

Esercitazione 4 - Soluzione

1.

$P(X \leq 3) = 0,10 + 0,15 + 0,20 + 0,25 = 0,7$
 $P(X < 3) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = 0,45$
 $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0,45 = 0,55$
 $P(2 \leq X \leq 5) = 0,20 + 0,25 + 0,20 + 0,06 = 0,71$
 $P(X \leq 2) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = 0,45$
 $E(X) = \sum x f(x) = 0 \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,15 + \dots + 6 \cdot 0,04 = 2,64$
 $V(X) = \sum [x - E(x)]^2 \cdot f(x) = (0 - 2,64)^2 \cdot 0,10 + (1 - 2,64)^2 \cdot 0,15 + \dots + (6 - 2,64)^2 \cdot 0,04 = 2,37$
 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x^2 f(x) - [\sum x f(x)]^2 = 0^2 \cdot 0,10 + 1^2 \cdot 0,15 + \dots + 6^2 \cdot 0,04 - 2,64^2 = 2,37$

3.

La v.c. X ha distribuzione di Poisson con $\lambda = 8$, quindi la funzione di probabilità è data da

$$P(X = x) = f(x) = \frac{8^x e^{-8}}{x!}$$

Inoltre $E(X) = V(X) = 8$. Quindi:

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^5 P(X = x) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} + \frac{8^1 e^{-8}}{1!} + \dots + \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0,1912$$

$$P(6 \leq X \leq 9) = \sum_{x=6}^9 P(X = x) = \frac{8^6 e^{-8}}{6!} + \frac{8^7 e^{-8}}{7!} + \frac{8^8 e^{-8}}{8!} + \frac{8^9 e^{-8}}{9!} = 0,5254$$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - (0,1912 + 0,5254)$$

$$E(X) = 8$$

$$\sqrt{V(X)} = 2,8284$$

2.

La v.c. ha distribuzione binomiale con $n = 10$ e $\pi = 0,05$.

Dalla $P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0,05^x (1 - 0,05)^{10-x}$ si ottiene la seguente tabella:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0,5987	0,3151	0,0746	0,0105	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$$P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 P(X = x) = 0,9138$$

$$E(X) = \sum x f(x) = 0 \cdot 0,5987 + 1 \cdot 0,3151 + \dots + 10 \cdot 0,0000 = 0,5$$

$$V(X) = \sum [x - E(x)]^2 f(x) = (0 - 0,5)^2 \cdot 0,5987 + (1 - 0,5)^2 \cdot 0,3151 + \dots + (10 - 0,5)^2 \cdot 0,0000 = 0,475$$

Oppure, ricordando il valore atteso e la varianza di una binomiale:

$$E(X) = n \cdot \pi = 0,5$$

$$V(X) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi) = 0,475$$

4.

Data $X \sim N(1,25; 0,46^2)$, si può calcolare la v.c. normale standardizzata. Quindi, con l'utilizzo delle tavole possiamo calcolare le seguenti probabilità:

$$P(X \leq 1) = P(Z < (1 - 1,25)/0,46) = \Phi(-0,54) = \Phi(0,54) = 0,2945$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(Z \leq (2 - 1,25)/0,46) - P(Z \leq (1 - 1,25)/0,46) =$$

$$= \Phi(1,63) - \Phi(-0,54) = 0,9485 - 0,2945 = 0,6540$$

In base ai risultati dei punti precedenti è immediato ottenere $P(X \leq 2) = 0,9485$. Di conseguenza la probabilità che un individuo abbia un incidente è pari a $p = 1 - 0,9485 = 0,0515$.

Indicando con Y la v.c. che esprime il numero di assicurati che hanno un incidente su 100 assicurati, cioè $Y \sim \text{Bin}(100; 0,0515)$, la probabilità che più di 5 individui abbiano un incidente è pari a

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - \sum_{y=0}^5 \binom{100}{y} 0,0515^y (1 - 0,0515)^{100-y} = 0,4110$$

5.

Utilizzando le tavole si ricava che i quantili della distribuzione normale standardizzata corrispondenti al 25-esimo e al 90-esimo percentile sono -0,67 e 1,28. Quindi i parametri μ e σ della distribuzione normale si ottengono risolvendo in seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1,4 - \mu}{\sigma} = -0,67 \\ \frac{1,8 - \mu}{\sigma} = 1,28 \end{cases}$$

da cui $\mu = 1,5374$ e $\sigma = 0,2051$. Il valore atteso del diametro di un bullone è $\mu = 1,5374$, mentre una misura dell'inaccuratezza del processo è data dalla deviazione standard $\sigma = 0,2051$. Inoltre:

$$P(X \leq 1,2) = \Phi\left(\frac{1,2 - 1,5374}{0,2051}\right) = \Phi(-1,645) = 1 - \Phi(1,645) \approx 0,05$$

$$P(X > 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 - 1,5374}{0,2051}\right) = 1 - \Phi(2,255) \approx 0,01205$$

Il numero di bulloni di larghezza superiore a 2mm in un lotto di 10 bulloni può essere descritto da una v.c. $Y \sim \text{Bin}(10; 0,01205)$. Quindi

$$P(Y \leq 1) = \sum_{y=0}^1 \binom{10}{y} 0,01205^y (1 - 0,01205)^{10-y} = 0,9938$$