

Concentrazione

- Nello studio della distribuzione della ricchezza, è di fondamentale importanza l'aspetto della **concentrazione**. Intuitivamente, la concentrazione è elevata quando poche unità della popolazione possiedono gran parte della ricchezza. La concentrazione è minima (equidistribuzione) quando tutte le unità hanno la stessa ricchezza.
- Un carattere *quantitativo trasferibile*, le cui modalità ordinate sono $x_1, \dots, x_n$, si dice **equidistribuito** se ognuna delle n unità possiede una quota dell'ammontare del carattere pari a

$$\frac{1}{n} A \quad \text{dove} \quad A = \sum_{i=1}^n x_i$$

che coincide con la media aritmetica $\bar{x}$.

1

Misurazione della concentrazione (distribuzione unitaria)

- Ammontare del carattere** posseduto dalle i unità "più povere" dopo aver ordinato i termini della distribuzione ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$)
- Ammontare relativo del carattere** posseduto dalle i unità "più povere"
- Ammontare relativo del carattere** posseduto dalla i unità "più povere" nel caso (ipotetico) di equidistribuzione:

$$A_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i = \sum_{j=1}^i x_j$$

$$Q_i = \frac{A_i}{A} = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

$$F_i = i/n$$

- Per qualsiasi distribuzione si ha: $F_i \geq Q_i$, $\forall i$ e $F_n = Q_n = 1$
- All'aumentare della concentrazione aumentano le differenze: $F_i - Q_i$
- Nel caso di massima concentrazione si ha: $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{n-1} = 0$

3

- Se non c'è equidistribuzione allora si ha **concentrazione**.

- Si ha **massima concentrazione** quando una sola unità del collettivo possiede tutto l'ammontare del carattere e tutte le altre nulla, cioè

$$x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \quad \text{e} \quad x_n = A$$

- Esempio:** si hanno 100 soggetti e l'ammontare complessivo del reddito mensile è $A = 50.000\text{€}$. Se c'è equidistribuzione ogni soggetto ha reddito pari a 500€ mentre nel caso di massima concentrazione un solo soggetto ha reddito pari a 50.000€ e gli altri soggetti non hanno reddito.

2

- Come indice sintetico si usa il **rapporto di concentrazione di Gini** che si ottiene come rapporto tra $\sum_{i=1}^{n-1} (F_i - Q_i)$ e il suo valore massimo:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (F_i - Q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} F_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} F_i}$$

- L'indice di Gini cresce al crescere del livello di concentrazione ed è sempre compreso tra 0 (nel caso di equidistribuzione) e 1 (nel caso di massima concentrazione).
- Un altro strumento che permette di valutare il grado di concentrazione è la **curva di Lorenz**. Si tratta di un grafico ottenuto unendo con dei segmenti i punti di coordinate (F_i, Q_i) , per $i = 1, \dots, n$. Maggiore è l'area tra la curva di Lorenz e la bisettrice, maggiore è la concentrazione.

4

Esempio

- Per un gruppo di 5 soggetti si ha la seguente distribuzione del reddito mensile

Unità (i)	Reddito (x _i)
1	250
2	650
3	3000
4	750
5	350
Totale	5000

5

Misurazione della concentrazione (distribuzione di frequenze)

- Ammontare del carattere** posseduto dalle unità “più povere” (ossia quelle che possiedono un ammontare $\leq x_h$)

$$A_h = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_j n_j = \sum_{j=1}^h x_j n_j$$

- Ammontare relativo del carattere** posseduto dalle unità con ammontare $\leq x_h$

$$Q_h = \frac{A_h}{A} = \frac{\sum_{j=1}^h x_j n_j}{\sum_{j=1}^K x_j n_j}$$

- Ammontare relativo del carattere** posseduto dalla unità con ammontare $\leq x_h$ nel caso (ipotetico) di *equidistribuzione*:

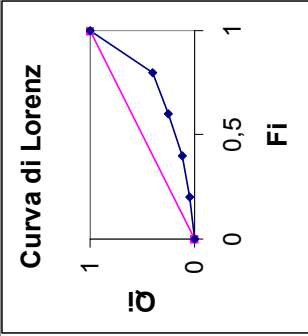
$$F_h = N_h / n$$

7

- Non c'è equidistribuzione e quindi c'è concentrazione. Per quantificarne il livello si ordinano prima le modalità ottenendo

Reddito (x _i)	A _i	Q _i	F _i	F _r -Q _i
250	250	0,05	0,2	0,15
350	600	0,12	0,4	0,28
650	1250	0,25	0,6	0,35
750	2000	0,40	0,8	0,40
3000	5000	1,00	~~X~~	~~0,80~~
5000	--	--	2	1,18

da cui l'indice di Gini è pari
a R =1,18/ 2 = 0,59



Misurazione della concentrazione (distribuzione in classi)

- Ammontare del carattere** posseduto dalle j classi “più povere”

$$A_j = \bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \dots + \bar{x}_j n_j = \sum_{i=1}^j \bar{x}_i n_i$$

dove abbiamo fatto l'ipotesi di uniforme distribuzione del carattere all'interno della classe e usato il valore centrale della classe

- Ammontare relativo del carattere** posseduto dalle j classi “più povere”

$$Q_j = \frac{A_j}{A} = \frac{\sum_{i=1}^j \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^K \bar{x}_i n_i}$$

- Ammontare relativo del carattere** posseduto dalle j classi “più povere” nel caso (ipotetico) di *equidistribuzione*:

$$F_j = N_j / n$$

8

- Un'approssimazione del **rapporto di concentrazione** si ottiene in questo caso come

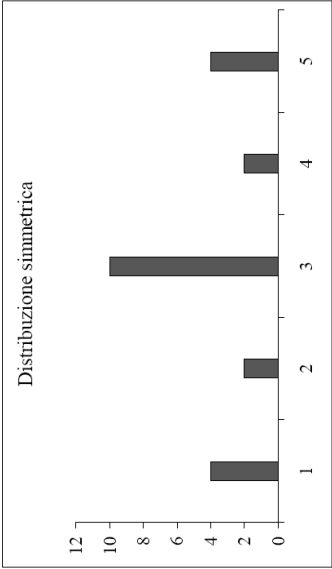
$$R = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} (F_{j+1} - F_j)(Q_{j+1} + Q_j)$$

in cui F_0 e Q_0 sono state poste per convenzione uguali a zero.

- Se si ha a disposizione l'ammontare delle classi, questo viene utilizzato al posto dell'ammontare approssimativo $\bar{x}_j n_j$

Asimmetria

- Una distribuzione di frequenza con *mediana* M_e è **simmetrica** se:
 - $|x_1 - M_e| = |x_k - M_e|$, $|x_2 - M_e| = |x_{k-1} - M_e|$, $|x_3 - M_e| = |x_{k-2} - M_e|$, ...
 - $n_1 = n_k$, $n_2 = n_{k-1}$, $n_3 = n_{k-2}$, ...



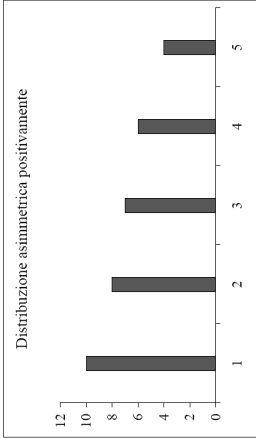
Esempio

Fatturato	Freq. (n_j)	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_j n_j$	A_j	Q_j	N_j	F_j
0-1	144	0,5	72	72	0,0113	144	0,158
1-5	457	3	1371	1443	0,2264	601	0,660
5-10	171	7,5	1282,5	2725,5	0,4277	772	0,847
10-25	112	17,5	1960	4685,5	0,7352	884	0,970
25-100	27	62,5	1687,5	6373	1	911	1

$$R = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} (F_{j+1} - F_j)(Q_{j+1} + Q_j) =$$

$$1 - 0,158 \cdot 0,0113 - (0,660 - 0,158)(0,0113 + 0,2264) - \dots = 0,562$$

- Una distribuzione si dice **asimmetrica** se le condizioni precedenti non sono rispettate. In particolare, si può avere
 - **Asimmetria positiva**: sono più frequenti le modalità più piccole;
 - **Asimmetria negativa**: sono più frequenti le modalità più grandi.



Misurazione dell'asimmetria

- L'indice di *asimmetria* più utilizzato è quello di *Fisher*:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma^3} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^3 n_j \right]$$

- Si noti che se la distribuzione di frequenza è simmetrica si ha:

$$M_e - Q_1 = Q_3 - M_e$$

e quindi si può costruire un indice di asimmetria basato su statistiche d'ordine:

$$\beta_2 = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

- Usualmente, quando gli indici sono maggiori di 0 si ha asimmetria positiva e quando sono negativi si ha asimmetria negativa.

- Per la prima distribuzione del numero di figli per un collettivo di 25 famiglie, che ha media 2,04 e deviazione standard 0,871 si ha:

Popolazione 1

N. Figli (x_j)	Frequenze (n_j)	$(x_j - \bar{x})^3 n_j$
0	1	-8,4897
1	4	-4,4995
2	15	-0,0010
3	3	2,6542
4	2	15,0591
Totale	25	4,7232

$$\beta_1 = \frac{1}{0,871^3} \left(\frac{4,7232}{25} \right) = 0,286$$