Le medie

- **Medie**: permettono di sintetizzare una distribuzione sulla base di un solo valore. Possono essere classificate in:
  - ***Medie analitiche***: calcolate tramite operazioni algebriche sui valori del carattere ➡ solo per *caratteri quantitativi*
  - ***Medie di posizione***: non richiedono operazioni algebriche ➡ anche per *caratteri qualitativi*

Medie analitiche	***Medie di posizione***
Media aritmetica	Mediana
Media geometrica	Moda
Media troncata	Percentili

La media aritmetica

- Per una *distribuzione unitaria* di un carattere *quantitativo* di *n* termini, la **media aritmetica** è definita come:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Esempio

- Distribuzione del voto in Statistica per un gruppo di 6 studenti:

Unità statistica (*i*)	**Voto (x_i)**
1	27
2	21
3	28
4	30
5	21
6	27
Totale	**154**

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\cdot 154 = 25{,}667$$

- La media aritmetica può essere calcolata direttamente per una *distribuzione di frequenza* non in classi tramite la formula

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j n_j$$

che tiene conto del fatto che una modalità può ripetersi più volte

- Per il calcolo si imposta una tabella del tipo:

Modalità (x_j)	**Frequenze (n_j)**	**$x_j n_j$**
x_1	n_1	$x_1 n_1$
x_2	n_2	$x_2 n_2$
…	…	…
x_k	n_k	$x_k n_k$
Totale	n	$\Sigma_j x_j n_j$

Esempio

Voto (x_j)	**Frequenza (n_j)**	**$x_j n_j$**
21	2	42
27	2	54
28	1	28
30	1	30
Totale	**6**	**154**

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\cdot 154 = 25{,}667$$

- Alternativamente si può utilizzare la formula

$$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k = \sum_{j=1}^{k} x_j f_j$$

basata sulle frequenze relative.

- La tabella seguente fornisce direttamente il valore della media aritmetica.

Modalità (x_j)	Frequenze (n_j)	Freq. relative (f_j)	$x_j f_j$
x_1	n_1	f_1	$x_1 f_1$
x_2	n_2	f_2	$x_2 f_2$
…	…	…	…
x_k	n_k	f_k	$x_k f_k$
Totale	n	1	$\Sigma_j x_j f_j$

- Il risultato può risentire di approssimazioni nel calcolo delle frequenze relative

Esempio

Voto (x_j)	Frequenza (n_j)	Freq. relativa (f_j)	$x_j f_j$
21	2	0,333	6,993
27	2	0,333	8,991
28	1	0,167	4,676
30	1	0,167	5,010
Totale	**6**	**1**	**25,670**

$$\bar{x} = 25{,}670 \approx 25{,}667$$

- Quando il carattere è in classi, si ha una perdita di informazione in quanto non si conosce più con esattezza la modalità di ogni unità statistica. La media sarebbe calcolabile esattamente conoscendo le medie di classe ($\bar{x}_j$) come:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \ldots + \bar{x}_k n_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j n_j$$

- Non conoscendo le medie di classe, si usano invece i **valori centrali**

$$x_j = \frac{1}{2}\left(c_{j-1} + c_j\right)$$

che corrispondono alle medie di classe sotto l'ipotesi di uniforme distribuzione. La media aritmetica viene quindi calcolata come

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j n_j \qquad \text{oppure} \qquad \bar{x} = \sum_{j=1}^{k} x_j f_j$$

- Il risultato può risentire di approssimazioni nel calcolo delle frequenze relative

- Per il calcolo si imposta una tabella del tipo (quando si applica la formula basata sulle frequenze assolute)

Classi ($c_{j-1} - c_j$)	Frequenze (n_j)	Valori centrali (x_j)	$x_j n_j$
$c_0 - c_1$	n_1	x_1	$x_1 n_1$
$c_1 - c_2$	n_2	x_2	$x_2 n_2$
…	…	…	…
$c_{k-1} - c_k$	n_k	x_k	$x_k n_k$
Totale	n	-	$\Sigma_j x_j n_j$

- Oppure una tabella del tipo (quando si applica la formula basata sulle frequenze relative)

Classi ($c_{j-1} - c_j$)	Frequenze (n_j)	Freq. relative (f_j)	Valori centrali (x_j)	$x_j f_j$
$c_0 - c_1$	n_1	f_1	x_1	$x_1 f_1$
$c_1 - c_2$	n_2	f_2	x_2	$x_2 f_2$
…	…	…	…	…
$c_{k-1} - c_k$	n_k	f_k	x_k	$x_k f_k$
Totale	n	1	-	$\Sigma_j x_j f_j$

Esempio

• Per la distribuzione dell'altezza per un collettivo di 50 persone:

Classi (c_{j-1} - c_j)	Frequenze (n_j)	Valori centrali (x_j)	$x_j n_j$	Freq. relative (f_j)	$x_j f_j$
150 |– 160	1	155	155	0,02	3,1
160 |– 170	10	165	1650	0,20	33,0
170 |– 180	35	175	6125	0,70	122,5
180 |– 200	4	190	760	0,08	15,2
Totale	50	-	8690	1	173,8

$$\bar{x} = 8690/50 = 173{,}8$$

• In alcune situazioni si ha una ***distribuzione ponderata*** in cui a ogni modalità viene associato un peso che ne quantifica l'importanza

Unità (j)	Modalità (x_j)	Peso (w_j)
1	x_1	w_1
2	x_2	w_2
…	…	…
n	x_n	w_n

• Per calcolare la media aritmetica, il peso viene trattato come una frequenza

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j w_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$$

Esempio

• Voti di uno studente del primo anno di Economia:

Esame (j)	Voto (x_j)	CFU (w_j)	$x_j w_j$
Microeconomia	28	12	336
Matematica	25	12	300
Storia Economica	30	6	180
Informatica	30	6	180
Inglese	28	6	168
Ec. aziendale	27	9	243
Ist. Dir. Pub.	30	9	270
Totale	-	60	1677

$$\bar{x} = 1677/60 = 27{,}95$$

Proprietà della media aritmetica

• ***Proprietà 1*** *(consistenza)*: Se la distribuzione è costituita da *n* termine tutti pari ad *a*, la media della distribuzione sarà anch'essa pari ad *a*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a = a$$

• ***Proprietà 2*** *(monotonia)*: Date due distribuzioni unitarie con n termini, rispettivamente, $x_1, x_2, .., x_n$ e $y_1, y_2, .., y_n$, se vale la condizione $x_j \leq y_j$ per ogni *j*, e almeno una volta $x_j < y_j$, allora

$$\bar{x} < \bar{y}$$

- ***Proprietà 3***: La somma algebrica degli scarti dalla media è nulla:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right) = 0$$

Esempio

Unità statistica (*i*)	Voto in stat. (x_i)	Scarto
1	27	1
2	21	-5
3	28	2
4	30	4
5	23	-3
6	27	1
Totale	**156**	**0**

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\cdot 156 = 26$$

- ***Proprietà 4***: La media minimizza la distanza al quadrato di ogni modalità da una costante

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - c\right)^2 \quad \text{è minimo per} \quad c = \bar{x}$$

Esempio

Unità statistica (*j*)	Voto in stat. (x_j)	Scarto $x_j - \bar{x}$	Scarto $\left(x_j - \bar{x}\right)^2$
1	27	1	1
2	21	-5	25
3	28	2	4
4	30	4	16
5	23	-3	9
6	27	1	1
Totale	**154**	**0**	**56**

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\cdot 156 = 26$$

- ***Proprietà 5*** *(di internalità)*: La media è sempre compresa tra il minimo e il massimo della distribuzione

$$x_1 \le \bar{x} \le x_k$$

- ***Proprietà 6*** (*invarianza rispetto a trasformazioni lineari*): se a ogni termine della distribuzione viene applicata la trasformazione *aX* + *b*, allora la media sarà pari a

$$a\bar{x} + b$$

Esempio

- Da un sito web americano vengono acquistati 5 libri. Il prezzo è espresso in dollari e si vuole conoscere il prezzo medio in euro

Unità statistica (*i*)	Prezzo in \$ (x_i)	Prezzo in € (y_j =0,7431•x_j)
1	20	14,862
2	16	11,890
3	30	22,293
4	15,5	11,518
5	21	15,605
Totale	**102,5**	**76,168**

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\cdot 102{,}5 = 20{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{1}{5}\cdot 76{,}168 = 15{,}234$$

$$\bar{y} = 0{,}7431\cdot\bar{x} = 0{,}7431\cdot 20{,}5 = 15{,}234$$

Esempio

- Si conosce il numero di componenti delle famiglie residenti nelle Marche. Si vuole calcolare la spesa media giornaliera per consumi alimentari sapendo che vale approssimativamente la relazione y = 16+1,2•x, dove x indica il numero di componenti e y la spesa giornaliera.

Numero di componenti (x_j)	Numero di famiglie (n_j)	$x_j n_j$	Spesa giornaliera $y_j = 16+1,2 \cdot x_j$	$y_j n_j$
1 persona	124143	124143	17,2	2135260
2 persone	149531	299062	18,4	2751370
3 persone	124394	373182	19,6	2438122
4 persone	107992	431968	20,8	2246234
5 persone	31751	158755	22	698522
6 persone	11663	69978	23,2	270581,6
Totale	**549474**	**1457088**	**-**	**10540090**

$$\bar{x} = \frac{1457088}{549474} = 2,65 \qquad \bar{y} = \frac{10540090}{549474} = 19,182$$

$$\bar{y} = 16 + 1,2 \cdot \bar{x} = 16 + 1,2 \cdot 2,65 = 19,182$$

- ***Proprietà 7*** *(associativa)*: se un collettivo di *n* unità è composto da L sottocolletivi con numerosità $n_1, n_2, \ldots, n_L$ e medie $\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \ldots, \bar{x}_{(L)}$, la media complessiva si può ottenere come

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} \bar{x}_{(h)} n_h$$

Esempio

- Per la distribuzione delle industrie per classi di fatturato (milioni):

Classi (c_{j-1} - c_j)	Frequenze (n_j)	Valori centrali (x_j)	$x_j n_j$	Medie di classe $\bar{x}_{(j)}$	$\bar{x}_{(j)} n_j$
0 – 1	144	0,5	72	0,604	87,0
1 – 5	457	3,0	1371	2,556	1168,1
5 – 10	171	7,5	1282,5	7,018	1200,1
10 – 25	112	17,5	1960	16,045	1797,0
25 – 100	27	62,5	1687,5	47,333	1278,0
Totale	911	-	6373	-	5530,2

$$\bar{x} = 6373/911 = 6,996 \qquad \bar{x} = 5530,2/911 = 6,070$$

Esempio

- Se si conosce l'ammontare totale di carattere posseduto dalla classe (ossia se è disponibile la *distribuzione di quantità* associata alla distribuzione in classi) è possibile calcolare la media in maniera esatta:

Classi di fatturato (c_{j-1} - c_j)	Frequenze (n_j)	Ammontare di fatturato (A_j)
0 – 1	144	87,0
1 – 5	457	1168,1
5 – 10	171	1200,1
10 – 25	112	1797,0
25 – 100	27	1278,0
Totale	**911**	**5530,2**

$$\bar{x} = 5530,2/911 = 6,070$$