

INFERENZA STATISTICA
Soluzione degli esercizi relativi alle lezioni della V settimana

Esercizio A.

- a) Le stime secondo il metodo dei minimi quadrati sono date da $\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 362.500/4.547.000 = 0,0797$ e $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{x} = 180 - 0,0797 \cdot 2190 = 5,457$.

- b) L'intervallo di confidenza al 95% per β_1 si ricava da

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2;\alpha/2} \sqrt{(DR/(n-2))(1/D_x)},$$

dove $n = 5$, $t_{3;0,025} = 3,182$, $DR = 4.100,453$, $D_x = 4.547.000$, per cui si ottiene $(0,02453; 0,1349)$.

- c) Poiché l'intervallo di confidenza al 95% per β_1 non contiene lo 0, possiamo concludere che i dati contengono sufficiente evidenza per rifiutare l'ipotesi nulla di indipendenza tra spesa e reddito.
- d) Si vogliono ottenere gli intervalli di confidenza al 95% per i valori attesi della spesa corrispondenti a due determinati redditi. Considerando la statistica

$$T = [\hat{Y}_0 - E(Y|x = x_0)] / \sqrt{\frac{DR}{n-2} \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{D_x} \right]},$$

la quale è distribuita come una t di Student con $n - 2$ gradi di libertà, gli intervalli di confidenza richiesti si ricavano da

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2;\alpha/2} \sqrt{\frac{DR}{n-2} \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{D_x} \right]}.$$

Perciò, avendo $t_{3;0,025} = 3,182$, per $x = 3.000$, si ottiene $\hat{Y}_0 = 244,557$ ed intervallo $(175,527; 313,584)$, mentre, per $x = 5.000$, si ottiene $\hat{Y}_0 = 403,957$ ed intervallo $(240,247; 567,667)$.

Esercizio B.

- a) Risulta che $D_x = 362$, $C_{xY} = 198000$ e $\bar{y} = 10750$. Le stime dei minimi quadrati sono $\hat{\beta}_1 = 546,961$ e $\hat{\beta}_0 = -2924,032$;
- b) Dato che $D_Y = 243500000$ e $\hat{\sigma}^2 = DR/6 = (D_Y - \hat{\beta}_1^2 D_x)/6 = 22533609,57$, l'intervallo di confidenza per il parametro β_1 risulta $\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2/362}$ dove $t_{\alpha/2} = 3,707$ è il quantile 0,005 di una t di Student con $gl=6$. L'intervallo cercato è $(-377,915; 1471,838)$;
- c) l'ipotesi nulla H_0 si rifiuta per valori stimati di $\hat{\beta}_1$ superiori a l_α con l_α tale che $P(\hat{\beta}_1 > l_\alpha | H_0) = P\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/D_x}} > \frac{l_\alpha}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/D_x}}\right) = 0,05$ da cui $l_\alpha = 484,768$, essendo $\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/D_x}}$ distribuita come una t di Student con $gl=6$ sotto H_0 . Dato che risulta $\hat{\beta}_1 > l_\alpha$, si rifiuta l'ipotesi nulla.