Dipendenza in media

- La *misurazione della connessione* tra due caratteri si basa solo sulle frequenze congiunte senza tenere conto delle modalità dei due caratteri.
- Quando uno dei due caratteri (tipicamente *Y*) è *quantitativo*, è possibile confrontare le distribuzioni condizionate di *Y* tramite le medie condizionate.
- Per l'*i*-esima modalità di *X* (x_i), la media condizionata di *Y* è data da

$$\bar{y}_{X=x_i} = \frac{1}{n_{i\circ}} \sum_{j=1}^{K} y_j n_{ij}$$

- Nel caso in cui il carattere *Y* è in classi, occorre utilizzare i valori centrali delle classi al posto delle modalità.

- Il carattere *Y* si dice ***indipendente in media*** da *X* quando *X* non influenza la media di *Y*. In termini matematici:

$$\bar{y}_{X=x_1} = \bar{y}_{X=x_2} = \cdots = \bar{y}_{X=x_H} = \bar{y}$$

dove la *media marginale* di *Y* è data da

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{K} y_j n_{\circ j}$$

- Altrimenti, *Y* è ***dipendente in media*** da *X*.

Esempio

- La media della distribuzione condizionata del *reddito* quando il *titolo di studio* è la *licenza media* viene calcolata come

Licenza media

Reddito (y_j)	Frequenze (n_{ij})	Valori centrali (y_j)	$y_j n_{ij}$
0-10	88	5	440
10-30	142	20	2840
30-100	120	65	7800
Totale	350	---	11080

$$\bar{y}_{X=x_1} = \frac{1}{n_{1\circ}} \sum_{j=1}^{K} y_j n_{1j} = \frac{1}{350} 11080 = 31{,}66$$

- Si ha anche

$\bar{y}_{X=x_2} = 38{,}31$ (titolo di studio = *diploma*)

$\bar{y}_{X=x_3} = 48{,}83$ (titolo di studio = *laurea*)

e quindi il reddito dipende in media dal titolo di studio.

- La media della distribuzione marginale del *reddito* è

$$\bar{y} = 35$$

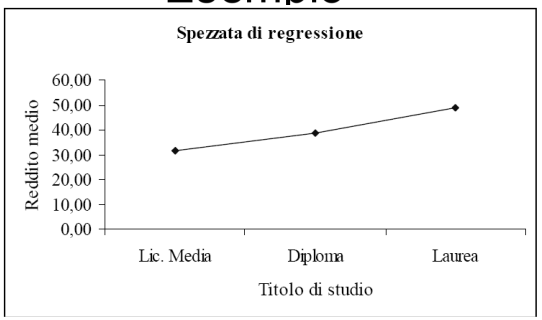
Spezzata di regressione

- La *spezzata di regressione* è un grafico che consiste nel rappresentare, e congiungere con dei segmenti, i punti di coordinate

$$\left(x_i, \bar{y}_{X=x_i}\right)$$

- La spezzata di regressione permette di intuire come varia la media di *Y* al variare della modalità di *X* .

Esempio



Misura della dipendenza in media

- Per verificare se c'è o meno *dipendenza in media* di *Y* da *X* si può utilizzare la ***varianza spiegata*** (o ***varianza delle medie condizionate***) che è definita come

$$\sigma^2_{Media(Y|X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{H}\left(\bar{y}_{X=x_i} - \bar{y}\right)^2 n_{i\circ}$$

- La varianza spiegata è sempre non negativa; in particolare
  - $\sigma^2_{Media(Y|X)} = 0 \quad \Rightarrow$ *indipendenza in media* di *Y* da *X*.
  - $\sigma^2_{Media(Y|X)} > 0 \quad \Rightarrow$ *dipendenza in media* di *Y* da *X*.
- Il massimo della varianza spiegata è dato dalla ***varianza totale*** di *Y*,

$$\sigma^2_Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}\left(y_j - \bar{y}\right)^2 n_{\circ j}$$

- La differenza tra la varianza totale e quella spiegata è chiamata varianza residua ed è sempre non negativa

$$Media\left(\sigma^2_{Y|X=x_i}\right) = \sigma^2_Y - \sigma^2_{Media(Y|X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{H}\sum_{j=1}^{K}\left(y_j - \bar{y}_{X=x_i}\right)^2 n_{ij}$$

- E' quindi possibile definire un *indice relativo* per misurare la dipendenza in media, chiamato ***rapporto di correlazione***, come

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\sigma^2_{Media(Y|X)}}{\sigma^2_Y}$$

- Per l'interpretazione del valore assunto da $\eta^2_{Y|X}$ si consideri che:
  - $\eta^2_{Y|X} = 0 \quad \Rightarrow$ *indipendenza in media* di *Y* da *X*.
  - $\eta^2_{Y|X} > 0 \quad \Rightarrow$ *dipendenza in media* di *Y* da *X*.
  - $\eta^2_{Y|X} = 1 \quad \Rightarrow$ *massima dipendenza in media* di *Y* da *X*.
- La *dipendenza in media* ***implica*** la *dipendenza statistica* e quindi se

$$\eta^2_{Y|X} > 0 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 > 0$$

- L'indipendenza in media non implica l'indipendenza statistica e quindi può accadere che

$$\eta^2_{Y|X} = 0 \quad e \quad \chi^2 > 0$$

Esempio

Titolo di studio (x_i)	Medie condizionate ($\bar{y}_{X=x_i}$)	$n_{i\circ}$	$\left(\bar{y}_{X=x_i} - \bar{y}\right)^2 n_{i\circ}$
Licenza media	31,66	350	3911,14
Diploma	38,31	86	944,48
Laurea	48,83	64	12237,89
Totale	---	500	17093,51

$$\sigma^2_{Media(Y|X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{H}\left(\bar{y}_{X=x_i} - \bar{y}\right)^2 n_{i\circ} = 17093{,}51/500 = 34{,}19$$

Reddito	Frequenze (n_{ij})	Valori centrali (y_j)	$\left(y_j - \bar{y}\right)^2 n_{\circ j}$
0-10	100	5	90000
10-30	200	20	45000
30-100	200	65	180000
Totale	500	---	315000

$$\sigma^2_Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}\left(y_j - \bar{y}\right)^2 n_{\circ j} = \frac{315000}{500} = 630 \qquad \eta^2_{Y|X} = \frac{34{,}19}{630} = 0{,}054$$

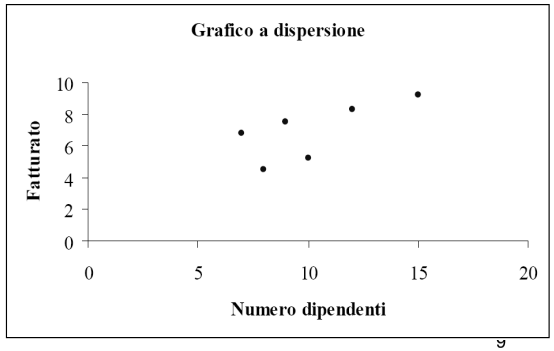
Correlazione

- Quando i caratteri *X* e *Y* studiati sono quantitativi, se ne può dare una rappresentazione grafica attraverso un ***grafico a dispersione*** (o ***nuvola di punti***).
- Un grafico a dispersione si ottiene riportando sul piano cartesiano i punti di coordinate (x_i,y_i) che rappresentano le modalità dei due caratteri presentate dall'unità *i*-esima.
- Si dice che *X* e *Y* sono ***correlati positivamente*** quando al crescere di *X* anche *Y* tende a crescere. Si dice che *X* e *Y* sono ***correlati negativamente*** quando al crescere di *X*, *Y* tende a decrescere.

Esempio

- Per un collettivo di n = 6 imprese sono state rilevate le modalità dei caratteri *numero di dipendenti* (X) e *fatturato* (Y).

Dipendenti	Fatturato
15	9,2
10	5,2
8	4,5
7	6,8
12	8,3
9	7,5



- Una misura della *concordanza* tra X e Y è data dalla ***covarianza***, un indice simmetrico calcolato come:

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = Media(XY) - \bar{x}\bar{y}$$

- La covarianza assume valori nell'intervallo

$$-\sigma_X\sigma_Y \le \sigma_{XY} \le \sigma_X\sigma_Y$$

- Dividendo la covarianza per $\sigma_X\sigma_Y$ si ottiene il coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Proprietà del coefficiente di correlazione

- $-1 \le \rho_{XY} \le 1$
- $\rho_{XY} = 1$ se Y = a+bX e i due caratteri sono concordi.
- $\rho_{XY} = -1$ se Y = a+bX e i due caratteri sono discordi.
- $\rho_{XY} = 0$ se X e Y sono indipendenti, oppure se la loro relazione non è lineare.

Esempio

Dipendenti (x_i)	Fatturato (y_i)	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$y_i x_i$
15	9,2	4,833	2,283	11,036	138
10	5,2	-0,167	-1,717	0,286	52
8	4,5	-2,167	-2,417	5,236	36
7	6,8	-3,167	-0,117	0,369	47,6
12	8,3	1,833	1,383	2,536	99,6
9	7,5	-1,167	0,583	-0,681	67,5
61	41,5	0	0	18,783	440,7

$\bar{x} = 61/6 = 10{,}17$ $\quad \sigma_{XY} = 18{,}783/6 = 3{,}13$

$\bar{y} = 41{,}5/6 = 6{,}92$ $\quad \sigma_{XY} = 440{,}7/6 - 10{,}17 \cdot 6{,}92 = 3{,}13$

Dipendenti (x_i)	**Fatturato** (y_i)	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
15	9,2	4,833	2,283	23,361	5,214
10	5,2	-0,167	-1,717	0,028	2,947
8	4,5	-2,167	-2,417	4,694	5,840
7	6,8	-3,167	-0,117	10,028	0,014
12	8,3	1,833	1,383	3,361	1,914
9	7,5	-1,167	0,583	1,361	0,340
61	41,5	0	0	42,833	16,268

$$\sigma_X = \sqrt{42{,}833/6} = 2{,}672$$

$$\sigma_X = \sqrt{16{,}268/6} = 1{,}647$$

$$\rho_{XY} = \frac{3{,}13}{2{,}672 \cdot 1{,}647} = 0{,}712$$