Probabilità: concetti di base

•***Prova***: (o esperimento aleatorio) è un esperimento caratterizzato da due o più possibili risultati, per il quale esiste incertezza circa il risultato che si realizzerà

•***Evento elementare***: ogni possibile risultato dell'esperimento aleatorio, indicato genericamente come ω_i

•***Evento***: insieme di eventi elementari, indicato genericamente come E

•***Probabilità***: numero compreso tra 0 e 1 che misura il grado di incertezza connesso al risultato scaturito da una prova

In una data **prova**, l'**evento E** si verifica con **probabilità P(E)**

Operazioni sugli insiemi

•Le operazioni sugli insiemi possono essere visualizzate attraverso i ***diagrammi di Venn***: ogni insieme è rappresentato da una *linea curva chiusa* e si trova all'interno di una *scatola* che rappresenta lo spazio, Ω, dei risultati dell'esperimento.

•***Unione*** *di due eventi A e B*: è l'evento $E = A \cup B$ che si verifica se almeno uno dei due eventi *A* o *B* si verificano

•***Intersezione*** *di due eventi A e B*: è l'evento $E = A \cap B$ che si verifica se si verificano entrambi gli eventi *A* e *B*

•***Negazione*** *di un evento A*: è l'evento A^c che si verifica se non si verifica *A*

•Le operazioni di unione e intersezione godono delle proprietà *commutativa*, *associativa* e *distributiva*.

•Sfruttando le operazioni sugli insiemi si possono definire i seguenti eventi:

- **Evento impossibile**: è l'evento che non può mai verificarsi e può essere definito come

$$\varnothing \equiv \overline{\Omega}$$

- **Evento certo**, ossia l'evento che si verifica sempre in quanto comprende tutti i possibili risultati dell'esperimento. Può essere definito come

$$A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B} = \Omega$$

- **Eventi incompatibili**: due eventi *A* e *B* si dicono incompatibili se

$$A \cap B = \varnothing$$

Definizioni della probabilità

•***Definizione classica***: la probabilità è data dal rapporto tra il numero dei *casi favorevoli* all'evento e il numero dei *casi possibili* purché essi siano tutti *ugualmente possibili*.

•***Definizione frequentista***: la probabilità di un evento *E* è il limite a cui tende la *frequenza relativa* con cui si osserva il verificarsi di *E* in un numero *n* di *prove ripetute* nelle *stesse condizioni*, quando *n* tende a infinito

•***Definizione soggettiva***: la probabilità di un evento E è il *grado di fiducia* che ciascun individuo, in maniera *soggettiva*, attribuisce al verificarsi dell'evento, in base alle *informazioni a sua disposizione*.

Approccio assiomatico

•La probabilità è una funzione di insieme che associa a ogni evento *E* un numero reale. La probabilità sarà indicata con *P(E)*.

•La probabilità deve sottostare alle seguenti proprietà assiomatiche:

Postulato 1 → $P(A) \geq 0$

Postulato 2 → $P(\Omega)=1$

Postulato 3 → $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

•A partire dai tre assiomi è possibile derivare tutta una serie di leggi che la probabilità deve rispettare, tra cui:

- $0 \leq P(E) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $B \subset A \rightarrow P(B) \leq P(A)$
- $P(A^c) = 1-P(A)$
- $P(B) = 1 \rightarrow P(B \cap A) = P(A)$
- $P(B) = 0 \rightarrow P(B \cup A) = P(A)$
- $P(B \cup A) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Probabilità condizionate e indipendenza

•A volte si vuole valutare la probabilità di un certo evento A, sapendo che si è già verificato un evento B ad esso collegato. Si parla allora di probabilità di A ***condizionata*** a B e si indica come P(A|B)

•La probabilità di A condizionata a B si calcola come:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

•Dalla probabilità condizionata segue che (***principio delle probabilità composte***)

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

•Se il verificarsi dell'evento B non modifica in alcun modo la probabilità di verificarsi dell'evento A, i due eventi si dicono ***indipendenti***.

•Il concetto di indipendenza è simmetrico e può essere formalizzato in due modi equivalenti:

- Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Il teorema di Bayes

•Si definisce partizione di Ω un insieme di eventi $A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_k$, tali che:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$, per ogni *i*, *j*
- $\bigcup_{j=i}^{k} A_j = \Omega$

Teorema di Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1)\cdot P(B \mid A_1) + \ldots + P(A_k)\cdot P(B \mid A_k)}$$

- $P(A_i)$, **probabilità a priori**.
- $P(B \mid A_i)$, **probabilità condizionate** o **verosimiglianze**
- $P(A_i \mid B)$, **probabilità a posteriori**, in quanto si riferiscono agli *eventi* A_i, **dopo** aver osservato l'*evento B*.