza delle distanze ab e bd è molto più apprezzabile in II che in I; ad esempio se in I il punto a viene spostato un po' sulla sinistra (e per mantenere la simmetria, il punto e viene spostato in corrispondenza verso destra), nulla di essenziale sembra mutato; ma in II ne risulta una sorprendente asimmetria. (Risultati simili hanno luogo con altri cambiamenti: intensità, altezza, ecc.).

Si può vedere che la posizione e il ruolo nel tutto è importante per il significato delle relazioni.

2.	.	.	.	.	a	d
I:	.	.	.	II:	b	e
	.	.	.		c	f

Cancellate c e d (II). Fra le altre cose, cambia l'orientamento spaziale della figura (la figura è inclinata); ae e bf , in quanto parallele, determinano la forma della figura; nell'impressione normale della prima figura ordinariamente non compaiono. In I, be è in direzione dell'orientamento spaziale principale della figura; questo non avviene in II; in II la linea non è presente nemmeno percettivamente; se lo è viene vista come diagonale, omotipica con af (che in I sarebbe atipica); ma essere una diagonale è qualcosa di diverso dall'essere una linea di simmetria, come in I.

In I, $a \approx b$, $f \approx e$, $be \approx af$; in II, $a \sim b$, $f \sim e$, $be \sim af$.

3.

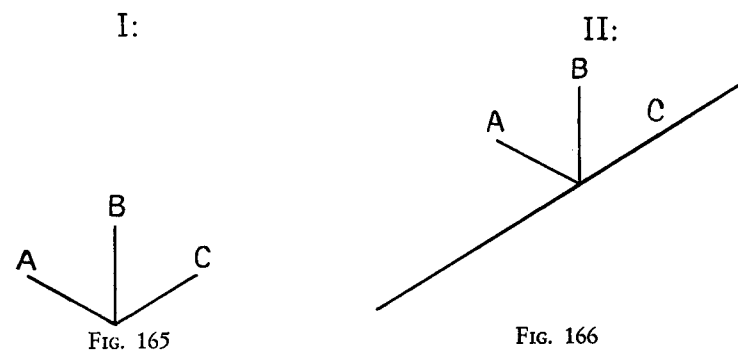


FIG. 165

FIG. 166

Allungate entrambe le estremità² di C in I e ottenete II. In I, A e C erano « pendant », B era la linea di simmetria; in II (« l'angolo AB sta su di una diagonale inclinata »), A e B sono « pendant ». (In I, $A \sim C$, $A \approx B$; in II, $A \sim B$). In I, B è la singola linea di simmetria nell'orientamento spaziale principale della figura; in II la lunga linea inclinata determina l'orientamento spaziale principale (e la linea, non « data » come elemento, che secca simmetricamente l'angolo AB forma un angolo retto con la diagonale inclinata).

Mentre in I la figura è sensibile a cambiamenti nell'eguaglianza della lunghezza di A e C, ma non a cambiamenti nella lunghezza di B, II è sensibile a cambiamenti proprio in questa eguaglianza di A e B; ora $A=B$ ha lo stesso ruolo che prima aveva $A=C$.

Se per gli angoli si usa il valore di 40° (invece che di 60° come sopra), la transizione a II è spesso particolarmente forte, non soltanto per quanto riguarda le caratteristiche ottiche: « È storto », « Si sta ribaltando », « È orribile! » E in condizioni appropriate, vi

² Prolungate le estremità più di quanto sia indicato nel diagramma.

sono spesso forti motivazioni, un bisogno di intervenire nella situazione e di « metterla a posto ».

4.

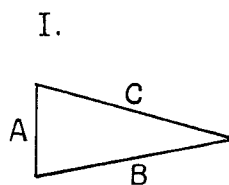


FIG. 167

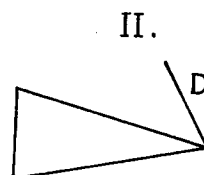


FIG. 168

Se si aggiunge una linea D , spesso essa appare come un'aggiunta senza senso e la sua presenza, lunghezza, posizione angolare risultano « accidentali », « arbitrarie ». (Il fatto che $D=A$, che gli angoli che A e D formano con B sono uguali, non si nota per nulla, come è messo in evidenza da riproduzioni a memoria). In III le cose sono diverse: nel trapezio inclinato, B è un lato obliquo del trape-

III.

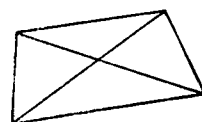
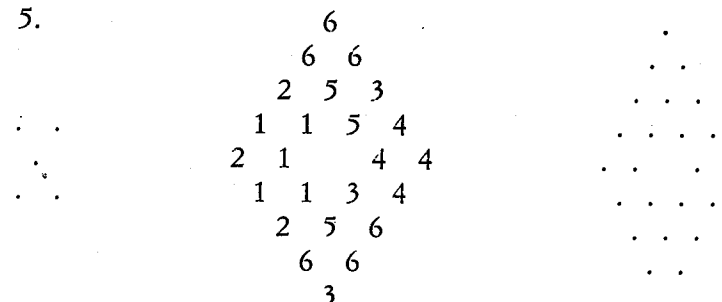


FIG. 169

zio e così pure A . In I, $B \sim C$, in III $B \sim C$; in II $A \sim D$, in III, $A \sim D$. In I, B e C sono i lati del triangolo isoscele; in III, B è la base, C una diagonale: la differenza è considerevole.

In I, sono importanti (si notano) l'eguaglianza $B=C$, e l'eguaglianza degli angoli che B e C formano con A ; in III, niente di tutto ciò: qui sono importanti l'eguaglianza delle diagonali e l'eguaglianza degli angoli che A e D formano con B .

5.



Dapprima presentate soltanto i punti indicati con « 1 », dopo un breve tempo, aggiungete i punti indicati con « 2 », poi dopo un altro po' di tempo quelli indicati con « 3 », ecc. Quando vengono aggiunti i punti indicati con « 2 » tipicamente la funzione di « punto di mezzo » rimane in 1, ecc.; ma nel medesimo tempo: « Manca un punto sulla destra! » (attesa, bisogno, necessità). I punti « 3 » appaiono come una linea obliqua « senza senso » quando vengono aggiunti sulla destra. Con l'aggiunta dei punti « 4 »: « Vi è un altro piccolo rombo a destra ».

Quando si aggiungono i punti « 5 », e specialmente quelli « 6 », ne segue di colpo un deciso ricentrimento: ciò che avevamo prima è bruscamente mutato. Il gruppo a sinistra è crollato (il suo centro non è più il centro...), la caratteristica delle figure che si trovavano « una vicino all'altra » non è più presente: tutti i punti si sono ordinati in una figura unita, si trovano ora ad essere *parti di questa figura*. (È facile enumerare i cambiamenti di ogni singolo punto, ecc.).

Il processo spesso rivela, nell'esistenza di « manchevolezze » concrete, e nel loro modo di venir soddisfatte, forti proprietà dinamiche.

6. Dati:



Fig. I



Fig. II

In queste due melodie tre note e i loro intervalli sono, come « componenti arbitrarie », identiche; per chi ascolta (e per chi canta) sono molto diverse. In relazione con il punto che ci interessa, osservate soltanto questo:

mi, in I, è la tonica

(*fa bemolle!*) in II, innalzamento della tonica

re diesis, in I, è la sensibile

(*mi bemolle!*) in II, è tonica

sol, in I, è una terza minore

in II è una terza maggiore.

La logica della musica richiede una notazione diversa per i due toni: in II, segnare *mi* con *re diesis* sarebbe sbagliato (e viceversa).

E l'intervallo tra la seconda e la terza nota è, in I, una quarta diminuita, ma in II una terza aumentata! Le differenze funzionali

vengono messe in evidenza in modo molto caratteristico attraverso simili mutamenti (cambiamenti nell'altezza di una nota, ecc., durante il canto).

Le differenze essenziali tra le due melodie mostrano anche l'esistenza di alcune interessanti caratteristiche completamente diverse; ma qui non procederemo oltre in questo esame.

(Simile per la forma ai primi esempi: dapprima suonate questo motivo:



Fig. III

Poi procedete così: aggiungete un *si* dopo la prima nota e un *mi* in fondo. Invece di *si bemolle* bisogna quindi scrivere *la diesis*, e al posto di *mi bemolle, re diesis*; qui la prima nota non è più musicalmente la dominante, ma un ritardo della dominante; la nota più bassa non è più una tonica, ma una sensibile; l'intervallo che conduce ad essa non è più una terza, ma una quarta diminuita).

APPENDICE 2

*La finestra dell'altare **

Con il seguente problema ho fatto un buon numero di esperimenti servendomi di parecchi soggetti. Alcuni bambini si comportarono molto bene e raggiunsero la soluzione, a volte dopo soltanto un minuto di riflessione o poco più; altri ebbero bisogno di un po' d'aiuto. Alcuni adulti, anche persone molto intelligenti e colte, seguirono procedimenti assai divertenti ed ebbero grande difficoltà per giungere alla semplice soluzione.

Propongo al lettore di cercare di risolvere il problema.

Alcuni pittori stanno lavorando: dipingono e decorano le pareti interne di una chiesa. A una certa altezza sopra l'altare vi è una finestra circolare. Come decorazione, è stato chiesto ai pittori di tracciare due linee verticali tangenti al cerchio, che abbiano la

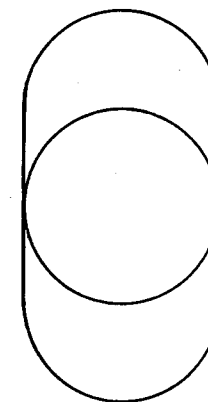


FIG. 170

* Questa appendice, che non era inclusa nell'edizione originale, è una versione leggermente rielaborata di un frammento trovato tra gli scritti di Max Wertheimer. — M. W.

stessa altezza di questa finestra circolare (fig. 170); poi di aggiungere due semicerchi sopra e sotto, per chiudere la figura. L'area compresa tra le linee e la finestra deve venir ricoperta d'oro; per ogni centimetro quadrato c'è bisogno di tanto e tanto oro. Di quanto oro ci sarà bisogno per ricoprire questo spazio (dato il diametro del cerchio?) oppure, qual è l'area dello spazio tra il cerchio e le linee?

Prima di andare avanti a leggere, cercate di raggiungere la soluzione (per far ciò non c'è bisogno di molti calcoli). Quando sarete in possesso della soluzione, vi potranno interessare i tipi di reazione che si ottengono in esperimenti con questo problema. Ve ne racconterò soltanto pochi e li potrete gustare.

Un esempio, nelle parole di un soggetto molto colto: « Certo devo essere in grado di risolverlo. Vediamo... quali teoremi circa il calcolo dell'area mi servono qui? Sicuramente devo riuscire a ricordarli. Se soltanto questa fosse una vera ellisse (pausa)... ma non lo è... Se la divido, queste parti sono molto facili. Sotto e sopra ho due semicerchi, e la loro area si può calcolare facilmente. Ma ci sono anche queste quattro ridicole parti rimanenti... Quali teoremi conosco circa quei "quasi triangoli", che hanno, invece di un lato rettilineo, un segmento circolare?... Non me ne ricordo nessuno... ». E quindi, dopo averci pensato su profondamente per un po', si arrese.

Un altro soggetto, egualmente intelligente e con una gran pratica di geometria, procedette in modo simile. Quando però giunse ai quattro resti dalla forma strana, disse: « L'area di questi quattro è uguale all'area del quadrato meno l'area del cerchio inscritto nel quadrato... L'area di ciascuna parte rimanente è $\frac{a^2 - \pi a^2}{4}$; questo è uguale ad a^2 per $\frac{4 - \pi}{4}$... oppure no? È esatto? » (tutto questo richiese mezz'ora).

Un terzo iniziò con il calcolo dell'area del cerchio e improvvisamente esclamò: « Che cieco sono stato! Com'è facile! È l'area del cerchio più che cosa? Quadrato... cerchio; è semplicemente l'area del quadrato! È un problema eccellente! »

Quarto esempio: un bambino di dieci anni, senza alcuna conoscenza di geometria che gli fosse di aiuto, disse: « Come potete pretendere che io lo risolva? Non posso, non ho la minima idea di come si facciano queste cose ». Osservò attentamente la figura, quindi disse tranquillamente: « I due semicerchi devono stare dentro la fine-

stra... È il quadrato intero! » (Non si servì del termine « quadrato », ma tracciò la figura con il dito). Il tutto richiese circa un minuto.

Quinto: un altro ragazzo, di dodici anni, senza alcuna pratica di geometria, cominciò a vantarsi della sua bravura in quei problemi e fece delle supposizioni a casaccio con grande sicurezza. Ad esempio: « Le quattro parti che rimangono sono un quarto di cerchio ». Io gli dissi: « Non dire sciocchezze. Pensaci un po' ». Stette zitto mezzo minuto, poi disse: « Se spostate verso l'alto le due rimanenze superiori e le adattate al semicerchio e fate lo stesso con le due rimanenze inferiori, le due cose assieme fanno un quadrato. Ecco fatto ».

*L'ispettore scolastico **

Ripeto qui quello che ho posto in rilievo nel primo capitolo (e altrove): vi sono elementi o caratteristiche di una situazione che sono strutturalmente centrali e altre che non lo sono, che sono, cioè, strutturalmente periferiche, variabili. Ad esempio la lunghezza assoluta delle linee ausiliarie del parallelogrammo non è compresa nella interrelazione strutturale, non più di quanto lo sia il colore del parallelogrammo.

Vedere, afferrare ciò che è al centro della struttura e ciò che non lo è, nella maggior parte dei casi di pensiero è di importanza grandissima. Un esempio estremo era citato nella sezione 14 del primo capitolo, in cui fu avanzata un'ipotesi (la successione di numeri di cui il secondo è maggiore di uno rispetto al primo) che non ha nulla a che vedere con la struttura implicata nel problema.

Per illustrare la questione vi racconterò una storia completamente diversa. Si dice che i fatti si siano svolti in un piccolo villaggio della Moravia ai tempi dell'antico impero austriaco. Un ispettore del Ministero dell'Istruzione arrivò un giorno a visitare una scuola: faceva parte del suo dovere fare quelle ispezioni periodiche alle scuole. Alla fine dell'ora, dopo aver osservato la classe, si alzò in piedi e disse: « Sono lieto di vedere che voi bambini vi state comportando bene nei vostri studi. Siete una brava classe, sono soddisfatto dei vostri progressi. Quindi, prima di andarmene, c'è una domanda che vorrei farvi: quanti crini ha la coda del cavallo? » Svelto svelto un ragazzino di nove anni alzò la mano, lasciando di stucco l'inse-

* Questa appendice, che non era inclusa nell'edizione originale, è una versione leggermente rielaborata di un frammento trovato tra le carte di Max Wertheimer. — M. W.

gnante ed il visitatore. Il ragazzino si alzò in piedi e disse: « La coda del cavallo ha 3.571.962 crini ». L'ispettore, con aria stupefatta, gli chiese: « E come fai a sapere che quello è il numero esatto? ». Il ragazzino replicò: « Se non mi credete potete contarli voi stesso ». L'ispettore scoppiò in una grande risata, profondamente divertito dall'osservazione del ragazzo. Mentre l'insegnante lo accompagnava alla porta lungo il corridoio, ridendo ancora di cuore, disse: « Che storia divertente! La devo raccontare ai miei colleghi quando torno a Vienna. Vedo già come la prenderanno: non c'è nulla che li diverta più di una buona storiella ». E con ciò si accomiatò.

Un anno dopo, l'ispettore torna alla scuola del villaggio. L'insegnante, mentre camminava assieme a lui verso la porta, si fermò e disse: « A proposito signor Ispettore, è piaciuta ai vostri colleghi la storia del cavallo e del numero dei crini? » L'ispettore batté la mano sulla spalla dell'insegnante: « Ah, già », disse, « sapete, ero molto impaziente di raccontare quella storia (ed era una buona storiella) ma, vedete, non ho potuto farlo. Quando tornai a Vienna non ero in grado di ricordarmi per tutto l'oro del mondo il numero dei crini ».

Questa è una storia inventata, almeno lo spero. Ho chiesto a molte persone, dopo che avevano seguito la narrazione: « Qual è il punto della vicenda? » Un tipo di risposta fu: « È veramente una storia stupida; questo ispettore evidentemente pensava in un modo che viola le antiche distinzioni logiche tra cose essenziali e cose non essenziali ». Dissi: « Certamente, ma per favore potete dirmi che cosa intendete qui per essenziale? » La maggior parte della gente non trova il modo per spiegarlo (oltre a non sentire alcun bisogno di spiegare una cosa così ovvia). Alcuni lo fanno; certi in modo goffo e strano; altri rifacendosi alle definizioni classiche del significato di non essenziale, inteso come ciò che non è costante, ecc. (e con questo la cosa vien data per scontata: in realtà non si tratta di una risposta perché presuppone già la risposta).

Alcuni dicono, giustamente: « Vedete, nella storiella, non ha importanza quale sia il numero dei crini ». Io chiedo: « Va bene, ma per favore volete dirmi perché? » Ed allora qualche volta viene fuori la risposta « essenziale »: « Il contenuto del numero non ha nulla a che vedere con la caratteristica centrale della storiella; non esiste alcuna interdipendenza, o meglio, non vi è alcuna ragionevole relazione interna tra l'intera storia e proprio quel numero (nessuna relazione ρ). Quindi, quest'elemento è logicamente variabile ». La

funzione dell'elemento nella sua posizione e nel suo ruolo all'interno della struttura non ha nulla a che fare con il fatto di essere proprio quel numero. Il numero esatto dei crini del cavallo non costituisce un requisito funzionale della struttura. Ciò che qui richiede la struttura è soddisfatto da un numero (grande) qualsiasi.

E perché questa storia viene spesso considerata come una barzelletta piuttosto divertente? A causa della sorpresa che provoca lo sciocco proposito di attaccarsi proprio a quell'unico elemento, come se nel suo contenuto specifico si trattasse di un elemento rilevante nella struttura. È divertente vedere quanto chiuso alla struttura sia il comportamento dell'ispettore. Potrei aggiungere che alcuni sono leggermente turbati, non riuscendo a mettere insieme la storia e la reazione ad essa, e che altri non intuiscono affatto che è necessario chiarire quello che era presente nell'operazione di pensiero dell'ispettore, ma parlano in termini di probabili tratti della personalità dell'ispettore.

Tali problemi di personalità sono importanti, ma è anche necessario un punto di vista diverso per comprendere chiaramente il significato strutturale del suo comportamento. Forse il presentarsi di un tale atteggiamento mentale in questi casi non è per nulla una questione dipendente dalle caratteristiche della personalità individuale, ma piuttosto da una tendenza creata da certi tipi di educazione (basati su determinati orientamenti della psicologia teoretica) e soltanto esagerata nella storiella.

APPENDICE 4

*Suggerimenti per insegnare l'area **

I

Quale procedimento sia psicologicamente buono e quale possa non esserlo nell'insegnare una dimostrazione, sono questioni che si devono decidere empiricamente. Si tratta di paragonare modi diversi di insegnamento tenendo conto delle difficoltà di apprendere, di ritenere, della possibilità di ricostruzione e di applicazione ad altri problemi. La questione riguarda non soltanto una padronanza di certi argomenti, ma anche un orientamento nella materia, un'apertura della mente, uno sviluppo delle capacità di pensare.

Si tratta di questioni di esperienza e di sperimentazione. Ma quello che bisogna fare non è soltanto paragonare alla cieca tipi qualsiasi di insegnamento, ma piuttosto cercare di studiare gli effetti dei metodi estremi rispetto al nostro problema principale: la ragionevolezza o l'arbitrarietà strutturale nell'insegnamento stesso.

Qui darò le linee di uno dei vari procedimenti che l'insegnante potrebbe usare per insegnare un problema in modo psicologicamente ragionevole.

Per molti bambini (non per tutti) sembra più opportuno iniziare con situazioni concrete, di vita reale, in cui il compito (ad esempio, trovare l'area di un rettangolo), viene richiesto in modo ragionevole. Si può far questo, ad esempio, con una storia di due fattori che si scambiano due appezzamenti di terreno o con la storia di un contadino che cerca di calcolare quanta semente gli servirà per una determinata parte della sua terra: problemi questi che richiedono, secondo il buon senso, la determinazione dell'area.

* Questa appendice, che non era inclusa nell'edizione originale, è una versione leggermente rielaborata di un frammento trovato tra gli scritti di Max Wertheimer. — M. W.

Per questi bambini il fatto che ci sia o che non ci sia un senso concreto nel porre il problema, costituisce una grande differenza. Come illustrazione potrei descrivere i seguenti casi.

Ventacinque anni fa i genitori di una ragazzina di nove anni, miei amici, mi dissero che la bambina trovava grandi difficoltà nel fare i compiti. Il caso era così grave che l'insegnante della piccola aveva suggerito loro di consigliarsi con uno psichiatra. I genitori portarono la bambina dal professor Z, famoso psichiatra e psicologo, che a quel tempo era direttore della clinica psichiatrica. Mi dissero tristemente che egli l'aveva sottoposta a varie prove e li aveva consigliati di ritirarla dalla scuola in quanto la sua intelligenza era troppo scarsa. Aveva suggerito di metterla in un istituto per deboli di mente, e aveva concluso con l'avvisare i genitori che se non l'avessero fatto la bambina sarebbe diventata una disadattata e forse una delinquente.

I genitori non riuscirono a convincersi di seguire questo consiglio. Sentivano che il verdetto dello psicologo non poteva essere vero per la loro bambina, la quale molto spesso dimostrava un eccellente buon senso, specialmente nelle situazioni umane, e che era anche dotata di una certa sensibilità per l'arte. Ma, d'altra parte, c'erano le difficoltà che incontrava a scuola, specialmente in aritmetica: il fatto che il *test* di intelligenza del professor Z mostrasse risultati così scarsi era in conformità con il suo fallimento nel lavoro scolastico.

Chiesero la mia opinione, ed io, conoscendo la bambina fin dall'infanzia e sapendo che era una brava bambina, proposi di parlare con lei. Dapprima le chiesi che domande le aveva fatto il professor Z: si trattava dei soliti problemi, che comprendevano anche compiti di aritmetica con addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ecc.: lei non era capace di risolvere quei problemi. Cambiai l'argomento della discussione. Poi le raccontai una situazione concreta che, secondo la mia storia, si era svolta in una famiglia vicina, in cui la madre stava preparando un bagno per il bambino, senza avere i recipienti adatti. La bambina era vivamente interessata alla storia e quando, nel momento drammatico, posi la domanda: « Cosa fare? » reagì vivacemente e con esito positivo. E questo nonostante io avessi scelto problemi che richiedevano non soltanto le operazioni contenute nei tests del professor Z, ma anche altre più difficili. La bambina non riusciva a trattare problemi nei quali non vedeva un senso. D'altro canto, se un problema sorgeva da una situazione, ed era la situazione stessa a richiedere la soluzione, essa non incontrava

nessuna insolita difficoltà e spesso dimostrava molto buon senso.

Un mio amico, un antropologo di Lubecca, era rimasto a lungo presso una tribù dell'Africa centrale. Al suo ritorno mi mostrò i begli oggetti che aveva portato con sé, aggiungendo: « Ma sto ancora aspettando di ricevere alcune cose veramente eccellenti. Alcuni membri della tribù di cui ero amico hanno acconsentito a costruire per me e a spedirmi una loro capanna primitiva completa, con tutti gli utensili e le decorazioni artistiche consuete. Li voglio per un'esposizione al mio museo; hanno acconsentito a costruire tutti gli oggetti grandi un terzo rispetto alle loro dimensioni consuete, in quanto non ho spazio sufficiente per un modello a grandezza reale. Mi piacerebbe mostrarveli quando arrivano: ti piaceranno ».

Dopo parecchi mesi gli oggetti arrivarono. Tutto era in ordine, ogni cosa era stata ridotta ad un terzo della sua grandezza originaria. Egli però era stupito dell'inesattezza di certi oggetti: la pentola per cucinare ed il sostegno di legno su cui si appoggia la testa durante il sonno arrivarono nella loro misura reale.

L'antropologo scrisse una lettera ad un amico, un missionario, che viveva con questa gente chiedendogli di rimproverare amichevolmente i componenti della tribù e di far sì che mandassero quei pochi articoli inesatti nelle proporzioni appropriate. Passò molto tempo prima che giungesse la risposta. In essa c'era scritto: « Non sono stato capace di convincere gli uomini a farlo: insistevano che mentre si potrebbe ancora vivere nella tenda ridotta, sarebbe un controsenso fare una pentola (già inadeguata nella sua misura originale) così piccola, e lo stesso per il sostegno di legno ». Il missionario scrisse che non aveva trovato alcun sistema per convincerli a farlo.

Un altro esempio: un antropologo che lavorava alla compilazione della grammatica di una lingua primitiva, aveva l'assistenza di un indigeno che era in grado di aiutarlo per la traduzione di storie e frasi. Una volta l'assistente doveva tradurre una determinata frase, ma l'antropologo non riusciva a fargliela dire. Stupito, cercò di scoprire quali parole o quali inflessioni grammaticali potevano essere la causa di questa difficoltà. Solo dopo qualche tempo l'indigeno esclamò: « Come faccio a tradurre questa vostra frase: " L'uomo bianco oggi ha ucciso sei orsi "? Non ha senso. È impossibile che l'uomo bianco sia riuscito a uccidere sei orsi in un giorno solo! »

In questi casi l'operazione, la mèta stessa, viene vista entro il significato funzionale dell'intera situazione: essa non è astratta dalla funzione che riveste.

In breve, come ho detto, in una ricerca sul pensiero dei popoli primitivi,¹ vi è una grande differenza tra l'eseguire un compito quando esso è ragionevolmente necessario in una situazione della vita reale, o si adatta ad essa, ed eseguire un compito che non ha alcuna relazione sensata con la situazione attuale, o che addirittura contraddice la situazione data, e diventa sensato solo se lo si astrae completamente dal ruolo che ha nella realtà di fatto.

Ma, come ho detto in quello scritto, sarebbe uno sbaglio concludere che una tale incapacità di astrarre denuncia una mancanza di abilità nel pensare. Se qualcuno si rifiuta di eseguire un'astrazione che per lui risulta insensata, se non può o non vuole avere a che fare con tali astrazioni, questo può voler dire che prende sul serio la situazione. Naturalmente nella storia della nostra scienza l'astrazione dalla realtà è stata sviluppata in modi diversi, come uno strumento molto importante. Ma l'incapacità o il rifiuto a compiere certi passi, qualora non si afferri il reale significato di un'astrazione in un contesto scientifico, è segno non di un cattivo ma di un buon procedimento del pensiero. La mancanza di astrazione in sé costituisce una buona base per una valutazione del pensiero. I migliori pensatori si rifiutano di eseguire (e qualche volta non sono in grado di farlo) compiti che comportano astrazioni veramente senza senso: si ribellano ad esse.

Così ad alcuni tipi di bambini è necessario presentare problemi di geometria per mezzo di situazioni di fatto in cui il compito stesso assuma per loro un significato vero.

Ma vi sono molti bambini e adulti che non hanno bisogno di tale aiuto. Si interessano facilmente ai problemi « teoretici », considerando il problema come un compito interessante, una sfida alla loro attività produttiva. E mentre imparano la geometria sono in grado (e perfino lo desiderano) di applicare quell'approfondimento che hanno ottenuto ad altri problemi di geometria e a problemi della vita. (Il caso estremo di questo atteggiamento, naturalmente, è il tentativo sciocco di applicare dovunque tali procedimenti appresi, che si adattano o no alla situazione).

Penso che sia compito dell'educazione sviluppare nei bambini un interesse « teoretico » del primo tipo: questo apre loro

¹ WERTHEIMER, M., « Über das Denken der Naturvölker, Zahlen und Zahlgebilde », *Zeitschrift für Psychologie*, 1912, vol. 60, pagg. 321-378; ripubblicato in: WERTHEIMER, M., *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie*, Erlangen, Philosophische Akademie, 1925.

un regno meraviglioso di purezza cristallina, di intrinseca coerenza. E penso che la tesi dell'educazione formale era esatta nel ritenere che il ragionare con materiali puri è importante in generale per lo sviluppo del pensiero: non ci si trova allora così facilmente vittima di un pensiero non chiaro, disordinato, anche in situazioni pratiche.

II

1. Ho avuto spesso l'occasione di parlare con insegnanti di matematica che venivano a esprimermi la loro insoddisfazione per i metodi tradizionali d'insegnamento. Essi avevano letto o sentito parlare delle mie teorie e avevano la sensazione che queste potessero servire ad insegnare in modo più ragionevole. Si sentivano però smarriti quando si trattava di vedere come ciò si potesse fare, come si potesse elaborare un metodo concreto di insegnamento alla luce della teoria della forma.

In effetti io riterrei che le principali conseguenze positive per l'insegnamento sono già implicite nelle precedenti discussioni di questo libro. Cercherò ora di tracciare un modo di procedere che soddisfi i requisiti teoretici che sono stati esposti. Posso subito dire però che vi sono buoni insegnanti che fanno cose del genere seguendo quella sensibilità che hanno per le esigenze dell'educazione. La maggior parte di ciò che sto per proporre non è per niente sorprendente: « nuovo », ma certamente in molti sensi è assai diverso dai procedimenti usati attualmente in molte scuole.

Sono possibili molti buoni procedimenti, e bambini diversi richiedono talvolta modi diversi di insegnamento (sebbene strutturalmente simili). Naturalmente è di gran lunga più facile insegnare a un bambino solo, e qui parlerò di un insegnamento di questo genere. È anche possibile però, e qualche volta è senz'altro consigliabile, usare in classe metodi di gruppo.

Alla luce della mia esperienza di insegnamento, la cosa migliore, specialmente all'inizio, mi sembra che sia quella di dimostrare di « insegnare » il meno possibile. Ritengo consigliabile evitare quanto più è possibile di dare passaggi già pronti: il bambino dovrebbe venir messo di fronte a compiti che deve cercare di risolvere da solo. Lasciate che il bambino affronti i problemi, dategli un aiuto quando ne ha bisogno, ma non fate che copi semplicemente, che ripeta procedimenti già dati. Io eviterei il più possibile qualsiasi cosa che possa provocare uno stato mentale meccanico, un atteggiamento di ripetizione meccanica.

Porterò come illustrazione il problema di trovare l'area di una figura. La cosa più consigliabile è che il bambino trovi da solo la sua via, dopo esser stato posto in una situazione problematica strutturalmente ragionevole. Se il bambino sembra sperduto o dichiara: « Non riesco a farlo », spesso è sufficiente dire semplicemente: « Tenta lo stesso, forse troverai un modo ». E se questo non serve ancora, si può aggiungere la domanda: « Dov'è la difficoltà? » E soltanto se questo procedimento non riesce si dovrebbe procedere a dare un aiuto concreto.

2. *Introduzione intelligente del concetto di « misura dell'area » del rettangolo.* Io non comincerei con l'insegnare come si trova l'area del rettangolo, specialmente non con i dettagli che vengono introdotti quando si tratta di determinare l'area di questa figura, poiché il senso del concetto di « misura dell'area » può risultare non del tutto chiaro al bambino. Inizierei piuttosto con una situazione in cui è incluso sensibilmente il problema di « più grande » o « più piccolo ».

Per esempio io darei due rettangoli della stessa base, di cui uno è chiaramente più alto dell'altro.



FIG. 171

E domanderei: Come si può trovare con esattezza di quanto la seconda figura è più grande della prima? ». *Senza*, naturalmente, dare la linea ausiliaria. Farei i due rettangoli di cartone e li metterei uno vicino all'altro, lasciando che al bambino venga l'idea di porli uno sopra l'altro, di farli combaciare e di segnare la parte rimanente.

Poi procederei alla misurazione vera: « Questa figura, vedete, è larga 9 centimetri e così anche l'altra. Ora l'altezza di una misura 5 centimetri, quella dell'altra 6 centimetri ». E dapprima sarei ben contento di sentire il bambino dire semplicemente: « La prima è più grande di una striscia » oppure « di una striscia larga 9 centimetri e alta uno ».

2a. A questo punto faccio una parentesi. Per molti bambini questo procedimento è, come ho detto, appropriato. Per altri bam-

bini è consigliabile invece cominciare con una impostazione del problema di cui possono avvertire concretamente il senso. Per esempio, comincerei raccontando una storia: « C'era una volta (o ancora meglio per alcuni bambini: "Vicino a casa mia alcuni giorni fa") un contadino che voleva traslocare. Trovò un contadino in un altro posto, che era disposto a scambiare le terre con lui. Le due fattorie erano simili sotto molti aspetti ed erano circa della stessa misura. Nel discutere l'affare volevano calcolare esattamente se una fattoria era più grande dell'altra e di quanto. Ecco un disegno delle due fattorie.

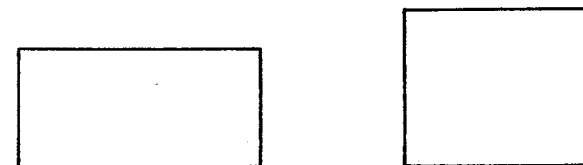


FIG. 172

Ora, come si può trovare qual era la più grande? »

Può darsi che il bambino invece di rispondere faccia domande come: « Il contadino che aveva la fattoria più piccola avrebbe abbastanza soldi per pagare la differenza? » Ma nella maggior parte dei casi è abbastanza facile far sì che il bambino affronti il problema di paragonare fra loro le grandezze.

A questo punto alcuni bambini giungono all'idea di dividere la figura in quadratini.

2b. Se questo metodo non funziona si può tentare un'altra situazione reale, che comporta un maggior aiuto concreto. « Sei seduto sul pavimento con un altro ragazzo e tutti e due state costruendo una parete con i cubetti. Tu hai usato tutti i tuoi cubetti, mentre l'altro ha presso di sé ancora una pila di cubetti non usati. Tu hai una gran voglia di costruire la tua parete più alta di un cubetto e chiedi all'altro ragazzo alcuni dei suoi. Lui si rifiuta di darteli e tu gli dici: "Non ne voglio molti, tu ne hai tanti che non usi, perché non puoi lasciarmene alcuni?" L'altro ragazzo ribatte: "Quanti te ne servono?" Ora, quanti te ne servono se vuoi costruire il tuo muro più alto di un cubetto, o di due? »

Può darsi che alcuni insegnanti siano stupefatti al vedere che qui si mescolano insieme problemi a tre e a due dimensioni. Naturalmente si poteva cominciare con quadrati di cartone, ma non mi pare che la cosa abbia importanza; io in effetti preferirei usare i cubetti.

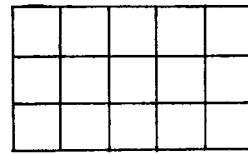


FIG. 173

3. *Raggiungere la « formula »*. Con tali compiti e di preferenza, se possibile, con problemi puramente astratti, cercherei di far raggiungere al ragazzo stesso la formulazione: « Ho bisogno di una fila in più (o di due, ecc.). Ciò che mi serve è un tal numero di file, e il numero di file deve venire moltiplicato per il numero dei cubetti in una fila ».

Poi domanderei: « Quanti quadretti ci sono in questa figura intera? » oppure: « Qual è l'area complessiva? » Può darsi che allora il bambino dica: « Bisogna misurare la base, l'altezza e poi moltiplicare ».

4. A questo punto lascerei che il bambino facesse la scoperta che il procedimento funziona da entrambe le parti, sia che si prenda come base un lato, sia l'altro.

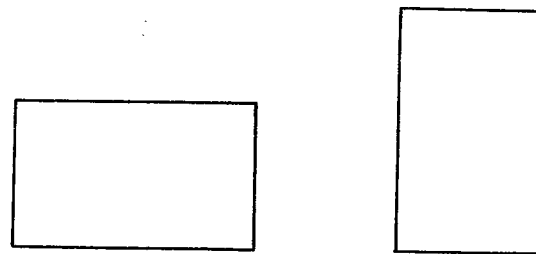


FIG. 174

Spesso è bello vedere com'è felice il bambino quando scopre che il metodo funziona in entrambi i sensi. In certe condizioni il trovare che $ab = ba$, è una vera scoperta, che comporta una vera penetrazione del problema.²

5. *Compiti in discussione*. Io non andrei avanti a far calcolare le risposte a molti altri esempi di questo tipo, per il pericolo che il bambino possa perdere di vista il carattere strutturale della formula.

² Cfr. WERTHEIMER, M., *op. cit.*

Darei invece, inaspettatamente, alcuni casi diversi e più interessanti. E introdurrei un altro esempio in cui il procedimento non si può applicare, aspettando fino a che il bambino non decida da solo: « Qui non lo posso fare allo stesso modo, bisogna contare i quadratini ». Darei problemi come quello di determinare la grandezza di una stanza, o di due tavole, o addirittura di trovare il volume cubico di una stanza, o di una pila di cubetti a tre dimensioni. Nel problema ci si fisserebbe sul numero dei cubetti in un *quadrato*, che deve venir moltiplicato per l'altezza, non semplicemente sulla moltiplicazione dei tre lati.

6. *L'area del parallelogrammo*. La cosa migliore è quella di porre semplicemente la domanda: « Qual è l'area di questa figura? La puoi trovare? » Come nel caso del rettangolo, alcuni bambini, dopo un po' di riflessione e di incoraggiamento, trovano la via da soli.

Se il bambino non fa nessun passo avanti, gli si può chiedere: « Qual è la difficoltà? Che cosa lo rende difficile? » Al che il bambino potrebbe rispondere: « Vedete, la difficoltà sta in queste estremità qui. Se le estremità fossero quelle del rettangolo tutto andrebbe bene ».

6a. In alcuni casi è di aiuto dare la seguente figura:

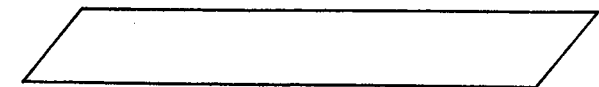


FIG. 175

I bambini talvolta rispondono: « Oh, va tutto bene in centro, ma... »

6b. Oppure: « C'è una casa di cubetti con la parte superiore a forma di rettangolo. Ecco qui un pezzo di cartone rossiccio, forse lo possiamo usare. Ha la stessa lunghezza della sommità della casa, ma sfortunatamente ha la forma di un parallelogrammo. Ne puoi fare il tipo di copertura giusto? »

Un procedimento forse migliore, in quanto dà minore aiuto, potrebbe essere: « Ecco un parallelogrammo di cartone. Cosa puoi fare per renderlo un rettangolo? »

6c. *Procedimento alternato*. Dopo aver semplicemente posto il problema di trovare l'area del parallelogrammo, senza alcun risultato, pongo di fronte al bambino una figura completamente diversa, in cui vi sono due disordini di struttura: una parte che risulta chiaramente un'aggiunta, che non si adatta; l'altra un buco o una lacuna.

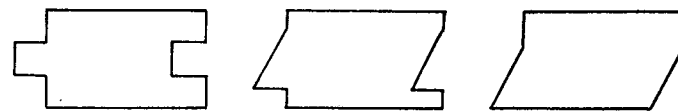


FIG. 176

La transizione da un tale compito strutturalmente più facile a quello apparentemente diverso del parallelogrammo è, per alcuni bambini, difficile e impossibile senza un ulteriore aiuto. Ma vi sono bambini che, una volta risolti questi problemi, tornano ad osservare il parallelogrammo, sorridono e lo risolvono.

6d. Se ce ne fosse bisogno, introdurrei il problema in termini pratici: « Un meccanico che fa targhe metalliche (di forma rettangolare) usa il seguente procedimento per determinare quanto metallo gli servirà per un rettangolo di una certa misura. (Qui segue l'insegnamento dell'area del rettangolo). Un giorno gli viene chiesto di fare una targa della seguente forma:

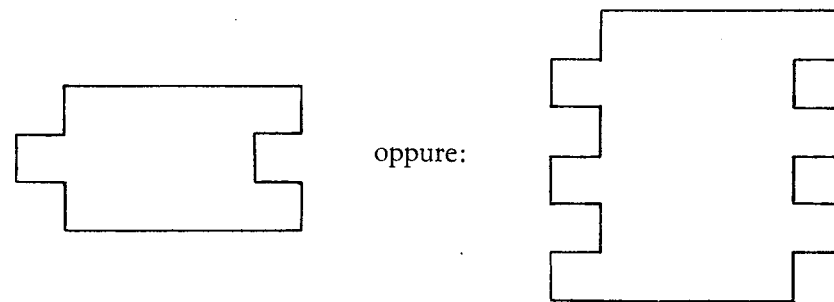


FIG. 177

Vorrebbe trovare quanto metallo gli sarà necessario in questo caso. (Oppure in maniera simile per trovare il peso, ecc.)

« Dapprima si trova smarrito. " Come posso fare questo? " domanda. Ma dopo un po' il meccanico sorride. Ha trovato il modo. Come ha fatto? » Ma posso aggiungere che a molti bambini non darei problemi come questi: per molti la cosa è troppo ovvia. Non hanno bisogno di una storia tirata tanto per le lunghe, che può risultare una ridicola sottovalutazione delle loro abilità.

Queste figure presentano un aiuto considerevole per afferrare il carattere strutturale di « disordine », di « lacuna »: « là c'è bisogno di ciò che qui è un'aggiunta non necessaria ».

A questo punto io introdurrei una figura alla quale *non* si adatta il procedimento, lasciando interamente al bambino di vedere il punto.



FIG. 178

6e. *Un altro procedimento.* In alcuni casi può essere necessario usare una figura che contenga una o due file di rettangoli, con triangoli alle estremità.

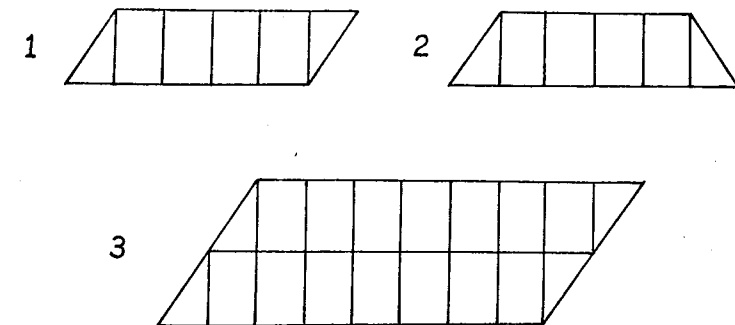


FIG. 179

7. *Procedimento consistente nel dare le linee ausiliarie.* Nella maggior parte dei casi che ho visto, tali procedimenti portarono ad una comprensione del problema, che consiste nel cambiamento dal parallelogrammo in rettangolo. Soltanto se tutte queste forme di aiuto fallissero darei al bambino, uno alla volta, i passaggi che avrebbe dovuto scoprire.

Ma non comincerei con l'affermare che bisogna tracciare due verticali. Direi prima che per ottenere un rettangolo bisogna modificare le due estremità. Poi aspetterei di nuovo per vedere se il bambino compie da solo il passaggio successivo.

Oppure chiederei: « Come potremmo cambiarlo in un rettangolo ad una estremità? » Se questo non servisse, comincerei a tagliare l'estremità sinistra e, dopo aver aspettato un attimo, chiederei: « E l'altro lato? Ora abbiamo un rettangolo dall'altra parte? »

Se non ci fosse ancora nessun progresso, traccerei tutte le linee necessarie, dando tutte e due le figure seguenti.



FIG. 180

Se il bambino non ha mostrato alcuna reazione all'ultimo passaggio, io domanderei: « E la grandezza delle due figure? » Poi: « Quali sono le parti del parallelogrammo? E quali quelle del rettangolo? »

8. *Dopo la soluzione: osservazioni sulla ripetizione e sull'esercizio.* Dopo aver raggiunto lo scopo di trovare l'area del parallelogrammo, io darei all'allievo da risolvere un certo numero di figure, in apparenza diverse. Non gli farei però ripetere la soluzione con un numero molto grande di esercizi. Gli darei piuttosto pochi problemi che richiedono di trovare l'area, rendendoli quanto più possibile diversi e interessanti, e intercalando ad essi altri problemi che non possono venir risolti nello stesso modo. E senza alcuna introduzione formale farei comparire il problema di trovare l'area del trapezio e del triangolo.



FIG. 181

Vi sono casi in cui il bambino, senza alcun ulteriore insegnamento, risolve questi problemi in modo genuino. Se non lo fa, si possono usare altri procedimenti simili a quelli indicati sopra.

Si potrebbe pensare che il mettere assieme compiti così diversi sia troppo per il cervello del bambino. Alcuni direbbero che il bambino dovrebbe fermarsi per un po' di tempo all'area del parallelogrammo soltanto. Queste persone considererebbero il procedimento d'inserire altri problemi, fra cui perfino problemi « impossibili », come psicologicamente pericoloso, in base alla convinzione che si dovrebbe rimanere fissi su una cosa e ripeterla molte volte, prima di volgersi a un problema nuovo.

In base alla mia esperienza questo è vero solo per determinati tipi di bambini, ad esempio per quelli che sono troppo timidi. In tali casi bisogna procedere lentamente: è importante non andare

avanti prima di avere intuito che l'argomento è stato accolto dal ragazzo. (Ma non bisogna che la ripetizione di per sé sostituisca la comprensione). Con molti bambini, però, sembra che il procedimento desiderabile sia proprio l'opposto. Avere a che fare ripetutamente con problemi che ripetono stancamente cose che il bambino sente di avere già afferrato diventa molto noioso e spesso incoraggia il bambino a lavorare senza pensarci su. Questa è, suppongo, una delle ragioni per cui tanti bambini, dopo un certo periodo di scuola, hanno una così profonda antipatia per la geometria e l'aritmetica. Al contrario, attraverso i procedimenti descritti qui, i bambini sono felici per le loro attività, per le loro scoperte.

III

La prova

1. *Difficoltà fondamentali.* Il passaggio alla prova geometrica, alla « dimostrazione », si dovrebbe fare con cautela: con tutta probabilità può darsi che il bambino non afferri il senso di una « dimostrazione ». È un problema piuttosto importante, e anche se i bambini hanno reagito in modo positivo alcune volte, dubito che abbiano una comprensione vera del significato che la prova riveste in geometria. Essi lo vedono per lo più come un procedimento dei grandi, buffo e non del tutto comprensibile. Gli interessi di un adulto che pensi per assiomi risultano strani per loro. E non sembra realmente possibile che siano in grado, prima di avere acquisito una conoscenza ulteriore e una comprensione più « concreta » di un vasto numero di problemi di geometria, di rendersi conto degli scopi del matematico che rendono sensato questo procedimento.

Tuttavia vi sono delle vie adatte per aiutare i bambini a comprendere il bisogno di una « prova » di *qualche genere*, anche se le prove tradizionali vengono veramente capite da pochi.

2. *Presentazione della prova.* La prova non dovrebbe venir semplicemente imposta al bambino. Si potrebbe tutt'al più presentargliela in termini come questi: « Qualche volta non possiamo con tutta certezza "tagliare" e "riempire". In tal caso come potresti assicurarti che sei nel giusto? » Potrebbe anche andar bene introdurre una figura rispetto alla quale non si è effettivamente sicuri, e dire: « Come faresti ad accertare che il metodo che hai usato prima, andrà bene qui? » A ciò il bambino può rispondere: « Se queste due linee oblique sono parallele, allora deve essere giusto applicare quello che

abbiamo fatto prima ». E se a questo punto gli si chiede: « Perché? Come fai ad esserne così sicuro? » può darsi che replichi: « Ciò che importa è che quello che voglio portar via dal lato sinistro combaci esattamente dalla parte destra ». Se allora chiedete: « Come puoi provare ciò? Che cosa implica questo? » forse riceverete la



FIG. 182

risposta: « Dobbiamo avere due triangoli uguali ». Domanda: « Puoi provare che sono uguali se le linee sono parallele? » Risposta: « Perché sono stati fatti a quel modo ». Domanda: « Puoi mostrare dettagliatamente qual era il punto decisivo nel renderli uguali? »

E allora può darsi che il bambino affronti il problema di come arrivare alla sovrapposibilità o meglio, nei suoi termini, all'identità dei triangoli, attraverso l'eguaglianza delle linee e degli angoli.

Qui il bambino può usare teoremi generali che ha appreso in precedenza, come il teorema circa l'eguaglianza degli angoli compresi tra linee parallele. Può darsi invece che il bambino arrivi a tali problemi proprio in questo contesto.

Non s'intende dire che il bambino dovrebbe trovare sempre, in tutti i casi, la prova da solo. (Sebbene la frequente obiezione che questo procedimento porterebbe via troppo tempo mi sembra di fatto non del tutto vera, e nemmeno decisiva). Non vi è nulla da opporre al fatto che l'insegnante dimostri l'intero procedimento; ma se così avviene, dovrebbe farlo in un modo strutturalmente appropriato, per dare un aiuto che faccia veramente comprendere la gerarchia dei passaggi.

*Il bastoncino in equilibrio **

Se chiedete a dei bambini di fare una *T* con dei cubetti da costruzioni, mettendone uno in piedi verticalmente e un altro in equilibrio orizzontale sopra il primo, è interessante osservare l'evoluzione che avviene nei soggetti, vedere come essi arrivano ad afferrare l'esigenza strutturale della simmetria necessaria alla stabilità.

Lo stesso problema è presente nel compito di trasportare bastoni lunghi (problema che è interessante studiare anche con i cani). Dapprima i bambini fanno esperimenti con il bastoncino; spesso rinunciano dopo i primi tentativi negativi. Ma alcuni insistono, e la maggior parte vi ritorna dopo un po' di tempo. È illuminante vedere come imparano dai loro sbagli: i tentativi falliti non sono soltanto un fatto negativo. Naturalmente, qualche volta il bambino procede con cambiamenti alla cieca, ma molto spesso nei cambiamenti osserviamo procedimenti sensati. Per esempio, il bastoncino veniva preso a sinistra rispetto al centro e cadeva a destra: nel cambiamento successivo può darsi che il bambino ripeta l'azione ciecamente, prendendolo allo stesso punto, o perfino più a sinistra; ma spesso i bambini si correggono in modo sensato, lo afferrano più a destra. Può darsi che non spostino abbastanza la presa, oppure che la spostino troppo, ma in tal caso si correggono di nuovo in modo sensato nel tentativo seguente. Spesso osserviamo un progresso coerente in tutto il comportamento. Vi è una differenza fondamentale tra un susseguirsi di tentativi a casaccio e una struttura sensata nella successione dei tentativi.

Per esempio: se qualcuno spara senza vedere il bersaglio e senza poter vedere dove è andato a finire il suo colpo rispetto al

* Questa appendice, che non era inclusa nell'edizione originale, è una versione leggermente rielaborata di un frammento trovato tra le carte di Max Wertheimer. — M. W.

bersaglio, ma gli viene soltanto detto (o può sperimentarlo in qualche modo) che il bersaglio non è stato colpito dal suo proiettile, sarà imbarazzato nel cambiare adeguatamente la direzione dello sparo successivo. Se invece può osservare gli effetti del suo tentativo negativo, allora le direzioni in cui decide di mirare dimostrano effettivamente una differenza tra il comportamento cieco e quello sensibile. Supponiamo che il suo primo tiro colpisca nel punto 1 a destra del bersaglio: sarebbe sciocco scegliere, quindi, per il colpo successivo una direzione ancora più a destra.

2 b 3 1

Secondo il buon senso, la volta successiva mirerà in modo da colpire nel punto 2 o 3, correggendo la sua mira in base alla deviazione e continuando in tal modo ad avvicinarsi al bersaglio.

In molti bambini, nel problema dei cubetti o del bastone lungo, vediamo molto presto una tendenza rilevante a concentrarsi all'incirca sul punto di mezzo.

Se s'introduce arbitrariamente un fattore nascosto, naturalmente sorgono difficoltà. Ma anche in esperimenti con un bastoncino così cambiato spesso hanno luogo procedimenti sensati (per esempio se si nasconde in qualche punto internamente al bastoncino un pezzo di piombo). Ma riuscire ad imparare che cosa bisogna fare in una tale situazione può darsi che non fornisca supposizioni ragionevoli in altre situazioni, dove la posizione del piombo potrebbe essere da capo in un altro posto, essendo spostabile ad arbitrio.

Se, d'altra parte, si fa in modo che nell'aspetto visivo dell'oggetto vi sia una chiara asimmetria, come negli esempi disegnati sotto, la situazione è del tutto diversa. In questo caso non osserva-



FIG. 183

mo fin dall'inizio la tendenza ad afferrare proprio il centro, ma piuttosto una certa tendenza a compensare in qualche modo l'asimmetria dell'aspetto.

Il caso in cui viene introdotta arbitrariamente qualche connessione esterna è diverso da quello in cui opera una correlazione sensata.

La situazione diventa teoricamente ambigua se un bambino ha imparato, per esempio, ad afferrare il bastone che deve trasportare su di un punto rosso posto nel mezzo; oppure se ha imparato ad afferrare un bastone metà rosso e metà verde, nel punto in cui i colori si incontrano. Ora noi però possiamo introdurre una variazione e vedere quello che succede.

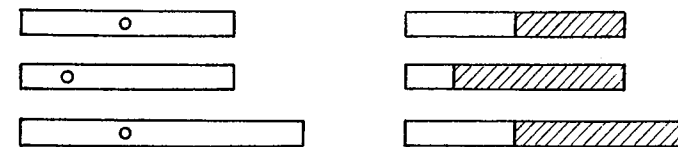


FIG. 184

Qui le condizioni dei colori sono le stesse, solo è aumentata la lunghezza di un'estremità. Il bambino afferrerà il bastoncino nella zona indicata dal colore? Se noi introduciamo due metodi di apprendimento: secondo il colore e secondo la simmetria di grandezza, allora la transizione da ciò che è arbitrario a ciò che è strutturalmente sensibile sembra, se uno ha la mente aperta, più facile che non l'altro procedimento. Vediamo di nuovo che non si tratta semplicemente di generalizzare, ma di vedere come (in quale direzione) opera la generalizzazione: in un modo strutturalmente sensato, oppure seguendo associazioni cieche, connessioni chiuse. La relazione ρ tra simmetria e stabilità sembra di fondamentale rilievo.

La somma di una serie *

Descriverò come si svolse un corso di pensieri tra loro coordinati.¹ Esprimerò la serie nella forma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots \quad (a \text{ è un numero intero } > 1)$$

Il problema è di trovare la somma della serie.

Primo: in che modo cresce la somma se la serie prosegue? Ovviamente la somma di ciascun passaggio successivo, S_{n+1} , è uguale alla precedente S_n più $\frac{1}{a^{n+1}}$. Il valore di $\frac{1}{a^{n+1}}$ diviene sempre più piccolo man mano che si procede nella serie: più grande diventa n , più piccolo sarà il valore $\frac{1}{a^{n+1}}$. Quindi S_{n+1} negli ultimi gradi si approssimerà sempre di più ad S_n : la curva della somma non s'innalzerà più di tanto, cambierà sempre meno e forse tenderà all'orizzontale.

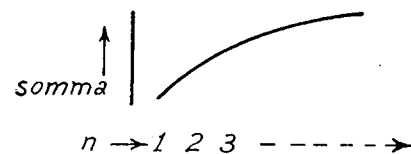


FIG. 185

Ma questo non mi serve per vedere a che valore tende la somma.

Secondo: Se io voglio capire, devo rendermi conto fin dall'ini-

* Questa appendice nell'edizione originale era l'Appendice 1. — M. W.

¹ Questa relazione venne stesa proprio durante l'effettivo processo di pensiero.

zio del significato che ha il primo termine $\frac{1}{a}$, come parte del suo insieme; e lo stesso con i termini successivi.

$\frac{1}{a}$ significa che 1 viene diviso in a parti uguali e che $\frac{1}{a}$ è una di esse; ad esempio $\frac{1}{4}$ significa:

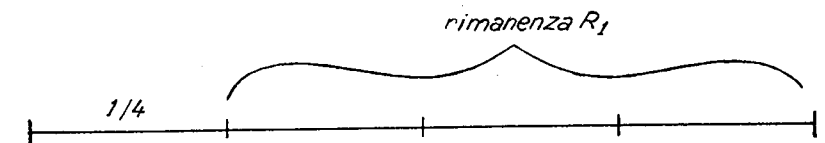


FIG. 186

Ho diviso 1, l'intero, in quattro parti uguali; prendendo in considerazione la prima di queste parti, $\frac{1}{4}$, devo rendermi conto del fatto che rimangono le altre parti, in questo caso, $\frac{3}{4}$. In generale, prendendo $\frac{1}{a}$ l'intero viene diviso in $\frac{1}{a} + (a-1)\frac{1}{a}$. Questa è la situazione rispetto al primo membro della serie.

Che cosa succede se procedo al passaggio seguente, $S_2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$?

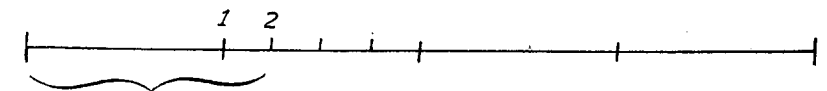


FIG. 187

nel nostro caso la somma è ora $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$. Questo significa che con l'aggiunta di $\frac{1}{16}$, il quarto successivo viene diviso in $\frac{1}{16} + \frac{3}{16}$, come era stato diviso l'intero nel primo passaggio. Ho $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ primo quarto, $\frac{3}{16} + \frac{2}{4}$ secondo quarto, $\frac{2}{4}$ resto R_2 .

Oppure in generale,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{a-1}{a^2} + \frac{a-2}{a} \quad R_2 \text{ ora deve essere } (a-2)\frac{1}{a}$$

prima parte a
seconda parte a
resto R_2

perché la prima parte di R_1 è stata presa nella divisione in $\frac{1}{a^2}$.

Di nuovo se procedo alla somma successiva, $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$ avviene questo:

FIG. 188

Qui il successivo $\frac{1}{16}$ viene diviso in $\frac{1}{64} + \frac{3}{64}$; ho

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{2}{16} + \frac{2}{4}$$

secondo $\frac{1}{16}$
secondo $\frac{1}{4}$

Oppure in generale $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{a-1}{a^n} + \frac{a-2}{a^2} + \frac{a-2}{a}$

regione critica

Ogni volta, in ogni passaggio, la regione successiva $\frac{1}{a^n}$ viene divisa

in $\frac{1}{a^{n+1}} + \frac{a-1}{a^{n+1}}$; e con ciò il precedente $\frac{a-1}{a^n}$ si muta in

$\frac{a-2}{a^n}$. In tal modo la regione critica $\frac{1}{a^{n+1}} + \frac{a-1}{a^{n+1}}$ si spo-

sta lentamente verso destra, nello stesso tempo diminuisce di grandezza; la sua struttura è

$$S_n + \frac{1}{a^{n+1}} + \frac{a-1}{a^{n+1}} + (a-2) S_n$$

regione critica

R_n nella struttura generale deve essere $(a-2)$ volte la stessa S_n :

cambia da $(a-2) \frac{1}{a}$ a $(a-2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right)$ a $(a-2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \right)$

e così via.

Terzo: l'intero, « 1 », è diviso in S_n , la regione critica e $(a-2) S_n$, il resto R_n . Man mano che procediamo, la regione critica diviene di necessità sempre più piccola, mentre la somma a sinistra aumenta. Se la regione critica diviene estremamente piccola e tende a zero,

l'intero risulta diviso in $S_n + (a-2) S_n$: non risulta più diviso in a parti uguali, come all'inizio, ma in $(a-1)$ parti uguali! Così, la somma della stessa serie continua deve tendere al valore $\frac{1}{a-1}$!

In termini matematici: $1 = (a-1) S_n$ (+ la regione critica che tende a zero). L'1 a sinistra indica l'intero, mentre nel procedimento d'uso è soltanto il primo membro della serie $1 + a + a^2 + \dots$; nel nostro procedimento si comprende il significato strutturale di S come parte del suo insieme, mentre in quello consueto si raggiunge S tramite alcune operazioni algebriche.

Quarto: voglio dare una formulazione esatta di questo. Avevo:

$$1 = S_n + \text{regione critica} + (a-2) S_n$$

Il valore della regione critica è $\frac{1}{a^{n+1}} + \frac{a-1}{a^{n+1}} = \frac{a}{a^{n+1}} = \frac{1}{a^n}$.

Come abbiamo visto prima, è il successivo $\frac{1}{a^n}$ che diventa diviso nel passaggio da S_n a S_{n+1} . Quindi nella formulazione esatta

$$1 = (a-1) S_n + \frac{1}{a^n}$$

$$\text{oppure, } S_n = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^n(a-1)}$$

$\frac{1}{a^n(a-1)}$ diminuisce con il crescere di n ; non raggiunge mai lo zero, ma gli si avvicina sempre più.

Quinto: L'intero procedimento consisteva nel comprendere il significato delle parti dell'intera struttura, il che portava a strutturare il tutto in $(a-1)$ parti più la regione critica in diminuzione.

Il risultato vale chiaramente per qualsiasi valore $\frac{1}{a}$ possa assumere, ammesso che a sia maggiore di 1. Nella serie che ha inizio con $\frac{1}{2}$, naturalmente, non ci sono $(a-2)$ parti: poiché $a-2$ è uguale a zero, la serie tende a 1. Se $\frac{1}{a}$ è uguale o maggiore di 1, non sono date le condizioni per questa strutturazione: la somma aumenterà sempre, non tenderà ad un limite.

Ma per quanto riguarda i valori compresi tra $\frac{1}{2}$ e 1, ad esempio $\frac{3}{4}$? Dapprima sembrava non ci fosse alcun modo di comprensione strutturale. La via si aprì con il vedere $\frac{3}{4}$ non come parte di 1, ma come $\frac{1}{4}$ di 3, prendendo 3 come « l'intero »:



FIG. 189

Questo diede la base per comprendere il destino della regione critica, ecc., che qui risulta in modo interessante più complessa, rispetto ai casi precedenti. Ma non riferirò i passaggi successivi che hanno a che fare con questo o con altri problemi affini.

Se ci volgiamo a considerare il procedimento consueto (moltiplicazione della serie e sottrazione) diventa chiaro che, sebbene esso sia tanto più veloce, ed esteriormente tanto più elegante; sebbene valga ugualmente sia per le strutture considerate prima, sia per i casi più complessi, tuttavia esso resta un artificio, nel senso che non dà alcuna comprensione diretta di quello che avviene dal punto di vista strutturale.

Naturalmente tali eleganti processi estrinseci che portano a soluzioni rapide, sono utili; ma è necessaria la via più lunga allo scopo di comprendere veramente la costruzione, di rendersi conto di quanto accade. Per quanto riguarda il trovare la soluzione, il primo modo può essere o soltanto un avvenimento casuale, oppure una tattica astuta, il risultato di alcune appropriate equazioni, che portano alla soluzione senza dare una visione approfondita della natura della serie. Senza dubbio, esso può anche essere stato originato dalla penetrazione strutturale di una singola caratteristica della serie, per esempio la trasponibilità, il fatto che se la si moltiplica per a o per a^2 , si ottiene la stessa serie ad eccezione dei primi numeri; ma questo non è sufficiente per raggiungere la soluzione attraverso una comprensione strutturale.

APPENDICE 7

Max Wertheimer: Bibliografia

1. Psychologische Tatbestandsdiagnostik (con J. Klein). *Arch. f. Kriminalanthrop. u. Kriminalistik*, 1904, 15, 72-113.
2. Experimentelle Untersuchungen zur Tatbestandsdiagnostik. *Arch. f. d. ges. Psychol.*, 1905, 6, 59-131. (Lezione inaugurale) Leipzig: Engelmann, 1905, pp. 1-70.
3. Über die Assoziationsmethoden. *Arch. f. Kriminalanthrop. f. Kriminalistik*, 1906, 22, 293-319.
4. Tatbestandsdiagnostische Kombinationsversuche (con O. Lippmann). *Zschr. f. angew. Psychol.*, 1907, 1, 119-128.
5. Musik der Wedda. *Sammelbände d. internat. Musikgesellschaft*, 1910, 11, 300-309.
6. Über das Denken der Naturvölker: 1. Zahlen und Zahlgebilde. *Zschr. f. Psychol.*, 1912, 60, 321-378. Ristampato in n. 28. Traduzione ridotta in Ellis, W. D., *A sourcebook of gestalt psychology*. New York: Harcourt Brace, 1938, pp. 265-273.
7. Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung. *Zschr. f. Psychol.*, 1912, 61, 151-265. Ristampato in n. 28. Pubblicato anche separatamente (Habilitationsschrift) Leipzig: Barth, 1912, pp. 1-105. Traduz. in Shipley, T. (Ed.), *Classics in modern psychology*. New York: Philosophical Library, 1959, Cap. 31.
8. Über Schlussprozesse im produktiven Denken. Berlin: De Gruyter, 1920, pp. 22. Ristampato in n. 28. Trad. ridotta in Ellis W. D., *A sourcebook of gestalt psychology*. New York: Harcourt, Brace, 1938, pp. 274-282.
9. Über die Wahrnehmung der Schallrichtung (con E. M. von Hornbostel). *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1920, 20, 388-396.
10. Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt: I. Prinzipielle Bemerkungen. *Psychol. Forsch.*, 1922, 1, 47-58. Traduzione ridotta in Ellis, W. D., *A sourcebook of gestalt psychology*. New York: Harcourt, Brace, 1938, pp. 12-16.
11. Bemerkungen zu Hillebrands Theorie der stroboskopischen Bewegungen. *Psychol. Forsch.*, 1923, 3, 106-123.
12. Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt: II. *Psychol. Forsch.*, 1923, 4, 301-350. Traduzione ridotta in Ellis, W. D., *A sourcebook of gestalt psychology*. New York: Harcourt, Brace, 1938, pp. 71-88; e in Beardslee, D. C. e Wertheimer, M. (Eds.), *Readings in perception*. New York: Van Nostrand, 1958, pp. 115-135.
13. Über Gestalttheorie. Conferenza alla Società kantiana, Berlino, Dicembre 17, 1924. *Symposio: Philos. Zschr. f. Forschung u. Aussprache*, 1925, Erlangen: Philosophische Akademie, 1925, pp. 1-24. Traduzione ridotta in Ellis, W. D., *A sourcebook of gestalt psychology*. New York: Harcourt, Brace, 1938, pp. 1-11. (Traduzione integrale in *Soc. Res.*, 1944, 11, 78-99. Vedi n. 33).
14. Zu dem Problem der Unterscheidung von Einzelinhalt und Teil. *Zschr. f. Psychol.*, 1933, 129, 353-357.
15. On truth. *Soc. Res.*, 1934, 1, 135-146.

16. Some problems in the theory of ethics. *Soc. Res.*, 1935, 2, 353-367.
17. On the concept of democracy. In Ascoli, M. e Lehmann, F. (Eds.), *Political and economic democracy*. New York: Norton, 1937, pp. 271-283.
18. A story of three days. In Anshen, Ruth N. (Ed.), *Freedom: its meaning*. New York: Harcourt, Brace, 1944, pp. 555-569.
19. *Productive thinking*, New York: Harper, 1945. Tradotto in giapponese da Tatsuro Yatabe e pubblicato in Tokyo da Iwanami Genai Sōsho, 1952. Traduzione tedesca di Wolfgang Metzger, e pubblicata in Francoforte a/M da Waldemar Kramer, 1957. Ediz. ampliata, New York: Harper, 1959.
20. Zur Tatbestandsdiagnostik: eine Feststellung. *Arch. f. d. ges. Psychol.*, 1906, 7, 139-140.
21. Über experimentell-psychologische Analyse einiger hirnpathologischer Erscheinungen. *Ber. über d. V. Kongr. f. exper. Psychol.* (Leipzig: Barth), 1912 (estratto).
22. Review of Vera Strasser's *Psychologie der Zusammenhänge und Beziehungen*, Berlin: Springer, 1921, *Psychol. Forsch.*, 1922, 2, 384.
23. Review of P. Häberlin's *Der Gegenstand der Psychologie*, Berlin: Springer, 1921. *Psychol. Forsch.*, 1922, 2, 384-385.
24. Review of E. H. Sanders' *Over den invloed van vermoienis op de optische schijnbewegingen* (*Nederl. Tijdschr. voor Geneeskunde*, 1921, II), *Psychol. Forsch.*, 1923, 3, 175-176.
25. Review of P. Schilder's *Über elementare Halluzinationen des Bewegungssehens* (*Zschr. f. d. ges. Neurol. u. Psychiat.*, 1922), *Psychol. Forsch.*, 1923, 3, 176-177.
26. Review of R. Turnwald's *Psychologie des primitiven Menschen*, in G. Kafka (Ed.), *Handbuch der vergleichenden Psychologie*, 3 voll., Munich: Ernst Reinhardt, 1922. *Psychol. Forsch.*, 1924, 4, 207.
27. Review of H. Rotschild's *Über den Einfluss der Gestalt auf das negative Nachbild ruhender visueller Figuren* (*v. Gräfes Arch. f. Ophthalmol.*, 193, 112, 1-28). *Psychol. Forsch.*, 1924, 5, 365-367.
28. *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie*. Erlangen: Philosophische Akademie, 1925, pp. iv + 184. Ristampa dei nn. 6, 7 e 8.
29. Zum Problem der Schwelle. *Ber. über d. VIII internat. Kongr. f. Psychol.*, 1926. (Groningen: P. Noordhoff, 1947, 447, estratto).
30. Gestaltpsychologische Forschung. In Saupe, E. (Ed.) *Einführung in die neuere Psychologie* (vol. 3 di *Handbücher der neueren Erziehungswissenschaft*). Osterwieck a/H: Zickfeldt, 1^a ed., 1927, pp. 46-53; 2^a e 3^a ed., 1928, pp. 47-54; 4^a e 5^a ed., 1931, pp. 44-51.
31. Tatbestandsdiagnostik. In Abderhalden, E. (Ed.), *Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden*. Berlino e Vienna: Urban e Schwarzenberg, Sev. 6, Parte C2, pp. 1105-1111, 1933.
32. Introduzione a Katona, G., *Organizing and memorizing*. New York: Columbia University Press, 1940. pp. v-vii.
33. Gestalt theory. *Soc. Res.* 1944, 11, 78-99. Traduz. del n. 13.
34. Esperimenti sulla discriminazione: I. Two logical structures, ms. senza data pubblicato da Lise Wertheimer (*Psychol. Rev.*, 1959).
35. II. A critique of Spence's approach, ms. senza data pubblicato da Lise Wertheimer.

INDICE ANALITICO

A-B, metodi, 26-28, 30-32, 71-72, 76, 78-80, 111-112, 137, 165-171, 254-255. Vedi anche Risposte A e Risposte B

A priori, analisi, 172, 180, 221

Abderhalden, E., (Bibl. 313-314)

Abitudine, 15-16, 30-31, 110-112, 119-120, 133-134, 166-167, 173-176, 181-182, 185, 251. Vedi anche Associazione teorica, Esercizio, Ripetizione

Abitudine - famiglia - gerarchia, 18

Accelerazione di un corpo che cade, 221-226

Ach, N., 18

Ackermann, W., 273, 276

Ad hoc, spiegazione, 234

Aiuto, vedi Dare « aiuto »

Algebra, apprendimento dell', 165-174

Alto in basso, andare dall', vedi Gestaltista impostazione, Gestaltista logica

Ambiente e pensiero, 74-75, 96. Vedi anche Distrazione

Analogie dei processi di pensiero, meccaniche, 72; percettive, 65-66, 84-85, 137-140, 260, 279-284. Vedi anche Esempi musicali, Macchine, Mondo magico

Anello, soluzione mediante l', vedi Parallelogrammo

Angoli esterni di un poligono, problema della somma degli, 183, 209-220

Angoli esterni dei solidi, problema della somma degli, 216-220

Angoli interni di un poligono, problema della somma degli, 215, 216, 220. Vedi anche Angoli esterni di un poligono

Angoli di un poligono, vedi Angoli esterni di un poligono, somma degli

Angoli al vertice, problema degli, 109-120

Angolo, natura dell', 140-143

Ann Arbor, 2

Anshen, Ruth N., 195, (Bibl. 313-314)

Antropologici, esempi (di incapacità all'astrazione), 291-295

Apprendimento mediante la pratica, vedi Associazione teorica, Esercizio, Espe-

rienza passata, Prova ed errore, Ripetizione

Area della cornice, vedi Cornice, area della

Area, problema della ricerca, vedi: Cornice, area della, Finestra dell'altare, Parallelogrammo, Quadrato, Rettangolo, Riflessi pedagogici, Trapezoide, Triangolo

Aristotele 13

Aritmetica, apprendimento dell', 174-182. Vedi anche Riflessi pedagogici

Arnheim, R., 5

Asch, S. E., 1, 3, 5, 145, 262

Ascoli, M., (Bibl. 313-314)

Assiomi, vedi Logica tradizionale

Associazione teorica, 9, 11, 14-19, 51-54, 60-61, 68-76, 79-80, 97, 101-108, 110-111, 166-167, 173-182, 251-252, 254, 265, 268-269

Astrarre, difficoltà ad, 291-295

Atteggiamenti e pensiero, 8-9, 30-31, 74-75, 144, 194-198, 263-264, 290

Attrito, problema dell' - nell'inerzia, 222-228

Aufgabe, 18

B « elegante », metodo del, 169

Bastoncino in equilibrio, 305-307

Beardslee, D. C., 64, 74, 105, 139, (Bibl. 313-314)

Bloomington, 2

Bohr, N., 35

Borne, Ray, Mrs., 3

Brouwer, 48

Bryn Mawr, Istituto, 2

Bubler, K., 18

Buridano, J., 17

Centramento, 190-207, 245-250. Vedi anche Gestaltista, logica

Chancourtois, de, 35

Chicago, Università di, 1

Commutativa, proprietà, 81-87

Comportamentismo, vedi Associazione teorica, teoria

- Comportamento e logica, 13
 Comprendere, definizione operativa del - attraverso il metodo A-B, 31
 Concetti di classe, 12, 139, 152, 266-275
 Concezioni tradizionali di pensiero, 7-9, 13-19, 51-53, 242-246, 254-255, 262-277. Vedi anche *Associazione teorica*, *Logica tradizionale*
 Condizionamento, 15, 17. Vedi anche *Associazione teorica*
 Contiguità, 15. Vedi anche *Associazione teorica*
 Cornice, area della, 88
 Corpo che rotola, 222-224
 Costellazione, teoria della, 18
 Crini di un cavallo, numero dei, 288-290
 Cristallizzazione, problema della - in fisica, 68
 Curiosità, 7, 104, 187
 Dare aiuto, 68-72, 77, 99-102, 103
 Deduzione, vedi *Logica tradizionale*
 Deficienza mentale, 13, 91 sg., 291-295
 Denkpsychologie, 18
 Dewey, J., 18
 Di Piazza, Maria, 1
 Distrazione, effetto sul pensiero produttivo della, 29, 30
 Divisione, significato strutturale della, 146-147
 Divisione di una somma, problema della, 143-144
 Duncker, K., 145
 «e» in logica, 210, 273-277
 Effetto, legge dell', 16, 175, 187. Vedi anche *Ricompensa*
 Einstein, A., 1, 10, 183, 226, 229-250
 Einstellung, 145-147
 Elkan, Mr. e Mrs. Benno, 1
 Ellis, W. D., 12, 64, 74, 75, 105, 138, 141, 184, 197, 267, (Bibl. 313-314)
 Esclusione, prova mediante il principio di, 48
 Esercizio, 15, 30, 38, 53, 60, 72, 79-80, 86, 111, 134-135, 145-147, 166-168, 173-182, 251-252, 263, 268, 302-303
 Esperienze negative, e pensiero, 94, 102
 Esperienza passata, 15, 53, 67, 68-81, 101, 166-167, 267-268. Vedi anche *Abitudine*, *Associazione teorica*, *Esercizio*, *Ripetizione*
 Familiarità, vedi *Esperienza passata*
 Fenomenologia, 18
 Finestra dell'altare, problema della, 285-287

- Fisica, problemi di, vedi: *Attrito*, *Bastoncino in equilibrio*, *Cristallizzazione*, *Einstein*, *Galilei*, *Galvanometro*, *Inerzia*, *Più tre meno tre*, *Sparare al bersaglio*
 Fitzgerald, formula di, 234, 245
 Forbici, soluzione mediante le, vedi *Parallelogrammo*
 Forza impressa, vedi *Vis impressa*
 Galilei, G., 160, 183, 221-228, 240
 Galvanometro, problema del, 157-164
 Gauss, problema di, 121-156, 183; analisi strutturale del -, 133-134; estensione del -, 125-156
 Generalizzazione, 12-13, 30-31, 52, 124, 164, 168, 266, 307. Vedi anche *Associazione teorica*, *Logica tradizionale*
 Geometria, euclidea, 6, 44-45; non euclidea, 44-45, 216
 Gestaltista, impostazione, 74, 144, 154-156, 183-184, 228, 251, 277, et passim; applicata all'area del parallelogrammo, 61-67; applicata all'area del rettangolo, 48-52; applicata alla descrizione dell'ufficio, 197-207; applicata al gioco del volano, 190-196; applicata al problema degli angoli al vertice, 115-118; applicata al problema di Gauss, 134; applicata al problema del più tre meno tre, 160, 164; applicata al problema del ponte, 103-108; applicata al problema della somma degli angoli, 218-220; applicata alla proprietà commutativa, 82-87; applicata allo sviluppo della teoria della relatività, 242-250; applicata all'umorismo, 289-290. Vedi anche *A-B metodo*, *Gestaltista logica*, *Mezzi e risultati*, *Qualità d'insieme*, *Riflessi pedagogici*
 Gestaltista, logica, 6, 228, 253-277, 279-284, et passim; applicata al gioco del volano, 190-195; applicata al problema degli angoli al vertice, 115-116; applicata al problema del più tre meno tre, 160-164; applicata al problema del ponte, 105-106; applicata al problema della somma degli angoli, 218-220. Vedi *Centramento*, *Concetti di classe*, *Dare aiuto*, «e», in *Logica*, *Identità*, *Lacune*, «no» in *logica*, *Omotipo Relazione*, *Ro-relazioni*, *Se-allora in logica*, *Verità*
 Gottschaldt, K., 279
 Graduate Faculty of Political and Social Science, 3
 «Gruppi quadrati», 138-139
 Häberlin, P., (Bibl. 313-314)
 Harvard, Università di, 1
 Hegel, G. W. F., 18

- Henle, Mary, 5
 Hilbert, D., 273, 276
 Hornbostel, E. M. von, (Bibl. 313-314)
 Hubbell, Marian B., 67
 Hull, C. L., 11
 Hume, D., 15
 Husserl, E. G., 18
 Idee, fuga di, 17
 Identità, principio di, 171-172, 273-277
 Indiana, Università dell' (Bloomington), 2
 Induttiva, logica, 13-14, 36-38, 221, 267-268
 Inerzia, legge d', 221-228
 Infeld, L., 226, 245
 Intelligenza, 13, 91 ssg., 291-295
 Intuizione, vedi «Vedere la luce»
 Jevons, W. S., 17
 Jobson, A., 1
 Kafka, G., (Bibl. 313-314)
 Kant, I., 119
 Katona, G., 87, 108, 145-146, 178, 264, (Bibl. 313-314)
 Klein, J., (Bibl. 313-314)
 Köbler, W., 3, 97
 Kopfermann, H., 64
 Koyré, A., 221
 Krolík, W., 67
 Külpe, O., 18
 Labirinto, corsa nel, 136, 263
 Lacune nelle strutture durante il processo di pensiero, 59, 140, 185, 252, 257
 Lati, numero dei -, nei cubi, piramidi ecc., 54
 Legge dell'effetto, vedi *Effetto, legge dell'*
 Lehmann, F., (Bibl. 313-314)
 Levy, E., 75, 195, 197, 258
 Lewin, K., 75
 Lex parsimoniae, vedi *Parsimonia, legge della*
 Linneo, 270
 Lippmann, O., (Bibl. 313-314)
 Locke, J., 173
 Logica, e macchine, 17; musicale, vedi *Musicali, esempi*; e pensiero, 16-17, 46. Vedi anche «e» in *logica*; *Gestaltista logica*; *Induttiva logica*; *Logica tradizionale*; «no» in *logica*; «se-allora» in *logica*
 Logica classica, vedi *Logica tradizionale*
 Logica matematica, vedi *Logistica*
 Logica tradizionale, 8-9, 11-15, 81, 101, 254, 255; deduzione, 13-14; difficoltà della -, 17-18, 51-53, 110, 113, 172-174,

- 254-255, 264-277; implicazioni comportamentali della -, 13; induzione, 13-14; operazioni della - nel problema degli angoli al vertice, 110, 113; operazioni della - nel problema di Einstein, 242-244; operazioni della - nel problema del parallelogrammo, 81-87; sillogismi, 12, 14, 243, 266-270; storia della -, 17-19; vantaggi della -, 13
 Logistica, 18, 198-207, 253, 273 ssg.
 Lorentz, trasformazione di, 234, 241, 245, 247, 250
 Luchins, A., 145
 Lullo, R., 17
 Macchine, educative, 107-108, 172, 179-181; logiche, 17; per ottenere l'area del parallelogrammo, 79; per ottenere l'area del rettangolo, 39; per simulare la traiettoria di una palla lanciata, 72
 Mach, E., 213, 221
 Maier, N. R. F., 69, 70, 71, 102, 144, 145
 Marx, K., 18
 Matematica, vedi *Algebra*, *Angoli esterni*, *Angoli interni*, *Angoli al vertice*, *Angolo*, *Area*, *Aritmetica*, *Divisione di una somma*, *Einstein*, *Finestra dell'altare*, *Lati*, *Parallelogrammo*, *Più tre meno tre*, *Quadrato area del*, *Quadrato di un binomio*, *Rettangolo*, *Riflessi educativi*, *Serie*, *prodotti di*, *Somma degli angoli*, *Somma di una serie*, *Somma di vettori*, *Spigoli di un cubo*, *Trapezoide*, *Triangolo*
 Maxwell, equazioni di, 232, 245
 Mayer, Clara W., 1, 3, 5
 Meccanismi celesti, 228
 Mendeleev D. I., 35
 Metodi per lo studio del pensiero, 10-12. Vedi anche *Operazioni*, *Strategia della ricerca*
 Metzger, W., (Bibl. 313-314)
 Mezzi e risultato, 76-81, 89. Vedi anche *Risultati del pensiero*
 Michelson, esperimento di, 232-235, 245, 247
 Michigan, Università del, (Ann Arbor), 2
 Mill, J. S., 14
 Moltiplicazione, 38, 42-44, 49, 53, 144, 174-182
 Mond, Clara, 1
 Mondo magico, 97, 103, 180
 Moseley, H., G., 36
 Motivazione, 7-8, 63-67, 87-89, 100, 103-104, 148-149, 155-156, 181-182, 193-194, 206-207, 216-218, 234-235, 251-254, 261-263, 283, 302-303

Moto perpetuo, 239
Movimento, vedi *Movimento assoluto*, *Einstein*
Movimento assoluto, 231
Mowatt, Marian B. H., vedi *Hubbell Marian B.*
Musicali, esempi, 129, 259, 270-273, 283-284
Naturalistica, impostazione, 18
Negazione, vedi «no» in logica
Nettuno, scoperta di, 12
New School for Social Research, 1
Newton, I., 228, 241
 «No», in logica, 275
Omotipo, 105-106, 117, 160, 201, 280-281
Operazioni, cieche alla struttura, 6; della vera gestalt, 5; tabella delle - dell'associazione, 15; tabella delle - della logica della gestalt, 252-253; tabella delle - della logica induttiva, 14; tabella delle - della logica tradizionale, 12. Vedi anche *Associazione teorica*, *Gestaltista logica*, *Loggia tradizionale*
Organon di Aristotele, 13
Orientamento egocentrico, 191-207, 258
Parallelogrammo, problema dell'area del, 21-36, 54-89, 183, 288, 299-304; analisi sperimentale, 23-38; esperienza passata e -, 68-81; impostazione sensata, 57-67, 76-81; insegnamento tradizionale del -, 21-23, 29, 33 sgg., 72; metodo A-B, 26-28, 30-32, 76-81; metodo induttivo, 36-37; metodo del regolo pieghevole, 56; operazioni della logica tradizionale e -, 81-87; procedimenti cattivi, 32-34, 38-42; e prova, 22, 40-42, 81, 86-87, 303-304; prova della comprensione, 23-35; reazioni cieche, 25-32, 35, 60-61, 69; soluzione mediante l'anello, 58-59, 62, 63, 65; soluzione mediante file infinitamente sottili, 59; soluzioni mediante le forbici, 56-57; 65-67
Parole e pensiero, 244-245
Parsimonia, legge della, 47
Parti, necessarie e arbitrarie, 279-284
Pedagogici, riflessi, vedi *Riflessi pedagogici*
Pensiero politico, 261-262
Pensiero primitivo, vedi *Antropologici, esempi*
Pensiero produttivo, natura generale del, 7-9, 251-255, et passim
Percettive, analogie, vedi *Analogie dei processi di pensiero*
Personalità e pensiero, 18-19, 74-75, 190, 194-196, 197-207, 290

Pillsbury, W. B., 16, 18
Più tre meno tre, problema del, 157-164; analisi delle soluzioni, 160-164
Ponte, problema del, 91-108; analisi della soluzione, 101-108; macchina cieca per il -, 107-108; logica gestaltista della -, 105-107. Vedi anche *Bastoncino in equilibrio*
Pragmatismo, 18
Pregnanza, principio della, 255, 261
Problemi, tipi di, 5, 259, 262-263. Vedi anche *Fisica*, *Matematica*, *Situazioni sociali*, *Somma di vettori*
Procedimenti «brutti», 32-34, 38-42, 46-48, 52-54, 60-61, 312
Procedimenti sensati, vedi *Gestaltista impostazione*, *Gestaltista logica*
Prout, W., 35
Prova, 11-14, 24, 40-41, 81, 86-87, 303-304; «cieca», 35, 43-44; attraverso il principio d'esclusione, 48; del teorema del parallelogrammo, 22; del teorema degli angoli al vertice, 109, 118
Prova ed errore, 16, 18, 59-61, 79-80, 93-94, 101, 217, 263, 268, 305-306. Vedi anche *Associazione teorica*, *Ricompensa*
Quadrato, area del, 44
Quadrato di un binomio, problema del, 167-174
Qualità d'insieme, 139, 150-154. Vedi anche *Gestaltista impostazione*
Quiete assoluta, 231
Rafforzamento, vedi *Associazione teorica*
Raggruppamento, 137-139. Vedi anche *Gestaltista impostazione*
Reazione, tipi di, vedi *Tipi di reazione di problemi*
Relatività, teoria della, 229-250
 «Relazioni» non decisive per il pensiero produttivo, 52, 116-117, 273-276
Rettangolo, problema dell'area del, 38-46, 291, 295-299; e associazione teorica, 51-54; logica tradizionale, 51-53; procedimenti «ciechi», 38-46; procedimenti «sensati», 42-43
Ricompensa, 11, 97, 101, 104, 174-175, 187-188. Vedi anche *Effetto, legge dell'*
Riflessi pedagogici, 7-8, 33-34, 49, 50, 88-89, 141, 143-147, 165-182, 291, 294-304, et passim
Rinascimento, 13
Riorganizzazione, vedi *Gestaltista impostazione*
Ripetizione, 15, 18, 30, 128, 145-146, 268-269, 302-303

Risoluzione e posizione di un problema, 156
Risposte A e Risposte B, 26-28, 30-32, 76-77, 111-112, 115-118, 129-132
Risultati del pensiero, 86-89, 156, 254-260
Ro-relazioni, 51, 70, 76, 95, 103, 105, 106, 115, 159, 160, 172, 181, 253, 289, 307
Rothschild, H., (Bibl. 313-314)
Russell, B., 18
Rutherford, E., 35
Sanders, E. H., (Bibl. 313-314)
Saupe, E., (Bibl. 313-314)
Scacchi, 190
Scheerer, M., 185
Schilder, P., (Bibl. 313-314)
Schiller, P. von, 139
Schulte, H., 75, 197
 «Se-allora», nella logica, 273-277
Selz, O., 18
Serie, prodotti di, 130-131
Shipley, T., (Bibl. 313-314)
Siemssen, 136
Simmel, G., 162
Simmetria, vedi *Gestaltista impostazione*
Situazioni sociali, analisi gestaltista delle, 19, 183-207
Smith College, 2
Somma degli angoli di un poligono, vedi *Angoli esterni*
 «Somma di connessioni», 97, 182. Vedi anche *Associazione teorica*
Somma di una serie, problema della, 47, 308-312. Vedi anche *Gauss, problema di*
Somma di vettori, problema della, 141-143
Sparare al bersaglio, problema dello, 305-306
Spigoli di un cubo, di una piramide, ecc., problema degli, 54
Spinoza, B., 16
Stern, Catherine, 87, 140, 147
Stern, W., 31
Storia della psicologia del pensiero, vedi *Associazione teorica*, *Concezioni tradizionali di pensiero*, *Logica tradizionale*
Strasser, Vera, (Bibl. 313-314)
Strategia della ricerca nello studio del pensiero, 9-11, 71-72, 96-97, 107-108, 251-253. Vedi anche *A-B metodo*, *Dare «aiuto»*, *Procedimenti «brutti»*
Strutturale, impostazione, 48-51, 251-277 et passim; applicata a: l'area del parallelogrammo, 57-59, 61-65; l'area del rettangolo, 48-49; le descrizioni sociali, 198-200; insegnamenti attorno all'area, 291-304; il problema degli angoli al

vertice, 117-118; il problema di Einstein, 242-250; il problema di Galileo, 226-228; il problema di Gauss, 134; il problema del «più tre meno tre», 160; il problema del ponte, 105-107; il problema della somma degli angoli, 219-220; il problema della somma di una serie, 308-312; il problema del volano, 190-193. Vedi anche *Gestaltista impostazione*, *Gestaltista logica*
Swarthmore College, 2
Temperatura assoluta, 240-241
Tendenza verso strutture migliori, 67. Vedi anche *Gestaltista impostazione*, *Gestaltista logica*, *Strutturale impostazione*
Ternus, J., 276
Thorndike, E. L., 15, 112, 165-169, 174-175, 178
Thurnwald, R., (Bibl. 313-314)
Tipi di reazione ai problemi, 55, 113-115, 123-129, 148-149, 157-158, 186-188
Trame relazionali, 18, 198-207
Transfer, 44, 109, 160. Vedi anche *Trasposizione*
Trapezoide, problema dell'area del, 26, 87-88, 302
Trasposizione, 78-79, 93 sgg., 251-253, 270-273. Vedi anche *A-B metodo*
Triangolo, area del, 127, 302
Trucco magico, copia di un, 99
Umorismo e procedimenti senza senso, 33, 143-144, 288-290
 «Vedere la luce», 64, 67, 78, 100-101, 104, 126, 148-150, 183-186, 194-195, 212, 216-217, 251-253
Velocità della luce, 230-242
Verità, 12, 73-74, 252, 273, 277
Vis impressa, 221, 222, 227
Volano, problema del gioco del, 183-196
Wertheimer, Lise, 5, (Bibl. 313-314)
Wertheimer, Max, 2, 3, 5, 12, 64, 66, 67, 74, 75, 105, 138, 141, 154, 184, 185, 192, 195, 197, 235, 252, 256, 264, 267, 276, 294, 298, (Bibl. 313-314)
Wertheimer, Michael, 5-6, 64, 74, 105, 138, 279, (Bibl. 313-314)
Wertheimer, Valentin, 3, 5
Whitehead, A. N., 18
Wohlwill, E. von, 221
Woodworth, R. S., 154
Würzburg, scuola di, 20
Zener, K., 145

INDICE GENERALE

SUL METODO DI WERTHEIMER (Presentazione di P. Bozzi)	pag. v
Ringraziamenti (Max Wertheimer)	1
Nota alla prima edizione (S. E. Asch, W. Köhler, C. W. Mayer)	3
Nota all'edizione ampliata (M. Wertheimer)	5
INTRODUZIONE	7
<i>Le due impostazioni tradizionali, 11 - Difficoltà cruciali, 16 - Sviluppi moderni, 18</i>	
CAP. I - L'AREA DEL PARALLELOGRAMMO	21
I. Gli scolari imparano la soluzione: risolvono molto bene i compiti assegnati	21
<i>Hanno capito veramente? - Lo psicologo fa una domanda, 23 - Altri problemi con risposte A e B, 26 - Il metodo delle copie, 27 - Viene preso in considerazione un caso limite, 29 - Qual è il punto cruciale?, 30</i>	
II. Lo psicologo introduce procedimenti brutti	32
Con il parallelogrammo	33
<i>L'induzione di un ragazzo e la sua prova, 35 - Un'ipotesi strutturalmente cieca, 36 - Un esempio rude, 37</i>	
Con il rettangolo	38
<i>Confusione tra area e perimetro, 38 - Viene presa in considerazione una macchina fantastica, 39 - Uno strano procedimento con prova, 40 - Caratteristiche essenziali dei procedimenti brutti, 41 - Vengono prese in esame certe obiezioni, 44</i>	
III. Processi produttivi	48
Trovare l'area del rettangolo	48
<i>Carattere delle operazioni, 50 - Osservazione circa il punto di vista tradizionale, 51 - Osservazione circa le relazioni, 52 - Osservazione circa la relazione fra mezzi e fini, 53 - Circa il significato della moltiplicazione, 54</i>	
Trovare l'area del parallelogrammo	54
<i>Processi produttivi nei bambini, 57 - Caratteristiche delle operazioni e dei processi, 59 - Un'osservazione circa la ripetizione meccanica, 60 - Grafici dei processi sensati, 61 - Punti in questione. Passaggi drammatici nel pensiero, come nella percezione, 67 - Che cosa bisogna fare, 67</i>	

IV. Un modo facile di venire a capo del problema? - Il ruolo dell'esperienza precedente	68
<i>Una domanda rimasta prima senza risposta, 76 - L'osservazione di un logico; una risposta, 81 - E la meta? 87</i>	
CAP. II - IL PROBLEMA DEL PONTE *	91
CAP. III - IL PROBLEMA DEGLI ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE	109
<i>Difficoltà di cogliere il significato della domanda, 109</i>	
I. L'esposizione della prova; sbagli sciocchi e procedimenti sensati	110
<i>Esercizi del tipo A e B, 112</i>	
II. Processi di scoperta della prova	113
III. Problemi strutturali: la struttura di una coppia di equazioni	115
<i>Osservazioni circa una formulazione teorica sbagliata, 116 - Perché il problema è così arduo, 117 - La direzione del pensiero, 117</i>	
IV. Osservazioni circa un assunto tradizionale fondamentalmente fuorviante, riguardo la natura del pensiero umano	118
CAP. IV - UNA STORIA FAMOSA: IL PICCOLO GAUSS	121
I. Un problema per il lettore	121
<i>La storia del piccolo Gauss, 122 - Tre tipi di processi produttivi nei bambini, 123-126 - Differenze e caratteristiche comuni dei tre tipi, 128</i>	
II. Lo psicologo si trova alle prese con i punti in discussione	129
<i>Parecchie questioni di struttura, 131</i>	
III. Perché il compito è così difficile per molti?	133
<i>Fattori che giocano a favore e contro soluzioni produttive, 134 - Difficoltà di cogliere le strutture, 134 - Semplificazioni delle strutture, 135 - Osservazioni circa il fare e disfare, 135 - Digressione sul lavoro e sulla danza, 136 - Continua lo studio delle strutture, 137 - Il gruppo quadrato di lettere e numeri, 138 - Percezione e ragionevolezza, 139 - Problema con gli angoli, 141</i>	
IV. Lo psicologo ha strane esperienze con problemi semplificati strutturalmente. Cecità di fronte alle strutture	143
<i>Osservazioni circa la funzione della ripetizione meccanica, 145 - Commenti di un famoso psicologo, 146 - Commenti di un matematico, 146 - Osservazioni di un altro psicologo, 147</i>	
V. Approfondendo l'argomento	148
<i>Un rapporto di un processo di pensiero, 148 - Osservazioni sulle qualità d'insieme, 153 - Problema la cui soluzione è solo una parte, 156 - Un'osservazione circa l'esattezza, 156</i>	

* Tutto il materiale segnato con asterisco compare per la prima volta in questa edizione.

CAP. V - PIU TRE, MENO TRE	157
CAP. VI - IL QUADRATO DI UN BINOMIO; IMPARARE L'ARITMETICA *	165
CAP. VII - DUE RAGAZZI GIOCANO AL VOLANO; UNA RAGAZZA DESCRIVE IL SUO UFFICIO	183
<i>Breve esame retrospettivo, 183</i>	
I. Storia della partita al volano	185
<i>Tipi di reazione di fronte al problema, 187 - Seguito della storia: la soluzione del ragazzo, 188 - Caratterizzazione dei momenti e delle operazioni, 191 - Il centramento, 192 - Circa l'atteggiamento, 194 - Circa la transizione, 194 - Una breve osservazione su argomenti importanti, 195</i>	
II. Una ragazza descrive il suo ufficio. L'ego nella descrizione	196
<i>Discussione in merito alla struttura della descrizione, 197 - Reti di relazione, 198 - L'origine delle frecce, 205 - La supposizione, 206</i>	
CAP. VIII - TROVARE LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN POLIGONO	209
<i>Il processo inizia, 209 - La prima supposizione, 209 - L'« intuizione », 211 - Osservazione circa la formula abituale, 212 - Una strana idea, 215 - Gli angoli interni. Il « buco », 216 - Solidi?, 216 - Carattere del processo, 219</i>	
CAP. IX - UNA SCOPERTA DI GALILEO	221
<i>Introduzione, 221 - La situazione semplificata, 222</i>	
I. Che cosa succede alla velocità dei corpi in movimento?	223
<i>L'ordine delle accelerazioni, 223</i>	
II. L'altra faccia del quadro	224
III. Il vuoto. La scoperta	225
<i>Le esigenze strutturali contro la familiarità, 225 - I cambi strutturali, 227</i>	
CAP. X - EINSTEIN: IL RAGIONAMENTO CHE PORTÒ ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ	229
I. Atto I. L'inizio del problema, 230 - Atto II. La luce determina uno stato di quiete assoluta?, 231 - Atto III. Lavoro sull'unica alternativa, 232 - Atto IV. Einstein e il risultato di Michelson, 232 - Atto V. La soluzione di Lorentz, 234 - Atto VI. Riesame della situazione teoretica, 234 - Atto VII. Passaggi positivi verso la chiarificazione, 235 - Scoperta di un vuoto, 236 - Conseguenze, 238 - Atto VIII. Le invarianti e la trasformazione, 239 - Atto IX. Il movimento, lo spazio, un esperimento ideale, 241 - Atto X. Problemi sperimentali e di osservazione, 242	
II. Quali furono le caratteristiche principali nel processo di pensiero?	242
<i>Un'osservazione riguardo alle interpretazioni tradizionali, 242 - Circa la funzione degli assiomi, 244 - Esame della direzione del ragionamento, 245 - I cambiamenti di struttura, 248</i>	

Conclusione: DINAMICA E LOGICA DEL PENSIERO PRODUTTIVO 251

Riassunto, 251 - Tavola delle operazioni come vengono considerate dalla teoria della forma, 252 - Tre gruppi di problemi, 253 - Teoria dinamica del pensiero, 260 - Sulla logica gestaltista, 260 - Osservazioni sul concetto di « classe » e diverse operazioni della logica, 266 - Direzione nel processo del ragionamento, 277

APPENDICE 1. SUL PROBLEMA DELLA DISTINZIONE TRA COMPONENTE ARBITRARIA E PARTE NECESSARIA *	279
APPENDICE 2. LA FINESTRA DELL'ALTARE *	285
APPENDICE 3. L'ISPETTORE SCOLASTICO *	288
APPENDICE 4. SUGGERIMENTI PER INSEGNARE L'AREA	291
APPENDICE 5. IL BASTONCINO IN EQUILIBRIO *	305
APPENDICE 6. LA SOMMA DI UNA SERIE	308
APPENDICE 7. MAX WERTHEIMER: BIBLIOGRAFIA *	313
INDICE ANALITICO	315

Finito di stampare nel mese di febbraio 1997
presso Giunti Industrie Grafiche S.p.A.
Stabilimento di Prato

