

Soluzione

Utilizziamo l'Equazione 2.10, valida per il caso Cobb-Douglas:

$$MRS(K, L) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L}$$

da cui:

$$\frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha} MRS(K, L)$$

o, passando ai logaritmi:

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln(MRS(K, L))$$

Utilizzando l'Equazione 2.11, che ci dice che $\sigma = \frac{d \ln(\frac{K}{L})}{d \ln(MRS(K, L))}$, otteniamo facilmente $\sigma = 1$. Nel caso della Cobb Douglas, l'elasticità di sostituzione fattoriale deve essere sempre pari all'unità. Da un punto di vista grafico, questo implica che la "curvatura" degli isoquanti è sempre la stessa.

I parametri α e β incidono sulla pendenza dell'isoquanto (vedi Figura 2.13 seguente), ma non sulla sua "curvatura". Per questo la Cobb-Douglas è considerata una funzione di produzione poco flessibile.

ESEMPIO 2.9

Per gli appassionati di matematica ...

Si analizzi una funzione di produzione nota come CES, Constant Elasticity of Substitution³⁵, definita come segue, per $-\infty \leq \rho \leq 1$ e $0 < a < 1$:

$$y = [aL^\rho + (1-a)K^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

e si calcoli l'elasticità di sostituzione fattoriale.

Soluzione

Dalla definizione del saggio marginale di sostituzione (MRS) dell'Equazione 2.8, utilizzando la regola di derivazione di funzione di funzione³⁶ possiamo scrivere:

³⁵Si tratta di una funzione di produzione molto più flessibile della Cobb-Douglas e molto più utilizzata per le analisi empiriche.

³⁶Si può infatti scrivere: $y = [z(L, K)]^{\frac{1}{\rho}}$, dove $z(L, K) = aL^\rho + (1-a)K^\rho$ e utilizzare la formula: $\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{dy}{dz} \frac{\partial z}{\partial L}$.

$$MRS(K, L) = \frac{\frac{1}{\rho} [aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1} a\rho L^{\rho-1}}{\frac{1}{\rho} [aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}-1} (1-a)\rho K^{\rho-1}} = \frac{a}{1-a} \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}$$

che può essere scritta:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{1-a}{a} MRS(K, L)\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

e, passando ai logaritmi:

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{1-\rho} \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + \frac{1}{1-\rho} MRS(K, L)$$

quindi, applicando la definizione dell'elasticità di sostituzione fattoriale dell'Equazione 2.11:

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

Pertanto, dato che $-\infty \leq \rho \leq 1$, abbiamo che l'elasticità di sostituzione fattoriale deve essere compresa tra 0 (per ρ che tende a meno infinito) e ∞ (per ρ che tende a 1). Se $\sigma = 0$, siamo nel caso di perfetta complementarità (l'elasticità di sostituzione fattoriale è zero, cioè non è possibile sostituire), se $\sigma = \infty$, siamo nel caso di perfetta sostituibilità tra fattori produttivi.

La funzione di produzione CES permette allora di rappresentare qualsiasi "curvatura" dell'isoquante, a seconda del valore assunto dal parametro ρ .

Esercizio 2.14

Data la funzione di produzione:

$$y = 7\ln(L) + 3\ln(K)$$

si calcoli l'elasticità di sostituzione fattoriale.

2.2.2.5 La mappa degli isoquanti L'isoquante della Figura 2.7 di pagina 52 è stato costruito per un dato livello di produzione. Da notare che, per come la figura è stata costruita, qualunque combinazione di fattori lungo l'isoquante permette di ottenere lo stesso livello di produzione.