

## Probabilità: concetti di base

- Prova:** (o esperimento aleatorio) è un esperimento caratterizzato da due o più possibili risultati, per il quale esiste incertezza circa il risultato che si realizzerà
- Evento elementare:** ogni possibile risultato dell'esperimento aleatorio, indicato genericamente come  $\omega_i$
- Evento:** insieme di eventi elementari, indicato genericamente come  $E$
- Probabilità:** numero compreso tra 0 e 1 che misura il grado di incertezza connesso al risultato scaturito da una prova

In una data **prova**, l'**evento E**  
si verifica con **probabilità P(E)**

- Sfruttando le operazioni sugli insiemi si possono definire i seguenti eventi:

➔ **Evento impossibile:** è l'evento che non può mai verificarsi e può essere definito come

$$\emptyset \equiv \overline{\Omega}$$

➔ **Evento certo**, ossia l'evento che si verifica sempre in quanto comprende tutti i possibili risultati dell'esperimento. Può essere definito come

$$A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B} = \Omega$$

➔ **Eventi incompatibili:** due eventi  $A$  e  $B$  si dicono incompatibili se

$$A \cap B = \emptyset$$

## Operazioni sugli insiemi

- Le operazioni sugli insiemi possono essere visualizzate attraverso i **diagrammi di Venn**: ogni insieme è rappresentato da una *linea curva chiusa* e si trova all'interno di una *scatola* che rappresenta lo spazio,  $\Omega$ , dei risultati dell'esperimento.
- Unione** di due eventi  $A$  e  $B$ : è l'evento  $E = A \cup B$  che si verifica se almeno uno dei due eventi  $A$  o  $B$  si verificano
- Intersezione** di due eventi  $A$  e  $B$ : è l'evento  $E = A \cap B$  che si verifica se si verificano entrambi gli eventi  $A$  e  $B$
- Negazione** di un evento  $A$ : è l'evento  $A^c$  che si verifica se non si verifica  $A$
- Le operazioni di unione e intersezione godono delle proprietà *commutativa*, *associativa* e *distributiva*.

## Definizioni della probabilità

- Definizione classica:** la probabilità è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili purché essi siano tutti ugualmente possibili.
- Definizione frequentista:** la probabilità di un evento  $E$  è il limite a cui tende la *frequenza relativa* con cui si osserva il verificarsi di  $E$  in un numero  $n$  di *prove ripetute* nelle *stesse condizioni*, quando  $n$  tende a infinito
- Definizione soggettiva:** la probabilità di un evento  $E$  è il *grado di fiducia* che ciascun individuo, in maniera *soggettiva*, attribuisce al verificarsi dell'evento, in base alle *informazioni a sua disposizione*.

# Approccio assiomatico

•La probabilità è una funzione di insieme che associa a ogni evento  $E$  un numero reale. La probabilità sarà indicata con  $P(E)$ .

•La probabilità deve sottostare alle seguenti proprietà assiomatiche:

Postulato 1  $\rightarrow P(A) \geq 0$

Postulato 2  $\rightarrow P(\Omega) = 1$

Postulato 3  $\rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

•A partire dai tre assiomi è possibile derivare tutta una serie di leggi che la probabilità deve rispettare, tra cui:

- $\rightarrow 0 \leq P(E) \leq 1$
- $\rightarrow P(\emptyset) = 0$
- $\rightarrow B \subset A \rightarrow P(B) \leq P(A)$
- $\rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$
- $\rightarrow P(B) = 1 \rightarrow P(B \cap A) = P(A)$
- $\rightarrow P(B) = 0 \rightarrow P(B \cup A) = P(A)$
- $\rightarrow P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## Probabilità condizionate e indipendenza

•A volte si vuole valutare la probabilità di un certo evento  $A$ , sapendo che si è già verificato un evento  $B$  ad esso collegato. Si parla allora di probabilità di  $A$  **condizionata** a  $B$  e si indica come  $P(A|B)$

•La probabilità di  $A$  condizionata a  $B$  si calcola come:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

•Dalla probabilità condizionata segue che (**principio delle probabilità composte**)

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A)$$

•Se il verificarsi dell'evento  $B$  non modifica in alcun modo la probabilità di verificarsi dell'evento  $A$ , i due eventi si dicono **indipendenti**.

•Il concetto di indipendenza è simmetrico e può essere formalizzato in due modi equivalenti:

$\rightarrow$  Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A | B) = P(A)$$

$\rightarrow$  Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

# Il teorema di Bayes

• Si definisce partizione di  $\Omega$  un insieme di eventi  $A_1, \dots, A_j, \dots, A_k$ , tali che:

➡  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , per ogni  $i, j$

➡  $\bigcup_{j=1}^k A_j = \Omega$

## Teorema di Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(A_1) \cdot P(B | A_1) + \dots + P(A_k) \cdot P(B | A_k)}$$

- $P(A_i)$ , **probabilità a priori**.
- $P(B | A_i)$ , **probabilità condizionata o verosimiglianze**
- $P(A_i | B)$ , **probabilità a posteriori**, in quanto si riferiscono agli eventi  $A_i$ , **dopo** aver osservato l'evento  $B$ .